المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الأوّل

الصف التاسع

٩

الرياضيات
الجزء الأوّل
الصفّ التاسع
١٤٤٠هـ/ ٢٠١٩م

ISBN: 978-9957-84-626-8

المطبعة الوطنية

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الأول

الصف التاسع

٩

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:
هاتف : ٨ - ٥ / ٤٦١٧٣٠٤ فاكس : ٤٦٣٧٥٦٩ ص. ب: ١٩٣٠ الرمز البريدي : ١١١١٨
أو بوساطة البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٢٠١٥/٣١)، تاريخ ٢٠١٥/٣/٢٦م ، بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٥م/٢٠١٦م.

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٥/٥/٢٠٨١)
ISBN: 978 - 9957 - 84 - 626 - 8

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. وصفي أحمد شطناوي
أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد ربابعة
أ.د. ربى محمد مقدادي
عصام سليمان الشطناوي (مقررًا)

وقام بتأليفه كل من:

اسماعيل علي صالح
فدوى خليل القطاطشة
د. حسين عسكر الشرفات
رناد حسن بغدادي

التحرير العلمي: عصام سليمان الشطناوي
التحرير اللغوي: حياة عبدالله عبيدات
التصميم والرسم: هاني سلطي مقطش
التحرير الفني: نرمين داود العزة
الإنتاج: سليمان أحمد الخلايلة

دقق الطباعة وراجعها: نفين أحمد جوهر

الطّبعةُ الأولى ١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م
أعيدت طباعته ٢٠١٦ – ٢٠١٩م

قائمةُ المحتوياتِ

الموضوعُ		الصفحة
المقدمةُ		٥
الوحدةُ الأولى: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ		**٧**
تهيئةٌ		٨
١–١	الفرقُ بينَ مربعينِ وتحليلُهُ	١٠
١–٢	تحليلُ العبارةِ التربيعيةِ	١٤
١–٣	مجموعُ مكعبينِ وتحليلُهُ	٢٠
١–٤	الفرقُ بينَ مكعبينِ وتحليلُهُ	٢٤
١–٥	العاملُ المشتركُ الأكبرُ	٢٨
١–٦	المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ	٣٢
١–٧	المقاديرُ الكسريةُ	٣٦
١–٨	المعادلةُ الكسريةُ	٤٠
مراجعةٌ		٤٤
اختبارٌ ذاتيٌّ		٤٦
الوحدةُ الثانيةُ: المتبايناتُ الخطيةُ بمتغيرٍ واحدٍ		**٤٩**
تهيئةٌ		٥٠
٢–١	الفتراتُ	٥٢
٢–٢	المتبايناتُ وخصائصُها	٥٨
٢–٣	المتبايناتُ الخطيةُ بمتغيرٍ واحدٍ	٦٢
٢–٤	المتبايناتُ المركبةُ بمتغيرٍ واحدٍ	٦٩
مراجعةٌ		٧٤
اختبار ذاتيٌّ		٧٦
الوحدةُ الثالثةُ: الاقترانُ التربيعيُّ		**٧٩**
تهيئةٌ		٨٠
٣–١	الاقترانُ التربيعيُّ ورسمُ منحناهُ	٨٢
٣–٢	أصفارُ الاقترانِ التربيعيِّ	٩٣

قائمة المحتويات

الموضوع		الصفحة
٣–٣	حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بيانيًّا	٩٧
٣–٤	حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بالتحليلِ إلى العواملِ	١٠٢
٣–٥	حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بإكمالِ المربعِ	١٠٦
٣–٦	حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بالقانونِ العامِ	١١١
مراجعةٌ		١١٨
اختبارٌ ذاتيٌّ		١٢٠
الوحدةُ الرابعةُ: الاحتمالاتُ		**١٢٣**
	تهيئةٌ	١٢٤
٤–١	مبدأُ العدِّ	١٢٦
٤–٢	الفضاءُ العينيُّ والتجربةُ العشوائيّةُ	١٣٢
٤–٣	الحادثُ	١٣٩
٤–٤	احتمالُ الحادثِ	١٤٥
مراجعةٌ		١٥١
اختبارٌ ذاتيٌّ		١٥٢

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

بعون الله وتوفيقه، نضع بين أيديكم كتاب الرياضيات للصف التاسع الأساسي، وقد عرض المحتوى الدراسي بطريقة استقصائية تجعل من الطلبة متعلمين نشطين، وتضمن توظيف مهارات القرن الحادي والعشرين كالمناقشة والتواصل والتفكير والتبرير، وتراعي المادة العلمية في الكتاب مستويات النمو لدى الطلبة، والفروق الفردية، كما وتم ربط المادة العلمية بحياة الطالب اليومية من خلال الأمثلة والتدريبات والتمارين، حيث تم طرح مشكلات حقيقية بداية كل درس، وتقديم المادة العلمية بأسلوب يثير الدافعية وربطه بالتعلم السابق على شكل مسائل تهيئة بداية كل وحدة دراسية، فضلًا عن اختبار ذاتي ومراجعة لكل وحدة في الكتاب.

تقع مادة الكتاب في ثماني وحدات، خصصت الوحدات الأربع الأولى منها للفصل الدراسي الأول، والوحدات الأربع التالية للفصل الدراسي الثاني. حيث تناولت الوحدة الأولى عرض المفاهيم المرتبطة بالتحليل إلى العوامل والطرق المختلفة لتحليل المقادير الجبرية إلى العوامل وبعض التطبيقات لها، وتناولت الوحدة الثانية حل المتباينات الخطية بمتغير واحد والفترات وتمثيلها على خط الأعداد وخصائصها، وتناولت الوحدة الثالثة الاقتران التربيعي وطرق حل المعادلات المرتبطة به، وتناولت الوحدة الرابعة مبدأ العد، والتجارب العشوائية والفضاء العيني لها والحوادث وأنواعها واحتمال الحوادث، وتناولت الوحدة الخامسة التعريف بالأسس النسبية وقوانينها وحل معادلات أسية ومسائل حياتية باستخدام قوانين الأسس، أما الوحدة السادسة فتعرض أهم مفاهيم وتطبيقات الهندسة الإحداثية الرياضية ومعادلة الخط المستقيم وتطبيقات عليها، ومعادلة الدائرة وتطبيقات عليها، والوحدة السابعة تناولت استقصاء النسب المثلثية والعلاقات بينها واستخدامها في حل المثلث قائم الزاوية، وتطبيقات حياتية متنوعة كزوايا الارتفاع والانخفاض وغيرها، وأخيرًا تناولت الوحدة الثامنة مفهومي التشابة والتطابق وعرض حالات تشابه وتطابق المثلثات وتوظيفها في حل مسائل حياتية.

ونرجو أن نكون قد وفقنا في عرض مادة هذا الكتاب ليكون نافعًا ومحققًا للأهداف المرجوة مؤكدين احترامنا وتقديرنا لكل نقد أو اقتراح بناء بهدف إغناء الكتاب وتطويره.

والله ولي التوفيق

١

١–١ الفرقُ بينَ مربعينِ وتحليلُهُ

١–٢ تحليلُ العبارةِ التربيعيةِ

١–٣ مجموعُ مكعبينِ وتحليلُهُ

١–٤ الفرقُ بينَ مكعبينِ وتحليلُهُ

١–٥ العاملُ المشتركُ الأكبرُ

١–٦ المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ

١–٧ المقاديرُ الكسريةُ

١–٨ المعادلةُ الكسريةُ

الجبرُ فرعٌ من فروعِ الرياضيّاتِ، وكلمةُ (الجبرِ) كلمةٌ عربيةُ الأصلِ جاءَ بها عالمُ الرياضياتِ والفلكِ الرحالةُ المسلمُ محمدٌ بن موسى الخوارزميُّ في كتابهِ المعروفِ باسمِ (الجبرُ والمقابلةُ)، وهو علمٌ يُعنى بتبسيطِ المسائلِ الحسابيةِ المعقدةِ، وصياغةِ البديهياتِ والعلاقاتِ الّتي تمثلُ الظواهرَ المختلفةَ، ويتعاملُ معَ الأعدادِ والرموزِ والمتغيراتِ مما يسهّلُ العملياتِ الرياضيةَ ويمكنُنا منَ الوصولِ إلى تعميماتٍ رياضيةٍ وعلميةٍ متنوعةٍ.

وباستخدامِ الجبرِ والعلاقاتِ الرياضيةِ التي تحتوي على الرموزِ والمتغيراتِ، يمكنُنا إيجادُ الكمياتِ المجهولةِ في المسائلِ الحياتيةِ المتنوعةِ. وللجبرِ أساسياتُهُ وأدواتُهُ الّتي تسهّلُ الحلولَ الرياضيةَ للمسائلِ المتنوعةِ، ومنْ هذهِ الأدواتِ الأساسيةِ: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ، وتكوينُ المعادلاتِ المختلفةِ التي تمثّلُ الصورةَ الرمزيةَ للمسألةِ الحياتيّةِ المطلوبةِ.

الوحدةُ الأولى

تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ دراسةِ هذهِ الوحدةِ أَنْ يكونَ قادرًا على:

- تحليلِ الفرقِ بينَ مربعينِ.
- تحليلِ العبارةِ التربيعيةِ.
- تحليلِ مجموعِ مكعبينِ.
- تحليلِ الفرقِ بينَ مكعبينِ.
- إيجادِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ لمقاديرَ جبريةٍ.
- إيجادِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لمقاديرَ جبريةٍ.
- تبسيطِ المقاديرِ الكسريّةِ.
- تكوينِ المعادلاتِ الكسريةِ وحلِّها.
- حلِّ مسائلَ عمليةٍ على التحليلِ إلى العواملِ والمعادلاتِ الكسريّةِ.

تهيئةٌ

١ جِدْ حاصلَ ضربِ المقاديرِ الجبريّةِ الآتيةِ:

أ) (س − ٣) (س + ٥)

ب) (٢س − ٥) (٣س + ٤)

جـ) (س − ٣) (٢س^{٢} − س + ١)

د) (س − ٢) (س^{٢} − ٢س + ٤)

هـ) (٢ع + ٥) (٢ع − ٥)

و) ٥(٣س − ١) (س^{٢} + ٢س − ٢)

٢ جِدْ مكعبَ كلٍّ منَ الأعدادِ والمقاديرِ الآتيةِ:

أ) ٤

ب) −٣

جـ) ٢س

د) ٥س ع

هـ) $\frac{\text{٣س}}{\text{٢}}$

و) $\frac{\text{−٥}}{\text{٤ص}}$ ، ص ≠ صفرًا

٣ جِدِ العامِلَ (القاسِمَ) المشتركَ الأكبرَ، والمضاعفَ المشتركَ الأصغرَ لكلٍّ ممّا يأتي:

أ) ٨، ١٦، ٦٤

ب) ٥، ٣، ٧

جـ) ٣، ١٢، ١٤

٤ عبِّرْ جبريًّا عنْ مساحةِ ملعبٍ لكرةِ القدمِ مستطيلِ الشكلِ، طولُه (٣ف + ٥) مترًا، وعرضُه (٣ف − ٢) مترًا.

٥ حُلَّ كلَّ معادلةٍ منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

أ) س + ٦ = ١٢

ب) ٢ص + ٤ = −١٤

جـ) ٣(س − ٥) = ٢

د) ٤ ع + ٧ = ٣ ع − ٤

هـ) ٣س − ٩ = ٥ − ٢س

و) $\frac{٣س}{٢}$ = ٧

الفرقُ بينَ مربعينِ وتحليلُه

النتاجات

- تتعرَّفُ الفرقَ بينَ مربعينِ وتُميّزُه.
- تحلّلُ الفرقَ بينَ مربعينِ.
- تحلُّ مسائلَ على الفرقِ بينَ مربعينِ وتحليلِه.

يملكُ أحمدُ حديقةً مربعةَ الشكلِ، طولُ ضلعِها (س) م، حفرَ فيها بركةَ سباحةٍ مربعةَ الشكلِ طولُ ضلعِها (ص) م.

١) ما مساحةُ الحديقةِ؟

٢) ما مساحةُ البركةِ؟

٣) ما مساحةُ الجزءِ المتبقي منَ الحديقةِ؟

ماذا تلاحظُ عندَ حسابِ المقاديرِ العدديّةِ الآتيةِ:

أ) $(٥)^{٢} - (٤)^{٢}$

ب) $(٥ + ٤)(٥ - ٤)$

جـ) $(٦)^{٢} - (٢)^{٢}$

د) $(٦ + ٢)(٦ - ٢)$

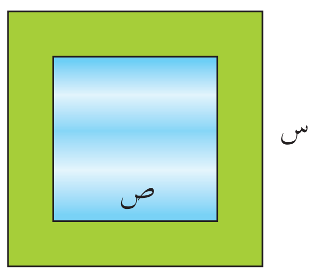
هـ) $(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٥)$

لا بدَّ أنّكَ لاحظتَ أنَّ:

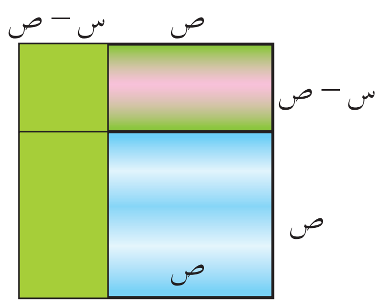
$$(\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}) = (\text{س} + \text{ص})(\text{س} - \text{ص})$$

يمكنُ استخدامُ السؤالِ الواردِ في بدايةِ الدرسِ للوصولِ إلى صحةِ العلاقةِ التي لاحظتَها.

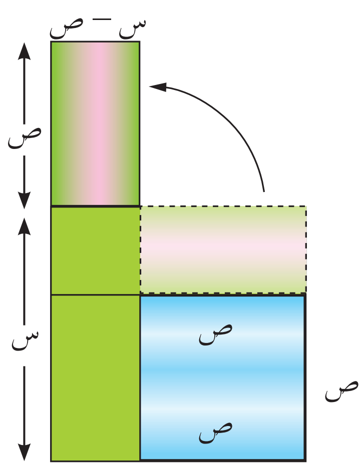
عبّرْ عنْ مساحةِ الجزءِ المتبقي منَ الحديقةِ بأكثرَ منْ طريقةٍ، مستعيناً بالأشكالِ الآتيةِ:



الشكلُ (١–١)



الشكلُ (١–٢)



الشكلُ (١–٣)

لاحظْ أنَّ المساحةَ المتبقيةَ في الأشكالِ الثلاثةِ هيَ نفسُها، وفي الشكلِ (١-١) يمكنُ التعبيرُ عنها على النحوِ الآتي:

مساحةُ الحديقةِ – مساحةِ البركةِ = س^{٢} ـ ص^{٢}.

وفي الشكلِ (١ – ٣) يمكنُ التعبيرُ عنها على النحوِ الآتي:

مساحةُ المستطيلِ الذي بُعْداه (س + ص) ، (س ـ ص) = الطولَ × العرضِ

= (س + ص) (س ـ ص)

أيْ أنَّ المساحةَ المتبقيةَ منَ الحديقةِ = س^{٢} ـ ص^{٢} = (س + ص) (س ـ ص)

ويُسمَّى المقدارُ (س^{٢} ـ ص^{٢}) **فرقًا بينَ مربعينِ**.

قاعدةٌ (١)

يُحلِّلُ الفرقُ بينَ مربعينِ س^{٢} ـ ص^{٢} على الصورةِ:

س^{٢} ـ ص^{٢} = (س + ص) (س ـ ص)

أيْ أنَّ:

الفرقَ بينَ مربعي مقدارينِ = (المقدارَ الأوّلَ + المقدارِ الثاني) × (المقدارِ الأوّلِ – المقدارِ الثاني).

مثالٌ (١-١)

حلّلِ المقاديرَ الجبريّةَ الآتيةَ:

١) س^{٢} ـ ٢٥   ٢) ١٦أ^{٢} ـ ع^{٢}

الحلُّ

١) المقدارُ س^{٢} – ٢٥ = (س)^{٢} – (٥)^{٢} فرقٌ بينَ مربعينِ

= (س + ٥) (س – ٥) تحليلٌ

٢) المقدارُ ١٦أ^{٢} – ع^{٢} = (٤أ)^{٢} – (ع)^{٢} فرقٌ بينَ مربعينِ

= (٤أ + ع) (٤أ – ع) تحليلٌ

تدريبٌ (١–١)

حلِّلِ المقاديرَ الجبريّةَ الآتيةَ:

أ) $٤٩ - \frac{س^٢}{٤}$ ب) $ص^٢ ع^٢ - ١$

مثالٌ (١–٢)

حلّلِ المقاديرَ الجبريّةَ الآتيةَ:

١) $٥س^٢ - ٢٠ص^٢$ ٢) $٢أ^٣ س^٢ - ٥٠أ$ ٣) $(ص + ٢)^٢ - ١$

الحلُّ

١) المقدارُ $٥س^٢ - ٢٠ص^٢ = ٥(س^٢ - ٤ص^٢)$ إخراجُ ٥ عاملًا مشتركًا

$= ٥((س)^٢ - (٢ص)^٢)$ يمثلُ فرقًا بينَ مربعينِ

$٥س^٢ - ٢٠ص^٢ = ٥(س + ٢ص) (س - ٢ص)$ تحليلٌ

٢) المقدارُ $٢أ^٣س^٢ - ٥٠أ = ٢أ (أ^٢ س^٢ - ٢٥)$ إخراجُ (٢أ) عاملًا مشتركًا

$= ٢أ((أس)^٢ - (٥)^٢)$ يمثلُ فرقًا بينَ مربعينِ

$= ٢أ(أس + ٥) (أس - ٥)$ تحليلٌ

٣) $(ص + ٢)^٢ - ١ = (ص + ٢)^٢ - (١)^٢$ فرقٌ بينَ مربعينِ

$= ((ص + ٢) + ١) ((ص + ٢) - ١)$ تحليلٌ

$= (ص + ٣) (ص + ١)$ تبسيطٌ

تدريبٌ (١–٢)

حلِّلِ المقاديرَ الآتيةَ:

أ) $٣س^٣ - ١٢س ص^٢$ ب) $٦٤ - (٢س - ٥)^٢$

تدريبٌ (١–٣)

جِدْ قيمةَ المقدارِ العدديِّ الآتي بطريقتينِ مختلفتينِ: $(٥,٨)^٢ - (٥,١١)^٢$

تمارينُ ومسائلُ

١) حَلِّلِ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ إلى العواملِ:

أ) ١٢١ − ٤س^{٢} ص^{٢}

ب) ٢٨ س^{٢} − ٧

جـ) ٥أب^{٣} − ٢٠أ^{٣}ب

د) (٣ع − ٢)^{٢} − ٤

هـ) −٤٩أ^{٢} + ٢٥س^{٢}

و) (م − ل)^{٢} − (م + ل)^{٢}

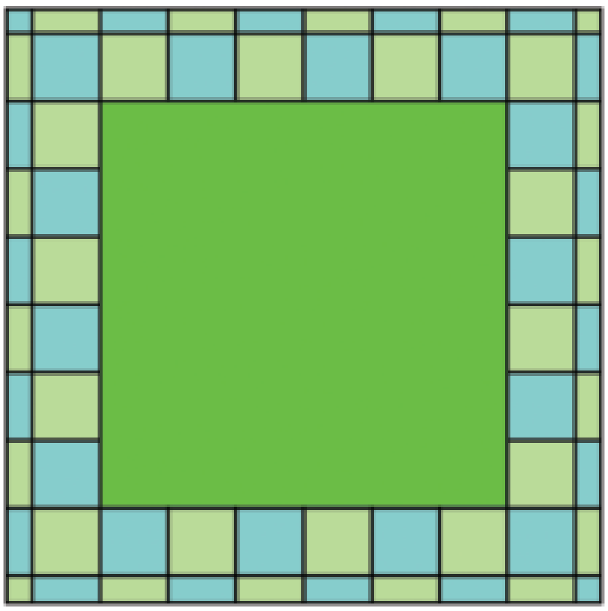
٢) جِدِ القيمةَ العدديةَ للمقدارِ ((٤٩٧)^{٢} − (٥٠٠)^{٢}) اعتماداً على تحليلِ الفرقِ بينَ مربعينِ.

٣) عبّرْ عنِ المقدارِ (١٠٢ × ٩٨) بصورةِ فرقٍ بينَ مربعينِ، ثُمَّ جِدْ قيمتَهُ العدديّةَ.

٤) حديقةٌ على شكلِ مربعٍ طولُ ضلعهِ (١٠)م، نريدُ إحاطتَها بممرٍّ عرضُهُ (س)م، وتبليطَهُ:

أ) اكتبْ مساحةَ الممرِّ بدلالةِ س.

ب) احسبْ تكلفةَ تبليطِ الممرِّ عندما يكونُ عرضُهُ س = (١,٥)م، علمًا بأنَّ تكلفةَ تبليطِ المترِ المربعِ الواحدِ (٨) دنانيرَ.

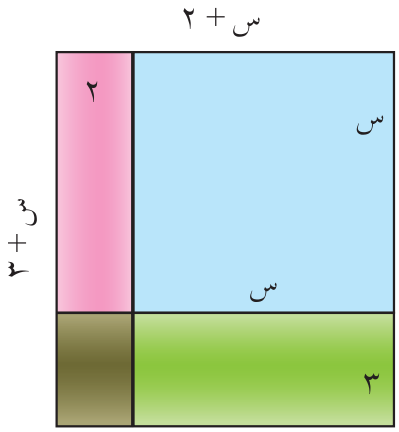


١ – ٢ تحليلُ العبارةِ التربيعيةِ

النتاجاتُ

- تتعرّفُ العبارةَ التربيعيةَ وتُحللُها.
- تحلُّ مسائلَ على العبارةِ التربيعيةِ.

يمثِّلُ الشكلُ المجاورُ قطعةَ كرتونٍ مستطيلةَ الشكلِ، طولُها (س + ٣) سم، وعرضُها (س + ٢) سم، قُسِّمَتْ إلى مربعٍ طولُ ضلعِهُ (س) سم، وثلاثةِ مستطيلاتٍ.



الشكلُ (١–٤)

١) ما أبعادُ المستطيلاتِ الثلاثةِ؟

٢) جدْ مساحةَ قطعةِ الكرتونِ بطريقتينِ مختلفتينِ.

مساحةُ قطعةِ الكرتونِ = مجموعَ مساحاتِ الأشكالِ المكوِّنةِ لهُ.

(س + ٣) × (س + ٢) = مساحةَ المربعِ + مجموعِ مساحاتِ المستطيلاتِ الثلاثةِ

(س + ٣) × (س + ٢) = (س × س) + (٣ × س) + (٢ × س) + (٣ × ٢)

= س^{٢} + ٣س + ٢س + ٦

= س^{٢} + ٥س + ٦

لاحظْ أنَّهُ أمكنَ كتابةُالمقدارِ (س^{٢} + ٥س + ٦) على صورةِ حاصلِ ضربِ المقدارينِ (س + ٣) ، (س + ٢)

يُسمَّى المقدارُ الجبريُّ (أس^{٢} + ب س + جـ) حيثُ أ ، ب ، جـ أعدادٌ حقيقيةٌ، أ ≠ صفرًا، **عبارةً تربيعةً**، ويكونُ

معاملُ س^{٢} = أ

معاملُ س = ب

والحدُّ الثابتُ (الحدُّ المطلقُ) = جـ

مثالٌ (١-٣)

أيُّ العباراتِ الآتيةِ تمثلُ عبارةً تربيعيةً؟

١) ٥س^{٢} + ٢س − ٧ ‏ ‏ ‏ ‏ ٢) ٢س − ٥

٣) ٤س^{٢} − ٣س − س^{٣} ‏ ‏ ‏ ‏ ٤) س^{٢} − ٤ ‏ ‏ ‏ ‏ ٥) س^{٢} + ٩

الحلُّ

١) ٥س^{٢} + ٢س − ٧ : عبارةٌ تربيعيةٌ

٢) ٢س − ٥ : ليستْ عبارةً تربيعيةً

٣) ٤س^{٢} − ٣س − س^{٣} : ليستْ عبارةً تربيعيةً

٤) س^{٢} − ٤ : عبارةٌ تربيعيةٌ فيها قيمة ب = ٠

٥) س^{٢} + ٩ : عبارةٌ تربيعيةٌ فيها قيمة ب = ٠

تدريبٌ (١-٤)

أيُّ العباراتِ الآتيةِ تمثلُ عبارةً تربيعيةً؟

أ) س^{٢} ‏ ‏ ‏ ‏ ب) ٣ − ٢س ‏ ‏ ‏ ‏ جـ) ٣ − ٥س^{٢}

د) س^{٤} − ٣س^{٣} + ٦ ‏ ‏ ‏ ‏ هـ) ٢س^{٣} − ٤س^{٢} − ٢س^{٣} + ٣

تعريفٌ (١)

يقصدُ بتحليلِ العبارةِ التربيعيةِ (أس^{٢} + ب س + جـ) : كتابةُ العبارةِ التربيعيةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ مقدارينِ جبريّينِ خطيّينِ (م س + ل) (ن س + ك) إنْ أمكنَ ذلكَ (حيث أ ، ب ، جـ ، م ، ل ، ن ، ك أعدادٌ حقيقيةٌ، أ ≠ صفرًا ، م ≠ صفرًا ، ن ≠ صفرًا).

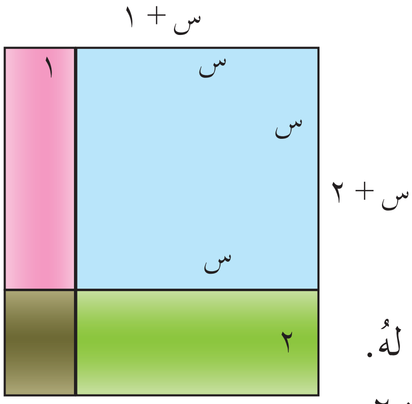
ويُسمّى كلٌّ منَ المقدارينِ (م س + ل)، (ن س + ك) عاملًا مِنْ عواملِ العبارةِ التربيعيةِ (أس^{٢} + ب س + جـ)

كما يسمّى كلُّ مقدارٍ على الصورةِ (م س + ل) حيث م ≠ صفرًا، عاملًا أوليًّا.

يمكنُ كتابةُ العبارةِ التربيعية (س^{٢} + ٥س + ٦) على الصورة (س + ٣) × (س + ٢) ويُسمّى كلٌّ منَ المقدارينِ (س + ٣) ، (س + ٢) عاملًا أوليًا للعبارةِ التربيعية (س^{٢} + ٥س + ٦).

مثالٌ (١–٤)

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، حلّلِ العبارةَ التربيعية
س^{٢} + ٣س + ٢ إلى عواملِها الأوليّة.



الشكلُ (١–٥)

الحلُّ

مساحةُ المستطيلِ الكليّةُ = مجموعَ مساحاتِ الأشكالِ المكوّنةِ لهُ.

(س + ٢) × (س + ١) = س × س + ١ × س + ٢ × س + ١ × ٢

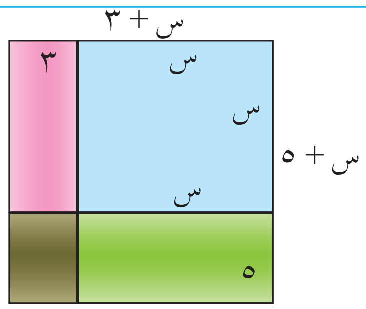
(س + ٢) (س + ١) = س^{٢} + س + ٢س + ٢

= س^{٢} + ٣س + ٢

إذنْ: س^{٢} + ٣س + ٢ = (س + ٢) (س + ١)

تدريبٌ ١–٥

اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، حلّلِ العبارةَ التربيعيةَ
س^{٢} + ٨س + ١٥ إلى عواملِها الأوليّة.



الشكلُ (١–٦)

لاحِظْ أنَّ حاصلَ الضربِ

(س + م) × (س + ن) = س × س + س × ن + م × س + م × ن ، حيثُ م ، ن أعدادٌ حقيقيةٌ.

= س^{٢} + ن س + م س + م ن

= س^{٢} + (م + ن) س + م ن

والناتجُ يمثِّلُ عبارةً تربيعيةً فيها: معاملُ س^{٢} = ١

معاملُ س = م + ن

الحدُّ المطلقُ = م ن

وبذلكَ تُحلَّلُ العبارةُ التربيعيةُ (س^{٢} + (م + ن) س + م ن) = (س + م) (س + ن).

مثالٌ (١–٥)

حَلِّلِ العباراتِ الآتيةَ إلى عوامِلها الأوليَّةِ:

١) س^{٢} + ٥س + ٤ ٢) س^{٢} – ٢س – ١٥

الحلُّ

١) س^{٢} + ٥س + ٤

أ = ١ ، ب = ٥ ، جـ = ٤

نبحثُ عنِ العددينِ الصحيحينِ اللذينِ يكونُ ناتجُ ضربِهما (أ × جـ = ١ × ٤ = ٤)،

وناتجُ جمعِهما يساوي (ب = ٥)

فنجدُ أنَّ العددينِ هما ٤ ، ١

فيكونُ تحليلُ العبارةِ س^{٢} + ٥س + ٤ = (س + العددِ الأوّلِ) (س + العددِ الثاني)

= (س + ١) (س + ٤)

٢) س^{٢} – ٢س – ١٥

أ = ١ ، ب = –٢ ، جـ = –١٥

نبحثُ عنِ العددينِ الصحيحينِ اللذينِ يكونُ ناتجُ ضربِهما (أ × جـ = ١ × –١٥ = –١٥)،

وناتجُ جمعِهما يساوي (ب = –٢)

فنجدُ أنَّ العددينِ هما –٥، ٣

فيكونُ تحليلُ العبارةِ س^{٢} – ٢س – ١٥ = (س + العددِ الأوّلِ) (س + العددِ الثاني)

= (س + (–٥)) (س + ٣)

= (س – ٥) (س + ٣)

مثالٌ (١–٦)

حلّلِ العبارةَ التربيعيةَ (٢س^{٢} + س – ٦) إلى عوامِلها الأوليّةِ.

الحلُّ

أ = ٢ ، ب = ١ ، جـ = –٦

لاحِظْ أنَّ: أ ≠ ١ نَستخدمُ الطريقةَ الآتيةَ:

نبحثُ عنِ العددينِ الصحيحينِ اللذينِ يكونُ ناتجُ ضربِهما (أ × جـ = ٢ × −٦ = −١٢)،
وناتجُ جمعِهما يساوي (ب = ١)
فنجدُ أنَّ العددينِ هما −٣، ٤
نكتبُ العبارةَ ٢س^{٢} + س − ٦ = ٢س^{٢} + (العددِ الأوّلِ + العددِ الثاني) س − ٦
= ٢س^{٢} + (−٣ + ٤) س − ٦
= ٢س^{٢} − ٣س + ٤س − ٦
= (٢س^{٢} − ٣س) + (٤س − ٦) تجميعُ الحدودِ

فتصبحُ العبارةُ:

٢س^{٢} + س − ٦ = س(٢س − ٣) + ٤س − ٦ إخراجُ (س) عاملًا مشتركًا
= س(٢س − ٣) + ٢(٢س − ٣) إخراجُ (٢) عاملاً مشتركًا
= (٢س − ٣) (س + ٢) إخراجُ (٢س − ٣) عاملًا مشتركًا

ويمكنُ تحليلُ العبارةِ التربيعيةِ بالطريقةِ الآتيةِ:

−٣ × س
٢س^{٢} + س − ٦ = (٢س − ٣) (س + ٢)
٢س × ٢

حاصلُ ضربِ الطرفينِ في ناتجِ التحليلِ + حاصلِ ضربِ الوسطينِ في ناتجِ التحليلِ
= الحدَ الأوسطَ في العبارةِ التربيعيةِ أيْ: ٤س + −٣س = س

تدريبٌ ١−٦

حلِّلِ العباراتِ الآتيةَ إلى عواملِها الأوليّةِ:

أ) ٢س^{٢} + ٣س + ١ ب) ٣س^{٢} + ٢س − ٥

جـ) ٣س^{٢} − ٥س د) (س − ٢)^{٢} + ٥(س − ٢) + ٦

تمارينُ ومسائلُ

١) حلِّلِ العباراتِ الآتيةَ إلى عوامِلها الأوّليّةِ:

أ) $س^{٢} + ٩س + ١٤$ ب) $ص^{٢} - ٧ص + ١٠$

جـ) $أ^{٢} - ٣أ - ١٨$ د) $ل^{٢} + ٥ل - ١٤$

هـ) $٢س^{٢} + ١٣س - ٧$ و) $٦م^{٢} - ٥م + ١$

٢) لوحةُ إعلاناتٍ مستطيلةُ الشّكلِ مساحتُها ($ن^{٢} + ٤ن - ١٢$) وحدةً مربعةً، بعداها عواملُ العبارةِ التربيعيّةِ $ن^{٢} + ٤ن - ١٢$، عبِّرْ عَنْ بُعدَي اللّوحةِ بدلالةِ (ن).

٣) سجادةٌ مستطيلةُ الشكلِ مساحتُها ($٦س^{٢} + س - ٢$) مترًا مربّعًا، إذا كانَ بعداها هما عواملَ العبارةِ التربيعيّةِ $٦س^{٢} + س - ٢$.

أ) عَبِّرْ عَنْ بُعدَيها بدلالةِ س.

ب) احسبْ بعديها عندما تكونُ قيمةُ س = ٢ مترًا.

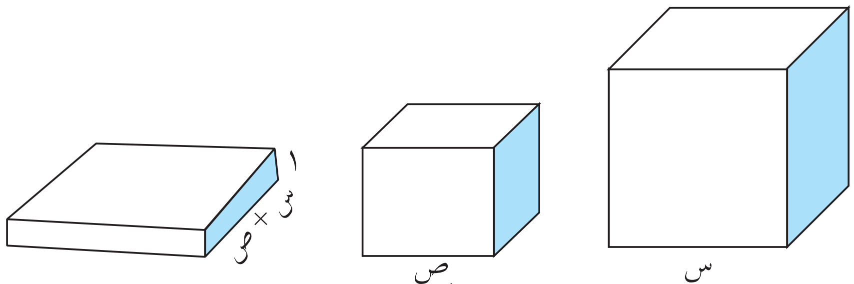
١ – ٣ مجموعُ مكعبينِ وتحليلُه

النتاجاتُ

- تتعرّفُ مجموعَ مكعبينِ وتُحللُه.
- تحلُّ مسائلَ على مجموعِ مكعبينِ.

خزانا ماءٍ مكعبا الشكلِ مملوءانِ بالماءِ، طولُ حرفِ الأوّلِ (س) مترًا، وطولُ حرفِ الثاني (ص) مترًا، يرادُ تفريغُ الماءِ منهما في خزّانٍ ثالثٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ ارتفاعُهُ (١) مترًا، وأحدُ بعدي قاعدتِهِ (س + ص) مترًا.

هلْ تستطيعُ إيجادَ البعدِ الثالثِ للخزانِ الثالثِ حتى يملأَه الماءُ الموجودُ في الخزانين تمامًا.



الشكلُ (١–٧)

مثالٌ (١–٧)

١) جِدْ مكعّبَ كلٍّ مِمَا يأتي:

-٤ ، $\frac{٥\text{س}}{\text{ص}}$ (ص $\neq ٠$)

٢) جد الجذر التكعيبي لكلٍّ مِمَا يأتي:

١٢٥ ، $-٨\,\text{س}^٣$

الحلُّ

١) $(-٤)^٣ = -٦٤$

$$\left(\frac{٥\text{س}}{\text{ص}}\right)^٣ = \frac{(٥)^٣\,\text{س}^٣}{\text{ص}^٣} = \frac{١٢٥\,\text{س}^٣}{\text{ص}^٣}$$

٢) $\sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٣]{٥ \times ٥ \times ٥} = ٥$

$$\sqrt[٣]{-٨\text{س}^٣} = \sqrt[٣]{-٨} \times \sqrt[٣]{\text{س}^٣} = -٢\text{س}$$

نشاطٌ (١-١)

١) جِدْ قيمةَ كلٍّ منَ المقاديرِ العدديةِ الآتيةِ ثمَّ قارنْ بينَهما:

أ) $(٢)^٣ + (٣)^٣ = ...$

$(٢ + ٣)(٢^٢ - ٢ \times ٣ + ٣^٢) = ...$

ب) $(٥)^٣ + (٤)^٣ = ...$

$(٥ + ٤) \times ((٥)^٢ - ٥ \times ٤ + (٤)^٢) = ...$

ماذا تلاحظُ؟

٢) قارنْ بينَ المقدارينِ الجبريينِ الآتيينِ:

أ) $(س + ص) \times (س^٢ - س \times ص + ص^٢)$ جِدْ ناتجَ عمليةِ الضّربِ

ب) $س^٣ + ص^٣$

ماذا تلاحظُ ؟

يسمى المقدارُ على الصورةِ $(س^٣ + ص^٣)$ **مجموعَ مكعبينِ.**

قاعدةٌ (٢)

يُحلّلُ مجموعُ المكعبينِ $س^٣ + ص^٣$ على الصورةِ:

$$س^٣ + ص^٣ = (س + ص)(س^٢ - س ص + ص^٢)$$

أيْ أنَّ:

مجموعَ مكعبي مقدارينِ = (المقدارَ الأوّلَ + المقدارِ الثاني) × (مربعِ المقدارِ الأوّلِ - المقدارِ الأوّلِ × المقدارِ الثاني + مربعِ المقدارِ الثاني).

مثالٌ (١-٨)

حلّلِ المقدارَ الجبريَّ $(أ^٣ + ٨ب^٣)$ إلى عواملِهِ.

الحلُّ

$أ^٣ + ٨ب^٣ = (أ)^٣ + (٢ب)^٣$ مجموعُ مكعبي المقدارينِ أ ، ٢ب

$= (أ + ٢ب)(أ^٢ - أ \times ٢ب + (٢ب)^٢)$ تحليلٌ

$= (أ + ٢ب)(أ^٢ - ٢أب + ٤ب^٢)$ تبسيطٌ

مثالٌ (١–٩)

حلِّلِ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ إلى عواملِها:

١) $١٢٥س^{٣} + \frac{٨}{٢٧}$ ٢) $٥٤ص^{٣} + ٢س^{٣}$ ٣) $٢٤م^{٧} + ٨١م ل^{٣}$

الحلُّ

١) $١٢٥س^{٣} + \frac{٨}{٢٧} = (٥س)^{٣} + \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣}$ مجموعُ مكعبين

$= (٥س + \frac{٢}{٣})\left((٥س)^{٢} - ٥س \times \frac{٢}{٣} + (\frac{٢}{٣})^{٢}\right)$ تحليلٌ

$= (٥س + \frac{٢}{٣})(٢٥س^{٢} - \frac{١٠}{٣}س + \frac{٤}{٩})$ تبسيطٌ

٢) $٥٤ص^{٣} + ٢س^{٣} = ٢(٢٧ص^{٣} + س^{٣})$ إخراجُ ٢ عاملًا مشتركًا

$= ٢((٣ص)^{٣} + (س)^{٣})$ مجموعُ مكعبين

$= ٢(٣ص + س)((٣ص)^{٢} - ٣ص \times س + (س)^{٢})$ تحليلٌ

$= ٢(٣ص + س)(٩ص^{٢} - ٣ص س + س^{٢})$ تبسيطٌ

٣) $٢٤م^{٧} + ٨١م ل^{٣} = ٣م(٨م^{٦} + ٢٧ل^{٣})$ إخراجُ (٣م) عاملًا مشتركًا

$= ٣م((٢م^{٢})^{٣} + (٣ل)^{٣})$ مجموعُ مكعبين

$= ٣م(٢م^{٢} + ٣ل)((٢م^{٢})^{٢} - ٢م^{٢} \times ٣ل + (٣ل)^{٢})$ تحليلٌ

$= ٣م(٢م^{٢} + ٣ل)(٤م^{٤} - ٦م^{٢}ل + ٩ل^{٢})$ تبسيطٌ

تدريبٌ ١–٧

حلِّلِ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ إلى عواملِها:

أ) $جـ^{٣} + ١$ ب) $\frac{٢س^{٣}}{٢٧} + ٢ص^{٣}$ جـ) $٤٠أ^{٤} + \frac{٥}{٨}أس^{٣}$

د) $٣٤٣س^{٣} + ٠,٠٠٨$ هـ) $\frac{٢٧أ^{٣}}{١٦} + \frac{ب^{٣}}{٢}$

تدريبٌ ١–٨

حلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) اكتبْ كلًّا مما يأتي على صورةِ مجموعِ مكعبين:

أ) $١ + ٨س^٣$

ب) $\frac{١}{١٢٥س^٣} + ٠٫٠٢٧$ ، $س \neq$ صفرًا

٢) حلِّلِ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ إلى عواملِها:

أ) $ع^٣ + ٢١٦م^٣$

ب) $\frac{س^٣}{١٢٥} + \frac{٨ص^٣}{٢٧}$

جـ) $٢٥٠أ^٣ + ٥٤ب^٣$

د) $١٦ص^٣ + ٢س^٣$

هـ) $(س - ١)^٣ + (ص + ١)^٣$

و) $\frac{س^٦}{٤} + \frac{٢٧ص^٣}{٥٠٠}$

ز) $م^٩ + ١$

ح) $٦أ^٣س^٣ + ٤٨س^٣$

ط) $(٥س - ١)^٤ + (٥س - ١)$

٣) كرتانِ مِنَ البلاستيكِ طولُ نصفِ قطرِ الأولى (س) سم وطولُ نصفِ قطرِ الثانيةِ (أ) سم، صُهرتا معًا وشُكِّلتا على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ ارتفاعُه ($\frac{٤\pi}{٣}$) سم، وأحدُ بُعدَي قاعدتِه (س + أ) سم، جِدِ البُعدَ الآخرَ للقاعدةِ.

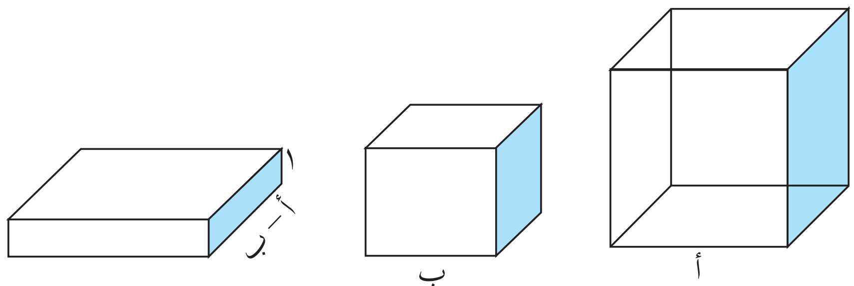
(إرشادٌ: حجمُ الكرةِ = $\frac{٤\pi}{٣}$ نق^٣)

الفرقُ بينَ مكعبينِ وتحليلُه

النتاجاتُ

- تتعرّفُ الفرقَ بينَ مكعبينِ وتُحلّلُه.
- تحلُّ مسائلَ على الفرقِ بينَ مكعبينِ.

خزانُ ماءٍ كبيرٌ طولُ حرفِه (أ) مترًا، مملوءٌ بالماءِ، نريدُ تفريغَهُ بالكاملِ في خزانينِ: الأوّلُ مكعبُ الشكلِ، طولُ حرفِهِ (ب) مترًا والثاني على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ ارتفاعُهُ مترٌ واحدٌ، وأحدُ بُعدَي قاعدتِهِ (أ – ب) مترًا، بحيثُ يملأُ الماءُ الموجودُ في الخزانِ الكبيرِ الخزانينِ تمامًا.



الشكلُ (١–٨).

١) عبّرْ جبريًّا عنْ حجمِ الماءِ المتبقي في الخزانِ الكبيرِ بعدَ تعبئةِ الخزانِ الأوّلِ.

٢) عبّرْ جبريًّا عنِ البعدِ الآخرِ لقاعدةِ الخزانِ الثاني.

جِدْ قيمةَ المقاديرِ العدديّةِ الآتيةِ ثم قارنْ بينهما:

أ) $(٥)^٣ - (٢)^٣ = ...$

$(٥)^٣ + (-٢)^٣ = ...$

ب) $(٤)^٣ - (٢)^٣ = ...$

$(٤)^٣ + (-٢)^٣ = ...$

لا بدَّ أنّكَ لاحظتَ أنَّ $س^٣ - ص^٣ = س^٣ + (-ص)^٣$

يُسمَّى المقدارُ ($س^٣ - ص^٣$) **فرقًا بينَ مكعبينِ**، ويمكنُ كتابتُهُ على صورةِ مجموعِ مكعبينِ ($س^٣ + (-ص)^٣$)

وبذلكَ يكونُ: $س^٣ - ص^٣ = س^٣ + (-ص)^٣$ مجموعُ مكعبينِ

$= (س + (-ص))(س^٢ - س \times (-ص) + (-ص)^٢)$ تحليلٌ

$= (س - ص)(س^٢ + س ص + ص^٢)$ تبسيطٌ

قاعدةٌ (٣)

يُحلَّلُ الفرقُ بينَ المكعبينِ $س^{٣} - ص^{٣}$ وفقَ القاعدةِ الآتيةِ:

$$س^{٣} - ص^{٣} = (س - ص)\,(س^{٢} + س\,ص + ص^{٢})$$

أيْ أنَّ:

الفرقَ بينَ مكعبي مقدارينِ = (المقدارَ الأوّلَ − المقدارِ الثاني) × (مربعِ المقدارِ الأوّلِ + المقدارِ الأوّلِ × المقدارِ الثاني + مربعِ المقدارِ الثاني).

مثالٌ (١−١٠)

حَلِّلِ المقاديرَ الجبريّةَ الآتيةَ إلى عوامِلها:

١) $هـ^{٣} - ٢٧س^{٣}$

٢) $٨س^{٣} - \frac{١٢٥أ^{٣}}{ب^{٣}}$ ، ب ≠ صفرًا

٣) $٢٤م^{٤} - \frac{٣}{٦٤}م\,س^{٣}$

٤) $٨ - ٢٧س^{٦}$

٥) $(٢س + ١)^{٤} - ٢س - ١$

الحلُّ

١) $هـ^{٣} - ٢٧س^{٣} = (هـ)^{٣} - (٣س)^{٣}$ فرقٌ بينَ مكعبينِ

$= (هـ - ٣س)\,((هـ)^{٢} + هـ \times ٣س + (٣س)^{٢})$ تحليلٌ

$= (هـ - ٣س)\,(هـ^{٢} + ٣س\,هـ + ٩س^{٢})$ تبسيطٌ

٢) $٨س^{٣} - \frac{١٢٥أ^{٣}}{ب^{٣}} = (٢س)^{٣} - \left(\frac{٥أ}{ب}\right)^{٣}$

$= \left(٢س - \frac{٥أ}{ب}\right)\left((٢س)^{٢} + (٢س)\left(\frac{٥أ}{ب}\right) + \left(\frac{٥أ}{ب}\right)^{٢}\right)$

$= \left(٢س - \frac{٥أ}{ب}\right)\left(٤س^{٢} + \frac{١٠س\,أ}{ب} + \frac{٢٥أ^{٢}}{ب^{٢}}\right)$

٣) $٢٤م^{٤} - \frac{٣}{٦٤}م\,س^{٣} = ٣م\left(٨م^{٣} - \frac{١}{٦٤}س^{٣}\right)$ إخراجُ (٣م) عاملًا مشتركًا

$= ٣م\left((٢م)^{٣} - \left(\frac{١}{٤}س\right)^{٣}\right)$ فرقٌ بينَ مكعبينِ

$$= \text{٣م}\left(\text{٢م} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}\right)\left((\text{٢م})^{\text{٢}} + (\text{٢م})\left(\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}\right) + \left(\frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}\right)^{\text{٢}}\right)$$

$$= \text{٣م}\left(\text{٢م} - \frac{\text{١}}{\text{٤}}\text{س}\right)\left(\text{٤م}^{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{م س} + \frac{\text{١}}{\text{١٦}}\text{س}^{\text{٢}}\right)$$

٤) $\text{٨} - \text{٢٧س}^{\text{٦}} = (\text{٢})^{\text{٣}} - (\text{٣س}^{\text{٢}})^{\text{٣}}$

$= (\text{٢} - \text{٣س}^{\text{٢}})\left((\text{٢})^{\text{٢}} + (\text{٢})(\text{٣س}^{\text{٢}}) + (\text{٣س}^{\text{٢}})^{\text{٢}}\right)$

$= (\text{٢} - \text{٣س}^{\text{٢}})(\text{٤} + \text{٦س}^{\text{٢}} + \text{٩س}^{\text{٤}})$

٥) $(\text{٢س} + \text{١})^{\text{٤}} - \text{٢س} - \text{١} = (\text{٢س} + \text{١})^{\text{٤}} - \text{١}(\text{٢س} + \text{١})$ إخراجُ (−١) عاملًا مشتركًا

$= (\text{٢س} + \text{١})\left((\text{٢س} + \text{١})^{\text{٣}} - \text{١}\right)$ إخراج (٢س+١) عاملًا مشتركًا

$= (\text{٢س} + \text{١})\left((\text{٢س} + \text{١})^{\text{٣}} - \text{١}^{\text{٣}}\right)$ فرقٌ بينَ مكعبينِ

$= (\text{٢س}+\text{١})\left((\text{٢س}+\text{١})-(\text{١})\right)\left((\text{٢س}+\text{١})^{\text{٢}}+(\text{٢س}+\text{١})(\text{١})+(\text{١})^{\text{٢}}\right)$

$= (\text{٢س} + \text{١})(\text{٢س})\left((\text{٢س} + \text{١})^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{١} + \text{١}\right)$

$= (\text{٢س} + \text{١})(\text{٢س})\left((\text{٢س} + \text{١})^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٢}\right)$

تدريبٌ ١−٩

حلّلِ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ إلى العواملِ:

أ) $\text{٦٤س}^{\text{٣}} - \text{١}$

ب) $\text{٣٢} - \text{٤س}^{\text{٣}}\text{أ}^{\text{٣}}$

جـ) $\frac{\text{٢١٦}}{\text{٥٤}}\text{س}^{\text{٣}} - \frac{\text{ص}^{\text{٦}}}{\text{٢}}$

د) $\text{١} + \text{س} - (\text{١} + \text{س})^{\text{٤}}$

تدريبٌ ١−١٠

حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) حلّلِ المقاديرَ الآتيةَ إلى العواملِ:

أ) $أ^٣ - ١٢٥$

ب) $\frac{٧٢٩ س}{١٢٥} - س^٤ ص^٣$

جـ) $٠,٠٠٨ س^٣ - ٨ص^٣$

د) $٥ - ٥(س + ٢)^٣$

هـ) $٢ص - \frac{٢٥٠ص^٤}{ب^٣}$ ، $ب \neq$ صفرًا

و) $٥(٣س - ٢)^٤ - ١٥س + ١٠$

ز) $٥١٢ص^٣ - ٠,١٢٥$

٢) عُبِّئتْ ٢٧ عبوةً صغيرةً مكعبةُ الشكلِ طولُ حرفِ كلٍّ منها (ن) مترًا منْ خزانٍ مكعّبِ الشكلِ مملوءٍ بالزيتِ طولُ حرفِهِ (ل) مترًا، وبقيَ في الخزانِ كميةٌ منَ الزيتِ، ما حجمُ تلكَ الكميّةِ؟

١ – ٥ العاملُ المشتركُ الأكبرُ

النتاجاتُ

- تجدُ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لمقاديرَ جبريةٍ.
- تحلُّ مسائلَ على العاملِ المشتركِ الأكبرِ.

اشترى ريّانُ عددًا منْ قطعِ الحلوى فدفعَ (س^{٢} + ٩س + ١٤) قرشًا ثمنًا لها، واشترى يمانٌ عددًا آخرَ منَ النوعِ نفسِه فدفعَ (س^{٢} + ٢س – ٣٥) قرشًا ثمنًا لها. ما ثمنُ قطعةِ الحلوى الّتي اشتراها ريّانُ ويمانٌ منْ هذا النوعِ بدلالةِ (س)؟

ثمنُ قطعِ الحلوى = ثمنَ القطعةِ الواحدةِ × عددِ القطعِ.

نحاولُ كتابةَ ثمنِ قطعِ الحلوى التي اشتراها كلٌّ منهما على صورةِ حاصلِ ضربِ مقدارينِ جبريينِ، وذلكَ بتحليلِ كلِّ مقدارٍ جبريٍّ إلى العواملِ الأوّليّةِ.

ما دفعهُ ريّانُ = ثمنَ القطعةِ الواحدةِ × عددِ القطعِ.

س^{٢} + ٩س + ١٤ = (س + ٧) (س + ٢) قرشًا.

ما دفعهُ يمانٌ = ثمنَ القطعةِ الواحدةِ × عددِ القطعِ

س^{٢} + ٢س – ٣٥ = (س + ٧) (س – ٥) قرشًا.

نلاحظُ أنَّ (س + ٧) هو عاملٌ أوليٌّ لكلٍّ منَ المقدارينِ الجبريينِ

(س^{٢} + ٩س + ١٤) ، (س^{٢} + ٢س – ٣٥) ، لذلكَ فهوَ **عاملٌ مشتركٌ** بينَ المقدارينِ الجبريينِ، وهوَ هنا يمثّلُ ثمنَ قطعةِ الحلوى الواحدةِ. لأنَّ العاملَ الأوليَّ الوحيدَ المشتركَ بينَ المقدارينِ الجبريينِ (س^{٢} + ٩س + ١٤) ، (س^{٢} + ٢س – ٣٥) هو (س + ٧) فإنّنا نقولُ أنَّ **العاملَ المشتركَ الأكبرَ** للمقدارينِ الجبريينِ هوَ (س + ٧).

تعريفٌ (٢)

العاملُ المشتركُ الأكبرُ لعددٍ منَ المقاديرِ الجبريةِ هوَ حاصلُ ضربِ العواملِ الأوليّةِ المشتركةِ لها.

ويُرمزُ لهُ بالرمزِ ع. م. أ.

لإيجادِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ (ع. م. أ) للمقاديرِ الجبريّةِ، نقومُ بالخطواتِ الآتيةِ:

١) نحلِّلُ كلَّ مقدارٍ إلى العواملِ الأوليّةِ.

٢) نحددُ العواملَ الأوليَّةَ المشتركةَ لها.

٣) العاملُ المشتركُ الأكبرُ = ع.م.أ = حاصلَ ضربِ العواملِ الأوليةِ المشتركةِ.

• تذكَّرْ

لإيجادِ ع.م.أ للعددينِ ٤٨، ٦٠ نحلِّلُ كلًّا منَ العددينِ إلى العواملِ الأوليةِ كما يأتي:

$٤٨ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣$

$٦٠ = ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٥$

ع.م.أ $= ٢ \times ٢ \times ٣ = ١٢$

مثالٌ (١-١١)

جِدْ ع.م.أ لكلٍّ ممّا يأتي:

١) $س^٢ - ٤$ ، $س^٢ + ٥س + ٦$

٢) $س^٣ + ١٢٥$ ، $س^٢ + ٢س - ١٥$ ، $س^٢ + ٥س$

٣) $٥ص + ٥$ ، $ص^٢ - ١$ ، $ص^٣ - ١$

٤) $٦م (س + ٢)^٢$ ، $١٤م س + ٢٨م$ ، $٦م س + ١٢م$

الحلُّ

١) نحلِّلُ كلَّ مقدارٍ إلى العواملِ الأوليةِ.

$س^٢ - ٤ = (س + ٢)(س - ٢)$ تحليلُ فرقٍ بينَ مربعينِ

$س^٢ + ٥س + ٦ = (س + ٢)(س + ٣)$ تحليلُ عبارةٍ تربيعيةٍ

ع.م.أ $= (س + ٢)$

٢) نحلّلُ كلَّ مقدارٍ إلى العواملِ الأوليّةِ.

س^{٣} + ١٢٥ = (س + ٥) (س^{٢} − ٥س + ٢٥) تحليلُ مجموعِ مكعبينِ

س^{٢} + ٢س − ١٥ = (س + ٥) (س − ٣) تحليلُ عبارةٍ تربيعية

س^{٢} + ٥س = س(س + ٥) إخراجُ س عاملًا مشتركًا

ع.م.أ = (س + ٥)

٣) نحلِّلُ كلَّ مقدارٍ إلى العواملِ الأوليَّةِ.

٥ص + ٥ = ٥(ص + ١) التبريرُ :.....

ص^{٢} − ١ = (ص + ١) (ص − ١) ....

ص^{٣} − ١ = (ص − ١) (ص^{٢} + ص + ١) ....

ع.م.أ = ١ ....

٤) نحلِّلُ كلَّ مقدارٍ إلى العواملِ الأوليَّةِ.

٦م(س + ٢)^{٢} = ٢ × ٣ × م × (س + ٢) (س + ٢) ....

١٤م س + ٢٨م = ٢ × ٧ × م × س + ٢ × ٢ × ٧ × م

= ٢ × ٧ × م (س + ٢) ....

٦م س + ١٢م = ٢ × ٣ × م × س + ٢ × ٢ × ٣ × م

= ٢ × ٣ × م (س + ٢) ....

ع.م.أ = ٢ × م × (س + ٢) = ٢م (س + ٢) ....

تدريبٌ ١-١١

جِدْ ع.م.أ للمقاديرِ الجبريةِ فيما يأتي:

أ) س^{٢} + ٢س − ١٥ ، س^{٢} − ٥س + ٦ ، ٢س^{٢} − ٦س

ب) ٢ص + ٢ ، ص^{٣} + ١ ، ٦ص^{٢} − ٦

تمارينُ ومسائلُ

١) جِدِ العاملَ المشتركَ الأكبرَ (ع.م.أ) لكلٍّ منَ المقاديرِ الآتيةِ:

أ) ٦س^{٢} ، ١٥س^{٣}

ب) أ^{٢} − ٩ ، أ^{٢} + ٥أ + ٦ ، أ^{٣} − ٢٧

جـ) ٢(س + ٣)^{٢} ، ٢س^{٢} − ١٨

د) جـ^{٣} + جـ ، جـ^{٤} − ١ ، ٥جـ^{٢} + ٥

هـ) ٢س^{٢} − س − ١ ، ٥س^{٢} − ٥س ، س^{٢} − ٣س + ٢

٢) ينتجُ مصنعٌ صنفينِ منَ الزيتِ، بحيثُ ينتجُ (س^{٢} + ٢س − ٣٥) لترًا منَ الصنفِ الممتازِ، وينتجُ (س^{٢} − ٤٩) لترًا منَ الصنفِ العاديِّ. فإذا قررتْ إدارةُ المصنعِ تعبئةَ صنفي الزيتِ في عبواتٍ متساويةِ السّعةِ، فما سعةُ أكبرِ عبوةٍ يمكنُ استخدامُها بدلالةِ (س)؟

٣) بلغَ عددُ طلابِ الصّفِّ التاسعِ في إحدى المدارسِ (٢ص^{٢} + ٩ص − ٥) طالبًا، وعددُ طلابِ الصّفِّ العاشرِ (ص^{٣} + ١٢٥) طالبًا، قرّرَ معلمُ التربيةِ الرياضيّةِ أنْ يكوّنَ أفرقةً رياضيّةً يضمُّ كلُّ فريقٍ منها العددَ نفسَهُ مِنَ اللاعبينَ.

ما أكبرُ عددٍ منَ الطلابِ يمكنُ أنْ يكونَ في الفريقِ الواحدِ بدلالةِ (ص)؟

١ – ٦ المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ

النتاجاتُ

- تجدُ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ لمقاديرَ جبرية.
- تحلُّ مسائلَ على المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ.

تريدُ ملاكُ أَنْ تشتريَ عددًا منَ الأقلامِ والدفاترِ، ثمنُ القلمِ الواحدِ (٣س) قرشًا، وثمنُ الدفترِ الواحدِ (٥س) قرشًا.

فإذا أرادتْ ملاكُ أَنْ تدفعَ مبلغًا لشراءِ الأقلامِ يساوي ما ستدفعهُ لشراءِ الدفاترِ، ما هو أقلُّ مبلغٍ يمكنُ أنْ تدفعَهُ ملاكُ ثمنًا لكلِّ صنفٍ؟

يمكنُ حلُّ هذهِ المسألةِ بتكوينِ الجدولينِ الآتيينِ:

عددُ الأقلامِ	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الثمنُ (بالقرشِ)	٣س	٦س	٩س	١٢س	١٥س	١٨س	٢١س	٢٤س	٢٧س	٣٠س

عددُ الدفاترِ	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الثمنُ (بالقرشِ)	٥س	١٠س	١٥س	٢٠س	٢٥س	٣٠س	٣٥س	٤٠س	٤٥س	٥٠س

نلاحظُ أنّه يمكنُ لملاكَ أنْ تشتريَ (٥) أقلامٍ وتدفعَ (١٥س) قرشًا ثمنًا لها، وأنْ تشتريَ (٣) دفاترَ وتدفعَ المبلغَ نفسَهُ.

وكذلكَ يمكنُها أَنْ تشتريَ (١٠) أقلامٍ وتدفعَ (٣٠س) قرشًا ثمنًا لها، وأنْ تشتريَ (٦) دفاترَ وتدفعَ المبلغَ نفسَه، وهكذا ...

فيكونُ أقلَّ مبلغٍ تدفعُه ملاكُ ثمنًا لكلِّ صنفٍ هو (١٥س) قرشًا، وذلك عندما تشتري (٥) أقلامٍ، و(٣) دفاترَ.

يُسمَّى المقدارُ (١٥س) **المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ** للمقدارينِ (٣س) ، (٥س).

تعريفٌ (٣)

المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ لمقاديرَ جبريةٍ = حاصلَ ضربِ العواملِ الأوليّةِ لها (دونَ تكرارِ المتشابهِ منها).

ويُرمزُ لهُ بالرمزِ (م.م.أ)

لإيجادِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ (م.م.أ) لعددٍ منَ المقاديرِ الجبريةِ، نقومُ بالخطواتِ الآتيةِ:

١) نحلِّلُ كلَّ مقدارٍ إلى عواملِه الأوليةِ.

٢) نحدّدُ العواملَ الأوليةَ المشتركةَ بينَها.

٣) المضاعفُ المشتركُ الأصغرُ (م.م.أ) = حاصلَ ضربِ العواملِ الأوليةِ دونَ تكرارِ المتشابهِ منها.

• تذكَّرْ

لإيجادِ (م.م.أ) للأعدادِ ٤٢، ١٥، ١٢ نحلِّلُ كلَّ عددٍ إلى العواملِ الأوليةِ كما يأتي:

٤٢ = ٢ × ٣ × ٧

١٢ = ٢ × ٢ × ٣

١٥ = ٣ × ٥

م.م.أ = ٢ × ٢ × ٣ × ٥ × ٧ = ٤٢٠

مثالٌ (١-٢-١)

جِدْ (م.م.أ) للمقاديرِ فيما يأتي:

١) ص^{٢} − ٩ ، ص^{٢} + ٥ص + ٦

٢) ٦س^{٣} − ٦ ، س^{٢} − ١ ، ٢س + ٢

٣) أ^{٢} ، أ٥ − ٥ ، أ^{٢} + أ − ٢٠

الحلُّ

١) نحللُ كلَّ مقدارٍ إلى عواملِه الأولية.

ص^{٢} − ٩ = (ص + ٣) (ص − ٣) تحليلُ فرقٍ بينَ مربعين

ص^{٢} + ٥ص + ٦ = (ص + ٣) (ص + ٢) تحليلُ عبارةٍ تربيعية

العواملُ الأوليةُ المشتركةُ هيَ: (ص + ٣)

م.م.أ = (ص + ٣) (ص − ٣) (ص + ٢)

٢) نحللُ كلَّ مقدارٍ إلى عواملِه الأولية.

٦س^{٣} − ٦ = ٦(س^{٣} − ١) التبريرُ ....

= ٢ × ٣ (س − ١) (س^{٢} + س + ١) ....

س^{٢} − ١ = (س + ١) (س − ١) ....

٢س + ٢ = ٢(س + ١) ....

العواملُ الأوليةُ المشتركةُ هيَ: (س − ١) ، (س + ١) ، ٢

م.م.أ = ٢ × ٣(س − ١) (س + ١) (س^{٢} + س + ١) ....

٣) نحلّلُ كلَّ مقدارٍ إلى عواملِه الأوليّة:

أ^{٢} = أ × أ

٥أ − ٥ = ٥(أ − ١) ....

أ^{٢} + أ − ٢٠ = (أ + ٥) (أ − ٤) ....

العواملُ الأوليةُ المشتركةُ هيَ: ....

م.م.أ = ٥ × أ × أ (أ − ١) (أ + ٥) (أ − ٤)

= ٥أ^{٢} (أ − ١) (أ + ٥) (أ − ٤)

تدريبٌ ١–١٢

جِدْ (م.م.أ) للمقاديرِ فيما يأتي:

أ) س^{٢} − ص^{٢} ، س^{٣} + ص^{٣}

ب) ب^{٢} + ٤ب ، ب^{٢} + ٥ب + ٤

جـ) ٢س^{٢} + س − ١ ، ٧س + ٧ ، ١٤س

د) (س − ٢ص)^{٢} ، س^{٢} − ٤ص^{٢} ، ٢س^{٣} − ١٦ص^{٣}

تمارينُ ومسائلُ

١) جِدِ المضاعفَ المشتركَ الأصغرَ (م.م.أ) لكلٍّ منَ المقاديرِ الآتيةِ:

أ) ١٥س٢ + ١٨س ، ١٢س

ب) ٣س٢ − ١٢ ، س٣ − ٨ ، س٢ − ٢س

جـ) ع٢ + ٤ ، ع٢ − ٤ ، ع − ٤

د) ٢٧م٣ − ١ ، ٣م٢ + ١٤م − ٥ ، ٢م + ١٠

هـ) س ص − س٢ ، ٣س٢ − ٣ ، س٢ − س

٢) حافلتانِ تسيرانِ بالسرعةِ نفسِها على الخطِّ نفسِه، الأولى تتوقفُ كلَّ (٢س٢ − ٥س)كم، والثانيةُ تتوقفُ كلَّ (٢س٢ − ٣س − ٥) كم. إذا انطلقتا منَ المكانِ نفسِهِ، وفي الوقتِ نفسِهِ، على أيِّ بُعدٍ منْ نقطةِ انطلاقِهما تلتقيانِ أوّلَ لقاءٍ؟

٣) قامتْ إحدى البلدياتِ بزراعةِ أشجارٍ على أحدِ جانبي إحدى الطرقِ ووضعِ إشاراتٍ تحذيريةٍ على الجانبِ الآخرِ ابتداءً منْ بدايةِ الطريقِ، بحيثُ تَزْرعُ على الجانبِ الأيمنِ منَ الطريقِ شجرةً كلَّ (ك٣ + ٨) مترًا، وعلى الجانبِ الأيسرِ منهُ تضعُ إشارةً تحذيريةً كلَّ (٥ك + ١٠) مترًا.

أ) على أيِّ بعدٍ منْ بدايةِ الطريقِ تُزرعُ شجرةٌ مقابلَ إشارةٍ تحذيريةٍ للمرّةِ الأولى؟

ب) على أيِّ بعدٍ منْ بدايةِ الطريقِ تُزرعُ شجرةٌ مقابلَ إشارةٍ تحذيريةٍ للمرّةِ الرابعةِ؟

١ – ٧ المقاديرُ الكسريَّةُ

النتاجاتُ

- تتعرّفُ المقاديـرَ الكسريةَ وتبسِّطُها.

سجادةٌ مستطيلةُ الشكلِ مساحتُها ($٣س^٢ - ٥س - ٢$) مترًا مربعًا، طولُها ($٣س + ١$) مترًا، عَبِّرْ عن عَرضِها بدلالةِ (س).

مساحةُ السجادةِ = ($٣س^٢ - ٥س - ٢$) معطياتٌ

طولُ السجادةِ = ($٣س + ١$) معطياتٌ

مساحةُ المستطيلِ = الطولَ × العرضِ قانونٌ

فتكونُ مساحةُ السجادةِ = الطولَ × العرضِ

($٣س^٢ - ٥س - ٢$) = ($٣س + ١$) × العرضِ تعويضٌ

العرضُ = $\frac{٣س^٢ - ٥س - ٢}{٣س + ١}$ قسمةُ طرفي المعادلةِ على المقدارِ ($٣س+١$) حيثُ س $\neq \frac{-١}{٣}$

• فكِّرْ

لماذا يُشترطُ أَنْ يكونَ س $\neq \frac{-١}{٣}$؟

يُسمَّى المقدارُ الناتجُ **مقدارًا كسريًا**.

ويمكنُ تبسيطُ المقدارِ الكسريِّ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

١) نحلِّلُ البسطَ والمقامَ إلى العواملِ الأوليّةِ (إنْ أمكنَ).

٢) نختصرُ العواملَ المشتركةَ الناتجةَ في البسطِ والمقامِ (إنْ وُجِدَتْ).

وبتطبيقِ هذهِ الخطواتِ على المقدارِ الكسريِّ السابقِ:

العرضُ $= \frac{٣س^{٢} - ٥س - ٢}{٣س + ١}$

$= \frac{(٣س + ١)\,(س - ٢)}{٣س + ١}$ تحليلُ البسطِ إلى عواملِهِ الأوليةِ

$= \frac{\cancel{(٣س + ١)}\,(س - ٢)}{\cancel{٣س + ١}}$ اختصارُ العواملِ الأوليّةِ المشتركةِ بينَ البسطِ والمقامِ.

عرضُ السجادةِ = (س − ٢) مترًا نتيجةٌ

مثالٌ (١-١٣)

اكتبِ المقاديرَ الكسريةَ الآتيةَ بأبسطِ صورةٍ:

١) $\frac{س^{٣} + ١٢٥}{س^{٢} + ٦س + ٥}$ ، $س \neq -٥$ ، $س \neq -١$

٢) $\frac{ص^{٣} + ٥ص^{٢} + ٦ص}{٢ص + ٦}$ ، $ص \neq -٣$

٣) $\frac{م^{٢} + ٣م - ١٠}{٣م^{٢} + ٥م - ٢}$ ، $م \neq -٢$ ، $م \neq \frac{-١}{٣}$

الحلُّ

١) $\frac{س^{٣} + ١٢٥}{س^{٢} + ٦س + ٥} = \frac{(س + ٥)\,(س^{٢} - ٥س + ٢٥)}{(س + ٥)\,(س + ١)}$ تحليلُ البسط والمقام إلى العواملِ الأوليّةِ حيثُ $س \neq -٥$، $س \neq -١$

$= \frac{\cancel{(س + ٥)}\,(س^{٢} - ٥س + ٢٥)}{\cancel{(س + ٥)}\,(س + ١)}$ اختصارُ (س + ٥) حيثُ $س \neq -٥$، $س \neq -١$

$= \frac{(س^{٢} - ٥س + ٢٥)}{(س + ١)}$ النتيجةُ في أبسطِ صورةٍ.

٢) $\frac{ص^{٣} + ٥ص^{٢} + ٦ص}{٢ص + ٦} = \frac{ص(ص^{٢} + ٥ص + ٦)}{٢(ص + ٣)}$ إخراجُ ص عاملًا مشتركًا منَ البسطِ وإخراجُ ٢ عاملًا مشتركًا منَ المقامِ

$$\frac{ص^3 + ٥ص^2 + ٦ص}{٢ص + ٦} = \frac{ص(ص + ٣)(ص + ٢)}{٢(ص + ٣)}$$ تحليلُ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ الأوليّةِ حيثُ ص ≠ −٣

$$= \frac{ص\cancel{(ص + ٣)}(ص + ٢)}{٢\cancel{(ص + ٣)}}$$ اختصارُ (ص + ٣) حيثُ ص ≠ −٣

$$= \frac{ص(ص + ٢)}{٢}$$ نتيجةٌ

٣) $$\frac{م^2 + ٣م - ١٠}{٣م^2 + ٥م - ٢} = \frac{(م + ٥)(م - ٢)}{(م + ٢)(٣م - ١)}$$ تحليلُ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ الأوليّةِ حيثُ م ≠ −٢، م ≠ $\frac{١}{٣}$

المقدارُ بأبسطِ صورةٍ.

• فكِّرْ

- لماذا المقدارُ في الفرعِ (٣) بأبسطِ صورةٍ؟
- هل يوجدُ عاملٌ مشتركٌ بينَ أيِّ عاملينِ من العواملِ الأوليّةِ في البسطِ والمقامِ؟ وضّحْ إجابتَكَ.

تدريبٌ ١–١٣

اكتبِ المقاديرَ الكسريةَ الآتيةَ بأبسطِ صورةٍ:

أ) $\frac{جـ^3 - ١٢٥}{جـ^2 - ٢٥}$ ، جـ ≠ ٥ ، جـ ≠ −٥

ب) $\frac{س^2 - ١٠س + ٢٥}{٢س^2 - ١٥س + ٢٥}$ ، س ≠ ٥ ، س ≠ $\frac{٥}{٢}$

جـ) $\frac{أ^3 + ٨ب^3}{أ^2 - ٣أب - ١٠ب^2}$ ، أ ≠ ٥ب ، أ ≠ −٢ب

تدريبٌ ١–١٤

ملعبُ كرةِ قدمٍ مستطيلُ الشّكلِ مساحتُه (٦ص^٢ + ٥ص − ٦) مترًا مربعًا، طولُه (٢ص + ٣) مترًا. ما عرضُ الملعبِ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) اكتبِ المقاديرَ الكسريةَ الآتيةَ بأبسطِ صورةٍ:

أ) $\frac{م^٢ - ٩}{١٥ - م}$ ، م ≠ ١٥

ب) $\frac{س^٢ + ٥س + ٤}{س + ٤}$ ، س ≠ -٤

جـ) $\frac{٣س^٢ + ١٢س - ١٥}{س^٣ - ١}$ ، س ≠ ١

د) $\frac{ص^٣ + ٢٧}{ص^٢ + ٩}$

هـ) $\frac{س^٤ - ٨١}{س^٣ - ٢٧}$ ، س ≠ ٣

و) $\frac{(٢س + ١)^٢ - ١٦}{٢س^٢ - س - ١٥}$ ، س ≠ ٣ ، س ≠ $\frac{-٥}{٢}$

ز) $\frac{(ص - ٢)^٢ - (ص + ٢)^٢}{٨ ص}$ ، ص ≠ ٠

ح) $\frac{س^٣ - ٨}{٥س - ١٠}$ ، س ≠ ٢

٢) ناتجُ ضربِ مقدارينِ جبريينِ (س^٢ - ٥س - ١٤)، إذا كانَ أحدهُما (س - ٧)، فما المقدارُ الآخرُ؟ (حيثُ س ≠ ٧).

٣) أرادَ عبدُ الرحمنِ أنْ يوزّعَ مبلغ (١٠ص^٢ - ١٣ص - ٣) دينارًا بينَ أبنائِهِ بالتساوي، فإذا كانَ نصيبُ كلٍّ واحدٍ منهم (٢ص - ٣) دينارًا (حيث ص ≠ $\frac{٣}{٢}$) فما عددُ أبنائِهِ؟

١ – ٨ المعادلةُ الكسريَّةُ

النتاجاتُ

- تتعرّفُ المعادلةَ الكسريةَ.
- تكـوّنُ المعادلـةَ الكسريةَ وتحلُّها.

يمـلكُ معـاذٌ مزرعةَ زيتونٍ مستطيلـةَ الشكـلِ مساحتُهـا (س^{٢} + ٧س + ١٠) مترًا مربعًا، طولُها (س + ٥) مترًا. وعرضُها (٢٠٢) مترًا، جِدْ طولَ المزرعةِ بالأمتارِ.

لحلِّ هذهِ المسألةِ، نقومُ بالخطواتِ الآتيةِ:

مساحةُ المستطيلِ = الطولَ × العرضِ   قانونٌ

س^{٢} + ٧س + ١٠ = (س + ٥) × العرضِ   تعويضٌ

$$\frac{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٠}{(\text{س} + ٥)} = \frac{\cancel{(\text{س} + ٥)} \times \text{العرضِ}}{\cancel{(\text{س} + ٥)}}$$

قسمةُ طرفي المعادلةِ على (س + ٥) حيثُ س ≠ −٥

$$\frac{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٠}{(\text{س} + ٥)} = \text{العرضَ}$$

اختصارٌ

$$\frac{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٠}{(\text{س} + ٥)} = ٢٠٢$$

تعويضٌ

تُسمَّى مثلُ هذهِ المعادلةِ **معادلةً كسريةً**، وحلُّها يعني إيجادَ قيمِ المتغيرِ التي تجعلُها عبارةً صحيحةً، وذلكَ عَنْ طريقِ تبسيطِ المقاديرِ الكسريةِ وتحويلِها إلى معادلةٍ مكافئةٍ وحلِّها.

ولحلِّ المعادلةِ السابقةِ:

$$\frac{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ١٠}{(\text{س} + ٥)} = ٢٠٢$$ المعادلةُ

$$\frac{(\text{س} + ٥) \times (\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٥)} = ٢٠٢$$ تحليلُ البسطِ إلى عواملِه الأوليةِ

$$\frac{\cancel{(\text{س} + ٥)} \times (\text{س} + ٢)}{\cancel{(\text{س} + ٥)}} = ٢٠٢$$ اختصارُ العواملِ المشتركةِ بينَ البسطِ والمقامِ

$$(\text{س} + ٢) = ٢٠٢$$ نتيجةٌ

$$(\text{س} + ٢) - ٢ = ٢٠٢ - ٢$$ طرحُ (٢) منْ طرفي المعادلةِ

$$\text{س} = ٢٠٠ \text{ مترًا}$$

فيكونُ طولُ المزرعةِ = س + ٥

$$= ٢٠٠ + ٥ = ٢٠٥ \text{ مترًا}$$

مثالٌ (١-١٤)

حُلَّ المعادلةَ الكسريةَ الآتيةَ: $\frac{٥\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١}{\text{س} - ١} = ١٦$ ، حيثُ س $\neq$ ١

الحلُّ

$$\frac{٥\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١}{\text{س} - ١} = ١٦ \text{ ، حيثُ س} \neq ١$$

$$\frac{(\text{س} - ١)(٥\text{س} + ١)}{\text{س} - ١} = ١٦$$ تحليلُ البسطِ إلى عواملِهِ الأوليّةِ

$$\frac{\cancel{(\text{س} - ١)}(٥\text{س} + ١)}{\cancel{\text{س} - ١}} = ١٦$$ اختصارٌ

$$(٥\text{س} + ١) = ١٦$$ طرحُ (١) منْ طرفي المعادلةِ

$$٥\text{س} = ١٥$$ قسمةُ طرفي المعادلةِ على (٥)

$$\text{س} = ٣$$

مجموعةُ الحلِّ = $\{٣\}$

تدريبٌ (١–١٥)

حلَّ المعادلةَ الكسريةَ الآتيةَ:

$$\frac{٣ص^{٢} + ٥ص - ٢}{ص + ٢} = ١٤ \text{، حيثُ } ص \neq -٢$$

مثالٌ (١–١٥)

حُلَّ المعادلةَ الكسريةَ الآتيةَ: $\frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} + ٤س - ٥} = -٢$ ، حيثُ س $\neq$ ١ ، س $\neq$ -٥

الحلُّ

$\frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} + ٤س - ٥} = -٢$ ، حيثُ س $\neq$ ١ ، س $\neq$ -٥ — المعادلةُ

$\frac{(س - ١)(س + ٢)}{(س - ١)(س + ٥)} = -٢$ — تحليلٌ

$\frac{\cancel{(س - ١)}(س + ٢)}{\cancel{(س - ١)}(س + ٥)} = -٢$ — اختصارٌ

$\frac{(س + ٢)}{(س + ٥)} = -٢$ — نتيجةٌ

$(س + ٥) \times \frac{(س + ٢)}{(س + ٥)} = -٢ \times (س + ٥)$ — ضربُ كلِّ طرفٍ في (س + ٥) والاختصارُ

$س + ٢ = -٢ (س + ٥)$ — نتيجةٌ

$س + ٢ = -٢س - ١٠$ — تبسيطٌ

$س + ٢س = -١٠ - ٢$ — التبريرُ....

$٣س = -١٢$ — ....

$س = -٤$ — ....

مجموعةُ الحلِّ = { -٤ }

تمارينُ ومسائلُ

١) حُلَّ كلَّ معادلةٍ منَ المعادلاتِ الكسريّةِ الآتيةِ:

أ) $\frac{\text{٢س} - ٦}{\text{س} - ١} = ٣$ ، حيثُ $\text{س} \neq ١$

ب) $\frac{\text{س}^{٢} + \text{٣س} - ١٠}{\text{٢س} - ٤} = ٦$ ، حيثُ $\text{س} \neq ٢$

جـ) $\frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{٣س}^{٢} + \text{٣س} + ٣} = ٥$

د) $\frac{\text{١٠ص}^{٢} - \text{٧ص} + ١}{\text{٢ص} - ١} = -٤$ ، حيثُ $\text{ص} \neq \frac{١}{٢}$

هـ) $\frac{\text{س}^{٢} + \text{٢س} - ٣}{\text{٢س}^{٢} - \text{٣س} + ١} = ١$ ، حيثُ $\text{س} \neq ١$ ، $\text{س} \neq \frac{١}{٢}$

و) $\frac{\text{٣ب}^{٢} - \text{ب} - ٤}{\text{ب}^{٢} - ١} = ٢$، حيثُ $\text{ب} \neq -١$ ، $\text{ب} \neq ١$

٢) لدى تاجرٍ ($\text{٦جـ}^{٢} + \text{٧جـ} + ٢$) ليترًا منَ الزيتِ، وضعَها في ($\text{٣جـ} + ٢$) وعاءً لها السّعةُ نفسُها، إذا كانتْ سعةُ الوعاءِ الواحدِ (١١) لترًا:

أ) ما قيمةُ (جـ)؟

ب) ما عددُ الأوعيةِ؟

جـ) ما كميةُ الزيتِ الموجودةُ لدى التاجرِ؟

٣) تصدقَ حامدٌ بمبلغِ ($\text{٥س}^{٢} - \text{١٤س} - ٣$) دينارًا، حيثُ قسَّمَ المبلغَ على ($\text{س} - ٣$) منَ الفقراءِ بالتساوي، فكانَ نصيبُ الواحدِ منهم (٥١) دينارًا.

أ) ما قيمةُ (س)؟

ب) ما المبلغُ الذي تصدّقَ بهِ حامدٌ؟

مراجعةٌ

١) حَلِّلِ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ إلى العواملِ الأوليةِ:

أ) ٣س + ١٢

ب) س^٢ − ١٠٠

جـ) ١٢ع^٢ − ٧٥

د) ٢٧س^٣ − ١

هـ) ٨١أ^٣ + ٢٤

و) ص^٢ − ٧ص + ٦

ز) ٣ع^٢ − ١٠ع − ٢٥

ح) ٣س^٤ − $\frac{\text{س}^٣}{٢٧}$

٢) اكتبِ المقاديرَ الكسريةَ الآتيةَ بأبسطِ صورةٍ:

أ) $\frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س}}{\text{س} + ٤}$ ، س ≠ −٤

ب) $\frac{\text{س}^٢ - ٢٥}{٢\text{س} - ١٠}$ ، س ≠ ٥

جـ) $\frac{\text{ص}^٢ + ٢\text{ص} - ٣}{\text{ص}^٢ - ٩}$ ، ص ∉ {−٣، ٣}

د) $\frac{\text{ع}^٢ - ٨\text{ع} + ١٦}{\text{ع}^٣ - ٦٤}$ ، ع ≠ ٤

هـ) $\frac{٢\text{س}^٢ + ٥\text{س} - ٣٣}{٣\text{س}^٣ - ٥\text{س}^٢ - ١٢\text{س}}$ ، س ∉ { ٠ ، ٣ ، $\frac{-٤}{٣}$ }

و) $\frac{\text{س}^٣ + ١٢٥}{١٠ - ٢\text{س}}$ ، س ≠ ٥

٣) حُلَّ المعادلاتِ الكسريةَ الآتيةَ:

أ) $\frac{\text{س}^٢ - ٤\text{س}}{\text{س} - ٤}$ = ٥ حيث س ≠ ٤

ب) $\frac{\text{س}^٢ - ٣٦}{٢\text{س} + ١٢}$ = −٣ ، حيث س ≠ −٦

جـ) $\frac{\text{٢ص} + ٣}{\text{ص} - ٩} = ١$ ، حيثُ ص $\neq$ ٩

د) $\frac{\text{٥س}^٢ - \text{٢س} - ٧}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢} = ٣$ ، حيثُ س $\notin$ {–١، ٢}

٤) جِدِ العاملَ المشتركَ الأكبرَ، والمضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ الجبريةِ فيما يأتي:

أ) $\text{٢س}^٢ - ٥٠$ ، $\text{س}^٢ + \text{٢س} - ١٥$

ب) $\text{ص}^٣ - ١$ ، $\text{٣ص}^٢ - ٣$ ، $\text{ص}^٢ + \text{٤ص} - ٥$

جـ) $\text{٢ع}^٢ - \text{٥ع} - ١٢$ ، $\text{٣ع} - ١٢$

د) $\text{ب} + ٣$ ، $\text{ب}^٢ - \text{٤ب} + ٣$ ، ٢ب

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) حلِّلِ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ إلى عواملِها:

أ) $\text{٥س}^{٣} + \text{١٥س}^{٢}$

ب) $\text{٢٥} - \frac{\text{٤}}{\text{٩ب}^{٢}}$ ، ب ≠ صفرًا

جـ) $\text{س}^{٢} + \text{١٤س} + \text{٤٩}$

د) $\text{ع}^{٣} - \text{٨ل}^{٣}$

هـ) $\text{٠,٠٢٧} + \text{١٠٠٠س}^{٣}$

و) $\text{٦س}^{٢} + \text{٥س} - \text{١٤}$

ز) $\text{٣ع}^{٢} - \text{٧ع} - \text{٤٠}$

ح) $\text{٣س}^{٥} + \frac{\text{٣س}^{٢}}{\text{٦٤}}$

٢) اكتبِ المقاديرَ الكسريةَ الآتيةَ بأبسطِ صورةٍ:

أ) $\frac{\text{س}^{٢} - \text{٧س}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq \text{٠}$

ب) $\frac{\text{ص}^{٢} - \text{١٤٤}}{\text{٢ص} + \text{٢٤}}$ ، $\text{ص} \neq -\text{١٢}$

جـ) $\frac{\text{ع}^{٢} - \text{٢ع} - \text{٣٥}}{\text{ع}^{٢} - \text{٤٩}}$ ، $\text{ع} \notin \{-\text{٧} ، \text{٧}\}$

د) $\frac{\text{م}^{٢} - \text{١٢م} + \text{٣٦}}{\text{م}^{٣} - \text{٢١٦}}$ ، $\text{م} \neq \text{٦}$

هـ) $\frac{\text{٤س}^{٢} + \text{٥س} - \text{٩}}{\text{٥س}^{٣} - \text{٦س}^{٢} + \text{س}}$ ، $\text{س} \notin \{\text{٠} ، \text{١} ، \frac{\text{١}}{\text{٥}}\}$

٣) حُلَّ المعادلاتِ الكسريةَ الآتيةَ:

أ) $\frac{س^٢ + ٥س}{س + ٥} = -٨$ ، حيثُ $س \neq -٥$

ب) $\frac{س + ٧}{س^٢ - ٤٩} = -٣$، حيثُ $س \notin \{-٧ ، ٧\}$

جـ) $\frac{٥ك + ٣}{ك - ١} = ٣$، حيثُ $ك \neq ١$

د) $\frac{١ - س^٢}{٥س^٢ + ٢س - ٧} = ٣$، حيثُ $س \notin \{١، \frac{-٧}{٥}\}$

٤) جِدِ العاملَ المشتركَ الأكبرَ، والمضاعفَ المشتركَ الأصغرَ للمقاديرِ الآتيةِ:

أ) $٣س^٢ - ١٢$ ، $س^٢ + ٣س - ١٠$

ب) $٨ص^٣ - ١$ ، $١٢ص^٢ - ٣$ ، $٤ص^٢ - ٤ص + ١$

جـ) $٣م^٢ - ٥م - ٨$ ، $٣م + ٣$

٥) قطعَ همّامٌ مسافةَ ($٦ف^٢ + ١٧ف + ٥$) مترًا في ($٣ف + ١$) ثانيةً، إذا كانتْ سرعتُه ثابتةً وتساوي (٧) أمتارٍ في الثانيةِ فجِدْ:

أ) قيمةَ (ف).

ب) المسافةَ التي قطعَها همامٌ بالأمتارِ.

٢

٢–١ الفتراتُ

٢–٢ المتبايناتُ وخصائصُها

٢–٣ المتبايناتُ الخطيةُ بمتغيرٍ واحدٍ

٢–٤ المتبايناتُ المركبةُ بمتغيرٍ واحدٍ

تُعدُّ المتبايناتُ منَ المواضيعِ المهمةِ في علمِ الرياضياتِ، وكما أنَّ للمعادلاتِ أهميةً في حياتِنا اليوميةِ، فالمتبايناتُ لا تقلُّ عنها أهميةً لِكونِها توضحُ العلاقاتِ بينَ مجموعةٍ منَ القيمِ تتراوحُ أحيانًا بينَ عددينِ حقيقيينِ أَوْ أكبرَ منْ عددٍ، وأحيانًا أخرى أصغرَ منْ عددٍ.

الوحدةُ الثانيةُ
المتبايناتُ الخطيةُ بمتغيرٍ واحدٍ

س > ع

س ≥ ص > ع

س > ص ≥ ع

س > ص > ع

س ≥ ص ≥ ع

س ≤ ص

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ دراسةِ هذهِ الوحدةِ أَنْ يكونَ قادرًا على:

- تَعرُّفِ الفتراتِ.
- تمثيلِ الفتراتِ على خطِّ الأعدادِ.
- تَعرُّفِ المتبايناتِ الخطيّةِ بمتغيرٍ واحدٍ.
- تكوينِ متبايناتٍ خطيةٍ بمتغيرٍ واحدٍ.
- حلِّ متبايناتٍ خطيةٍ بمتغيرٍ واحدٍ.
- تمثيلِ مجموعةِ حلِّ متبايناتٍ خطيّةٍ بمتغيرٍ واحدٍ على خطِّ الأعدادِ.
- حلِّ متبايناتٍ مركبةٍ بمتغيرٍ واحدٍ.
- حلِّ مسائلَ باستخدامِ المتبايناتِ.

تهيئةٌ

١ ضَعْ إشارةَ > ، أو < ، أو = في $\square$ لتكونَ العبارةُ صحيحةً فيما يأتي:

أ) $-٢ \square -٩$ ب) $-٣ \square ٧$ جـ) $٠٫٤٩ \square ٠٫٩٤$

د) $\frac{٤}{٥} \square \frac{٢}{٧}$ هـ) $١\frac{١}{٣} \square ٤\frac{-٥}{٨}$ و) $\sqrt[٣]{٦٤} \square \sqrt{٦٤}$

ز) $-٢٫٦ \square ٢\frac{-٣}{٥}$ ح) $-٤\left(\frac{١}{٢}+٥\right) \square ٠٫٢ \times -١١٠$

٢ حَدِّدِ العباراتِ الصحيحةَ فيما يأتي:

أ) $-١ \leq -٧$ ب) $٣ \leq ٣$ جـ) $-٥ \geq ٧$

د) $\sqrt{٥} \leq \sqrt{٣}$ هـ) $٢ > \sqrt{٢} > ١$ و) $٦ + ٤ > ٥ + (-٣)$

ز) $\sqrt{٣} < ٣ < ٨$ ح) $١٣ \geq \sqrt{٨} \geq ٧$ ط) $٦ < ٨٫٤ < ٤$

ي) $\frac{١}{٢}(٣-٥)+٧ \geq ٤-\frac{٢}{٣}(٩+٦)$

٣ رتبِ الأعدادَ الحقيقيةَ الآتيةَ ترتيبًا تنازليًا:

أ) ٣ ، ٤ ، ٢ ، ٢٩ ، $\sqrt{٥}$

ب) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-١}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٤}$ ، $٢\frac{١}{٦}$

٤ رتبِ الأعدادَ الحقيقيةَ الآتيةَ ترتيبًا تصاعديًا:

أ) -٦ ، ٨ ، ٣ ، -١٥ ، ٤ ، ١٤٣ ، ٢

ب) $\sqrt{١٣}$ ، ٥ ، $-\sqrt{٧}$ ، -٤

٥ مثّلْ على خطِّ الأعدادِ كلًّا منَ العملياتِ الآتيةِ واكتبِ الناتجَ:

أ) ٢ + (–٤) | ب) (–٦) –٧ | جـ) (–٥) + (–١)

د) ٣ – ٨ | هـ) (–٧) + ٢ | و) ٦ – (–٤)

ز) ١ + ٣ + (–٤) | ح) (–٣) – ٥ + (–٢) | ط) ٤ – ١ – ٨

٦ حُلَّ وتأكدْ منْ صحةِ الحلِّ في كلٍّ منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

أ) ١٦ + س = ٧

ب) ص^{٢} = ٢٥

جـ) ٢ع – ٤ = ٨

د) ٤س – ١ = ٣س + ٢

هـ) –١ = ٨ – ٣ص

و) ع^{٢} + ٩ = ١٣

ز) $\sqrt{٤٥}$ – س = ٣س + $\sqrt{٥}$

ح) $\sqrt[٣]{٢٧}$ ص = $\sqrt{١٨}$

ط) ع^{٣} – ٦ = ١٨ – ٢ع^{٣}

٢ – ١

الفتراتُ

النتاجاتُ

- تتعرّفُ أنواعَ الفتراتِ.
- تُمَثِّلُ الفتراتِ على خطِّ الأعدادِ.

تراوحتْ درجةُ الحرارةِ في أحدِ أيامِ الربيعِ في عجلون من ٢٢° سِلِسْيوس إلى ٢٥° سِلِسْيوس. عبِّرْ عنْ ذلكَ بصورةٍ رياضيّةٍ.

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ المحصورةِ بينَ العددينِ ٢٢ ، ٢٥ مجموعةٌ غيرُ منتهيةٍ منَ الأعدادِ، ولأننا لا نستطيعُ أنْ نعبرَ عنْ هذهِ المجموعةِ بكتابةِ جميعِ عناصرِها، فإننا نعبِّرُ عنها بذكرِ الصفةِ المميزةِ لها كأنْ نقولَ: مجموعةُ درجاتِ الحرارةِ في عمانَ في أحدِ أيامِ الربيعِ = {س: ٢٢ ≤ س ≤ ٢٥ ، س ∈ ح}

ومنْ طرقِ التعبيرِ عنِ المجموعاتِ الجزئيةِ غيرِ المنتهيةِ منْ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ (ح)، استعمالُ **الفتراتِ**، وهيَ تنقسمُ إلى فتراتٍ محدودةٍ وغيرِ محدودةٍ.

• تذكَّرْ

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ هي مجموعةُ الأعدادِ النسبيةِ وغيرِ النسبيةِ، ويُرمزُ إليها بالرمزِ ح.

أولاً: الفتراتُ المحدودةُ

هيَ فتراتٌ يكونُ طولُها عددًا حقيقيًّا أو يمكنُ حسابُ طولِها. وتنقسمُ إلى الأنواعِ الآتيةِ:

إذا كانَ أ ، ب أعدادًا حقيقيةً، وكانَ أ < ب، فإنَّ:

١) الفترةَ المغلقةَ أ ، ب = {س: أ ≤ س ≤ ب، س ∈ ح}

ويُرمزُ لها بالرمزِ [أ ، ب]

٢) الفترةَ المفتوحةَ أ ، ب = {س: أ < س < ب، س ∈ ح}
ويُرمزُ لها بالرمزِ (أ ، ب)

٣) أ) الفترةَ نصفَ المغلقةِ أ ، ب = {س: أ ≤ س < ب، س ∈ ح}
ويرمزُ لها بالرمزِ [أ ، ب)

ب) الفترةَ نصفَ المفتوحةِ أ ، ب = {س: أ < س ≤ ب، س ∈ ح}
ويرمزُ لها بالرمزِ (أ ، ب]

ملاحظةٌ: يمكنُ تسميّةُ الفترةِ نصفِ المغلقةِ بنصفِ المفتوحةِ والعكسُ صحيحٌ.

يُسمَّى أ ، ب في كلِّ فترةٍ منَ الفتراتِ السابقةِ بطرفي (حدّي) الفترةِ.
ويكونُ طولُ الفترةِ = الحدَّ الأعلى – الحدِّ الأدنى = ب – أ

مثالٌ (٢–١)

عبّرْ عنْ كلٍّ منَ المجموعاتِ الآتيةِ باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثُمَّ احسبْ طولَها

١) جـ = {س: ٤ ≤ س ≤ ٨ ، س ∈ ح}

٢) هـ = {س: −٧ ≤ س < ٠ ، س ∈ ح}

الحلُّ

١) جـ = [٤ ، ٨] فترةٌ مغلقةٌ

وطولُ الفترةِ = ٨ – ٤ = ٤

٢) هـ = [−٧ ، ٠) فترةٌ نصفُ مغلقةٍ

وطولُ الفترةِ = ٠ – (−٧)

= ٠ + ٧ = ٧

تدريبٌ ٢–١

أ) عبّرْ عنْ كلٍّ منَ المجموعاتِ الآتيةِ باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ احسبْ طولَها.

١) د = {س: ١١ < س ≤ ٢٠ ، س ∈ ح}

٢) و = {س: −١٠ < س < ٢ ، س ∈ ح}

ب) عبِّرْ عنْ كلِّ فترةٍ ممّا يلي بذكرِ الصفةِ المميزةِ لها.

١) [−٥,٤ ، ٥)　　　　　　٢) (−١٥,٣ ، −١)

مثالٌ (٢−٢)

مثّلْ كلَّ فترةٍ ممّا يلي على خطِّ الأعدادِ.

١) [−٥ ، ٢)　　　　　　٢) [٣ ، ٧]

الحلُّ

١) 

نضعُ دائرةً مفتوحةً عندَ العددِ (٢) لأنّهُ لا ينتمي للفترةِ

٢) 

نضعُ دوائرَ مغلقةً عندَ العددينِ ٧ ، ٣ لأنّها تنتمي للفترةِ.

تدريبٌ ٢−٢

مثّلِ الفتراتِ الآتيةَ على خطِّ الأعدادِ:

أ) [١ ، ٨]　　　　ب) (−٤ ، ٦]　　　　جـ) (−٢ ، ٢)

د) [$\frac{١}{٢}$ ، ٥)　　　　هـ) (٣ $\frac{-١}{٤}$ ، ٢ $\frac{١}{٣}$)　　　　و) (٦ $\frac{-٢}{٥}$ ، ٢ $\frac{-٤}{٧}$)

ثانيًا: الفتراتُ غيرُ المحدودةِ

هيَ فتراتٌ لا يمكنُ حسابُ طولِها. وتنقسمُ إلى الأنواعِ الآتيةِ:

١) [أ ، ∞) = {س: س ≤ أ ، س ∋ ح}

٢) (أ ، ∞) = {س: س < أ ، س ∋ ح}

٣) (− ∞، أ] = {س: س ≥ أ ، س ∋ ح}

٤) (− ∞، أ) = {س: س > أ ، س ∋ ح}

٥) (− ∞، ∞) = ح

مثالٌ (٢–٣)

عبّرْ عنِ المجموعةِ ف = {س: س ≤ −٧ ، س ∈ ح} باستخدامِ رمزِ الفترةِ:

الحلُّ

ف = (−∞ ، −٧]

تدريبٌ ٢–٣

عبّرْ عنْ كلٍّ منَ المجموعتينِ الآتيتينِ باستعمالِ رمزِ الفترةِ:

ف$_{١}$ = {س: س ≥ ٠ ، س ∈ ح}

ف$_{٢}$ = {س: س > −٤ ، س ∈ ح}

مثالٌ (٢–٤)

مثِّلِ الفترةَ ف = [٦ ، ∞) على خطِّ الأعدادِ.

الحلُّ

• فكِّرْ

لماذا لا يمكنُ أنْ تكونَ الفترةُ مغلقةً عندَ − ∞ أو ∞ ؟

تدريبٌ ٢–٤

مثِّلِ الفتراتِ الآتيةَ على خطِّ الأعدادِ:

أ) (−∞، −٣] ب) [١٠، ∞) جـ) (−∞، ∞)

د) [$\frac{٣}{٥}$، ∞) هـ) (−∞، ٣$\frac{١}{٨}$) و) ($\frac{-٢}{٦}$، ∞)

تعلَّمْ

- إشارةُ المساواةِ في س ≤ أ ، أو س ≥ أ تعني أنَّ الفترةَ مغلقةٌ عندَ أ.
وعندَ تمثيلِ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ فإنَّ الدائرةَ عندَ أ تكونُ مغلقةً.
- س < أ ، أو س > أ تعني أنَّ الفترةَ مفتوحةٌ عندَ أ
وعندَ تمثيلِ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ فإنَّ الدائرةَ عندَ أ تكونُ مفتوحةً.

مثالٌ (٢–٥)

اكتبْ مجموعةَ الأعدادِ الممثلةِ على خطِّ الأعدادِ فيما يأتي:

١)


٢)


٣)


٤)


الحلُّ

١) بما أنَّ الدائرةَ مفتوحةٌ عندَ الطرفِ السفليِّ للفترةِ –٢ وعندَ الطرفِ العلويِّ ٤، فإنَّ الممثَّلَ في الشكلِ هوَ الفترةُ (–٢، ٤)، أو {س: –٢ > س > ٤}

٢) بما أنَّ الدائرةَ مفتوحةٌ عندَ الطرفِ السفليِّ للفترةِ ٢ ومغلقةٌ عندَ الطرفِ العلويِّ ٧، فإنَّ الممثَّلَ في الشكلِ هوَ الفترةُ (٢، ٧]، أو {س: ٢ > س ≥ ٧}

٣) بما أنَّ الدائرةَ مغلقةٌ عندَ الطرفِ السفليِّ –٦ ومفتوحةٌ عندَ الطرفِ العلويِّ ٦، فإنَّ الممثَّلَ في الشكلِ هوَ الفترةُ [–٦، ٦)، أو {س: –٦ ≥ س > ٦}

٤) بما أنَّ الدائرةَ مغلقةٌ عندَ الطرفِ السفليِّ صفر، ومغلقةٌ عندَ الطرفِ العلويِّ ٩، فإنَّ الممثَّلَ في الشكلِ هوَ [٠، ٩]، أوْ {س: ٠ ≥ س ≥ ٩}

تمارينُ ومسائلُ

١) إذا كانَ س عددًا حقيقيًّا، فَعبِّرْ عنِ المجموعاتِ الآتيةِ باستعمالِ رمزِ الفترةِ واحسبْ طولَ كلٍّ منها إنْ أمكنَ:

أ) ف١ = {س: −٨ ≤ س ≤ ٢}

ب) ف٢ = {س: −٤ < س < ٠}

جـ) ف٣ = {س: س ≤ ٣}

د) ف٤ = {س: س > −١}

٢) مثِّلِ الفتراتِ الآتيةَ على خَطِّ الأعدادِ:

أ) [−٢ ، ٤) ب) (−∞، −٩]

جـ) (٠ ، ٨] د) (١ ، ∞)

٣) عبّرْ عنِ الفتراتِ الآتيةِ بذكرِ الصفةِ المميزةِ لها:

أ) [−٣ ، ٥] ب) (−٤ ، ٠]

جـ) [−٦ ، ∞) د) (−∞، ٤)

٤) إذا كانَ طولُ فترةٍ ما يساوي (٥) فاكتبْ مثالًا على أنواعِ الفتراتِ الآتيةِ:

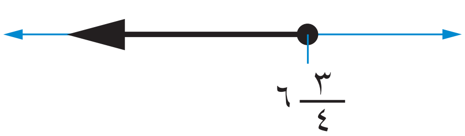
أ) فترةٍ مغلقةٍ.

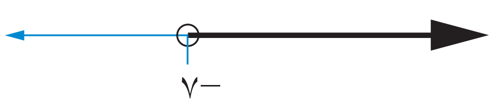
ب) فترةٍ مفتوحةٍ.

جـ) فترةٍ نصفِ مغلقةٍ.

٥) اكتبِ الفترةَ التي تُمثِّلُ مجموعةَ الأعدادِ المبيِّنةِ على خطِّ الأعدادِ فيما يأتي:

أ)


ب)


جـ)


د)


٢ – ٢

المتبايناتُ وخصائصُها

النتاجات

- تتعرّفُ المتباينات.
- تتعرّفُ خصائصَ المتباينات.

قررتْ وزارةُ التربيةِ والتعليمِ في المملكةِ الأردنيةِ الهاشميّةِ لهذا العامِ قبولَ الطلّابِ الّذينَ تتراوحُ أعمارُهم بينَ ٦ و ٩ سنواتٍ في الصفِّ الأوّلِ الأساسيِّ، عبِّرْ عنْ ذلكَ بمتباينةٍ.

إذا كانَ س ، ص عددينِ حقيقيينِ فإمّا أنْ يكونَ:

س = ص، أو س > ص، أو س < ص ، وهذهِ الخاصيةُ تُسمَّى خاصيةَ **إحدى ثلاثٍ**، أيْ أنَّهُ يتحققُ بالضرورةِ إحدى الحالاتِ الثلاثِ المذكورةِ.

حيثُ تُسمى س = ص **معادلةً**، بينما تُسمَّى كلٌّ مِنْ:

س > ص ، س< ص ، س ≤ ص ، س ≥ ص **متباينةً**.

وقدْ يتمُّ أحيانًا دمجُ متباينتينِ لنحصلَ على **متباينةٍ مركّبةٍ** على النحوِ الآتي:

س > ص > ع، وهيَ تعني أنَّ: س > ص ، وَ ص > ع .

تعريفٌ (١)

المتباينةُ هيَ علاقةٌ رياضيةٌ تعبرُ عنِ اختلافِ قيمةِ مقدارينِ رياضيينِ، وتُستخدمُ فيها واحدةٌ أو أكثرُ منْ إشاراتِ التباينِ > ، < ، ≤ ، ≥

تدريبٌ ٢–٥

إذا كانَتْ أعمارُ طلّابٍ في مدرسةٍ ما تتراوحُ بينَ (٦) وَ (١٨) سنةً، اكتبْ متباينتينِ تمثلانِ هذهِ المسألةَ ثمَّ اكتبهما على صورةِ متباينةٍ مركّبةٍ.

تدريبٌ ٢–٦

حلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

نشاطٌ (٢-١)

أكملِ الفراغاتِ في الجدولِ بوضعِ إشارةِ > ، أوْ < في □ :

المتباينةُ	أثرُ الجمعِ	أثرُ الطرحِ	أثرُ الضربِ	أثرُ القسمةِ
٢ < ٩	٢ + ٤ < ٩ + ٤	٢ − ٥ < ٩ − ٥	٢ × ٣ < ٩ × ٣	٢/٢ < ٩/٢
٧ > −١	٧+(−٥) □ −١+(−٥)	٧−(−٣) □ −١−(−٣)	٧ × −٢ □ −١ × −٢	٧/−٦ □ −١/−٦
−٥ < ٠	−٥ + ٦ □ ٠ + ٦	−٥−(−١) □ ٠−(−١)	−٥ × −٧ □ ٠ × −٧	−٥/−١٠ □ ٠/−١٠
−٨ > −١٢	−٨+(−٩) □ −١٢+(−٩)	−٨ − ٤ □ −١٢ − ٤	−٨ × ٤ □ −١٢ × ٤	−٨/٨ □ −١٢/٨

سؤالٌ: ماذا تستنتجُ ممّا سبقَ؟

خصائصُ المتبايناتِ:

إذا كانَ أ ، ب ، جـ ∈ ح ، وكانتْ أ ≤ ب، فإنَّ:

١) أ ± جـ ≤ ب ± جـ ، لكل جـ ∈ ح

٢) أ جـ ≤ ب جـ عندما جـ ≥ صفرًا

٣) أ جـ ≥ ب جـ عندما جـ ≤ صفرًا

٤) ١/أ ≥ ١/ب عندما ٠ < أ ≤ ب، أو أ ≤ ب < ٠

٥) إذا كانتْ أ ≤ ب ، ب ≤ جـ ، فإنَّ أ ≤ جـ

٦) أ ب > صفرٍ، إذا وفقطْ إذا كانَ أ ، ب لهما الإشارةُ نفسُها.

٧) أ ب < صفرٍ، إذا وفقطْ إذا كانَ أ ، ب لهما إشارتانِ مختلفتانِ.

سؤالٌ: إذا كانَ أ عددًا حقيقيًّا، فهلْ أ^{٢} ≥ ٠ ؟

مثال (٢-٦)

اكتبِ المتباينةَ الناتجةَ عنْ كلٍّ ممّا يأتي:

١) جمعِ العدَدِ (٤,٣) إلى طرفيِّ المتباينةِ −٢,٥ < ٣

٢) ضربِ العدَدِ (−٢) في طرفيِّ المتباينةِ −٥/٦ < ١/٤

الحلُّ

١) $-٢,٥ > ٣$ المتباينةُ

$-٢,٥ + ٤,٣ > ٣ + ٤,٣$ نبقي على إشارةِ التباينِ عندَ جمعِ العددِ (٤,٣) إلى طرفيها

إذنْ $١,٨ > ٧,٣$ الخاصيةُ (١)

٢) $\frac{-٥}{٦} > \frac{١}{٤}$ المتباينةُ

$-٢ \times \frac{-٥}{٦} < \frac{١}{٤} \times -٢$ نقلبُ إشارةَ التباينِ عندَ ضربِ طرفيها بالعددِ (-٢)

إذنْ $\frac{٥}{٣} < \frac{-١}{٢}$ الخاصيةُ (٣)

تدريبٌ ٢-٧

اكتبِ المتباينةَ الناتجةَ عنْ كلٍّ ممّا يأتي:

أ) قسمةِ طرفي المتباينةِ $-١٢ \geq ٢٤$ على العددِ (-٦)

ب) طرحِ العددِ (١٠) منْ طرفي المتباينةِ $٥ < ٩$

جـ) ضربِ العددِ (٣) في طرفي المتباينةِ $\frac{-٢}{٥} < \frac{١}{٣}$

• فكِّرْ

في أيِّ العملياتِ الحسابيةِ يتمُّ قلبُ إشارةِ التباينِ؟

تدريبٌ ٢-٨

إعطِ ثلاثةَ أمثلةٍ على كلِّ خاصيّةٍ منْ خواصِّ المتبايناتِ الآتيةِ:

إذا كانَ أ ، ب ، جـ $\in$ ح ، وكانَ :

أ) $٠ < أ \leq ب$ ، أو $أ \leq ب < $ صفرٍ، فإنَّ $\frac{١}{أ} \geq \frac{١}{ب}$

ب) $أ \geq ب$ ، $ب \geq جـ$ ، فإنَّ $أ \geq جـ$

جـ) أ ب < صفرٍ، فإنَّ أ ، ب لهما إشارتانِ مختلفتانِ وبالعكسِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) اجمعِ العددَ ٨ إلى طرفي كلٍّ منَ المتبايناتِ الآتيةِ، واكتبِ المتباينةَ الناتجةَ:

أ) −٤ < ٥   ب) ٩ > ٣   جـ) −٨ < −٢

٢) اطرحِ العددَ ٣ منْ طرفي كلٍّ منَ المتبايناتِ الآتيةِ، واكتبِ المتباينةَ الناتجةَ:

أ) ١٨ > ٦   ب) −٣ < ٢   جـ) −٦ < −٤

٣) اضربْ كلًّا منْ طرفي المتبايناتِ الآتيةِ في العددِ −٤، واكتبِ المتباينةَ الناتجةَ.

أ) −٣ > −٨   ب) ٧ > −٣,٥   جـ) ٣ < ٧

٤) اقسمْ كلًّا منْ طرفَي المتبايناتِ الآتيةِ على العددِ ٢، واكتبِ المتباينةَ الناتجةَ:

أ) ٧ > −٤   ب) −٣ < −١   جـ) −٥ < صفر

٥) إذا علمتَ أنّ درجاتَ الحرارةِ في فصلِ الشتاءِ في مدينةِ عجلونَ قَدْ تراوحتْ خلالَ أحدِ الأعوامِ بينَ −٢ ، ١٠ درجةَ سِلِسْيوس، وأنَّ درجاتَ الحرارةِ الصغرى والعظمى خلالَ شتاءِ العامِ التالي، كانت أقلَّ بدرجتينِ سِلِسْيوس، اكتبْ المتباينتينِ اللتين تبينان درجة الحرارةِ في كلٍ من العامينِ.

٦) إذا كانَ أقلُّ راتبٍ شهريٍّ للمهندسينَ العاملينَ في إحدى الشركاتِ ٥٠٠ دينارٍ وأكبرُ راتبٍ ٩٠٠ دينارٍ،، وقدْ قررتِ الشركةُ إعطاءَ كلِّ مهندسٍ علاوةً شهريةً بنسبةِ ١٢٪ منْ راتبهِ، اكتبْ متباينةً تبيّنُ الراتبَ قبلَ العلاوةِ ومتباينة تبين الراتب بعد العلاوة.

٢ – ٣ المتباينات الخطيّةُ بمتغيرٍ واحدٍ

النتاجاتُ

- تعرّفُ المتبايناتِ الخطيّةَ بمتغيّرٍ واحدٍ.
- تَحلُّ متبايناتٍ خطيّةً بمتغيرٍ واحدٍ وتمثّلُها على خطِّ الأعدادِ.
- تكوّنُ متباينةً خطيّةً بمتغيّرٍ واحدٍ وتحلُّها.

بدأ موظفٌ عملَه في إحدى المؤسساتِ براتبِ شهريٍّ مقدارُهُ (٤٠٠) دينارٍ، فإذا كانتْ هذهِ المؤسسةُ تمنحُ موظفيها زيادةً شهريةً مقدارها (١٠) دنانيرَ عنْ كلِّ سنةِ خدمةٍ في المؤسسةِ، بحيثُ لا يزيدُ راتبُ الموظفِ الشهريِّ عنْ (٥٠٠) دينارٍ، اكتبِ المتباينةَ التي تُعبّرُ عنِ الراتبِ الشهريِّ للموظّفِ بعدَ س مِنَ السنواتِ.

الراتبُ الشهريُّ للموظّفِ يساوي: ٤٠٠ + ١٠ × س بشرطِ أنّ: ٤٠٠ + ١٠س ≥ ٥٠٠

تُسمَّى ٤٠٠ + ١٠س ≥ ٥٠٠ **متباينةً خطيةً بمتغيرٍ واحدٍ.**

تعريفٌ (٢)

المتباينةُ الخَطيّةُ بمتغيرٍ واحدٍ: هيَ تعبيرٌ جبريٌّ خطيٌّ بمتغيرٍ واحدٍ يحوي إشارةً أو إشارتينِ منْ إشاراتِ التباينِ (< ، > ، ≤ ، ≥) ومجموعةُ حلِّها مجموعاتٌ جزئيّةٌ مِنْ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيّةِ، وحلُّ المتباينةِ هو إيجادُ قيمِ المتغيرِ فيها التي تجعلُ المتباينةَ عبارةً صحيحةً.

ومنَ الأمثلةِ على المتبايناتِ الخطيّةِ بمتغيرٍ واحدٍ:

٦ص + ١ > ٤ ، ع >٥ ، ٣ – ٧س ≥ صفرًا ، ٨ ≥ س + ٥ ≥ ١٠

تدريبٌ ٢–٩

أيُّ المتبايناتِ الآتيةِ متباينةٌ خطيّةٌ بمتغيرٍ واحدٍ؟

أ) ص^{٢} ≥ ٦

ب) ٢س^{٣} + ٨ > صفرٍ

جـ) س + ٢ص ≤ ١٥

د) ٥س – ٣ > ٧

هـ) ٦ع + ١ ≤ ٣

و) س^{٢} + ٢ص > ٥

تعلَّمْ

- قيمُ المتغيرِ في المتباينةِ الخطيّةِ بمتغيرٍ واحدٍ تُختارُ مِنْ مجموعةِ الأعدادِ الحقيقيةِ ح ما لَمْ يردْ خلافُ ذلكَ.

مثالٌ (٢–٧)

هل س = ٣ حلٌّ للمتباينةِ س – ٢ > ٤ ؟

الحلُّ

س – ٢ > ٤

٣ – ٢ > ٤ تعويضُ س بالقيمةِ ٣

١ > ٤ عبارةٌ خاطئةٌ

إذنْ س = ٣ ليستْ حلًّا للمتباينةِ

تدريبٌ ٢–١٠

أيٌّ منَ الأعدادِ ١ ، ٥ ، ٦ ، يُعدُّ حلًّا للمتباينةِ ٢س – ٨ > ٣؟

مثالٌ (٢–٨)

مثّلْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ منَ المتبايناتِ الآتيةِ على خطِّ الأعدادِ:

١) س > ٥

٢) –٧س > ١٤

٣) ٦س + ٣ ≥ ٢١

الحلُّ

١) س > ٥

مجموعةُ الحلِّ = (٥، ∞)

وضعُ دائرةٍ مفتوحةٍ عندَ العددِ (٥) لعدمِ وجودِ إشارةِ مساواةٍ

٢) −٧ س < ١٤

$\frac{-٧س}{-٧} > \frac{١٤}{-٧}$ قسمةُ طرفي المتباينةِ على (−٧)، وقلبُ الإشارةِ منْ (<) إلى (>)

س > −٢

مجموعةُ الحلِّ = (−٢، ∞)

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ

سؤالٌ: لماذا وُضِعَتْ دائرةٌ مفتوحةٌ عندَ العددِ (−٢)؟

٣) ٦س + ٣ ≤ ٢١

٦س ≤ ١٨ طرحُ العددِ (٣) منْ طرفي المتباينةِ

س ≤ ٣ قسمةُ طرفي المتباينةِ على العددِ (٦)

مجموعةُ الحلِّ = (−∞، ٣]

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ

سؤالٌ: لماذا وضِعَتْ دائرةٌ مغلقةٌ عندَ العددِ (٣)؟

تدريبٌ ٢−١١

مثّلْ على خطِّ الأعدادِ مجموعةَ حلِّ كلٍّ منَ المتبايناتِ الآتيةِ:

أ) س ≥ −٢ ب) ٣س < −٢١ جـ) ٢ − ٥س ≤ ١٢

مثالٌ (٢–٩)

جِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ س + ٣ > ٢

الحلُّ

س + ٣ > ٢

س + ٣ – ٣ > ٢ – ٣ طرحُ العددِ (٣) منْ طرفي المتباينةِ

س > –١

مجموعةُ الحلِّ = (–١ ، ∞) كتابةُ مجموعةِ الحلِّ باستعمالِ رمزِ الفترةِ

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ

تدريبٌ ٢–١٢

جِدْ مجموعةَ حلِّ المتبايناتِ الآتيةِ:

أ) س – ٢ < ٤ ب) ٢ص ≥ $\frac{-٦}{٧}$ جـ) ٣ – ٤س ≤ ٢س + ٩

مثالٌ (٢–١٠)

ليحصُلَ طالبٌ على تقديرٍ ممتازٍ في مبحثٍ ما، يجبُ ألّا يقلَّ مجموعُ علاماتِهِ في ثلاثَةِ امتحاناتٍ تعقدُ لهذا المبحثِ عنْ ٢٧٠. فإذا حصلَ الطالبُ على العلامتينِ ٩٣ ، ٨٦ في امتحانينِ. ما أقلُّ علامةٍ يجبُ أنْ يحصلَ عليها هذا الطالبُ في الامتحانِ الثالثِ ليكونَ تقديرُهُ ممتازًا في هذا المبحثِ؟

الحلُّ

٩٣ + ٨٦ + س ≥ ٢٧٠ تكوينُ المتباينةِ

١٧٩ + س ≥ ٢٧٠ تبسيطٌ

س ≥ ٢٧٠ – ١٧٩ طرحُ العددِ (١٧٩) منَ الطرفينِ

س ≥ ٩١

أقلُّ علامةٍ يجبُ أنْ يحصلَ عليها الطالبُ في الامتحانِ الثالثِ هيَ ٩١

تدريبٌ ٢-١٣

حصلتْ مريمُ في مبحثِ الرياضياتِ على العلامةِ (٨٥). وحتى ترفعَ معدلَها العامَّ عليها أنْ تحصلَ في مبحثِ اللغةِ العربيّةِ على علامةٍ تزيدُ (١٢ علامةً) على علامةِ الرياضياتِ على الأقلِّ. فما هيَ أقلُّ علامةٍ يجبُ أنْ تحصلَ عليها في مبحثِ اللّغةِ العربيّةِ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) أيُّ المتبايناتِ الآتيةِ خطيّة بمتغيرٍ واحدٍ؟

أ) ٢س + ٤ > صفرٍ
ب) ٣س + ٥ ص > ٧
جـ) ٥ − ٢ ص ≤ ٧ص
د) س٢ + ٤ ≥ س

٢) حلَّ المتبايناتِ الآتيةَ ومثلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ:

أ) ٣س ≤ ١٥
ب) ٣س − ٢ ≥ ٢س + ٥
جـ) ٢,٣س + ٤,٢ > ١١,١
د) ٤ + ٥س > ٣س − ٨
هـ) س − ٥ ≥ −١٢
و) س − ٢٧ < ٥
ز) (−٣/٤) س ≤ (−٧/٨)
ح) (−٢/١٥) ≤ (٢/٣) − (٢/٥) س

٣) تُريدُ إحدى الشركاتِ التعاقدَ معَ فنيينَ، وهذهِ الشركةُ تمنحُ راتبًا شهريًّا للفنيِّ مقدارُهُ (٣٥٠) دينارًا، بالإضافةِ إلى (١٠) دنانيرَ عنْ كلِّ سنةِ خبرةٍ، بحيثُ لا يزيدُ الراتبُ عنْ (٤٥٠) دينارًا، فإذا أرادَ فنيٌّ لديهِ خبرةٌ (س) منَ السنواتِ التعاقدَ معَ هذهِ الشركةِ، فاكتبِ المتباينةَ التي تبيِّنُ حدودَ راتبهِ عندَ التعاقدِ معَ الشركةِ، واستخدمْ ذلكَ للإجابةِ عنِ الآتي:

أ) هلْ هناكَ فرقٌ بينَ راتبِ فنيٍّ لديهِ خبرةُ (٧) سنواتٍ، وفنيٍّ لديهِ خبرةٌ (٩) سنواتٍ؟ ولماذا؟

ب) كمْ يكونُ راتبُ فنيٍّ خبرتُه (١٧) سنةً؟

٤) اشترى تاجرٌ عددًا منْ علبِ الحلوى بمبلغِ ٢١٢ دينارًا، فإذا علمتَ أنّهُ يبيعُ العلبَةَ الواحدةَ بمبلغِ ٥ دنانيرَ، ما أقلُّ عددٍ منَ العلبِ يجبُ أنْ يبيعَها حتى يُحققَ ربحًا؟

٥) عبِّرْ عنِ الموقفِ الآتي بمتباينةٍ خطيّةٍ بمتغيرٍ واحدٍ ثمَّ حلَّها، ومثِّلْ مجموعةَ الحلِّ على خطِّ الأعدادِ:

"عددانِ صحيحانِ فردِيانِ متتاليانِ مجموعُهما أكبرُ منْ أوْ يساوي ٦٨ "

٦) أرادَ شخصٌ استثمارَ مبلغِ ٢٠٠٠٠ دينارٍ في مشروعينِ تجاريينِ معًا، يدرُّ الأوَّلُ ربحًا سنويًّا بمعدلِ ٦٪، ويدرُّ الثاني ربحًا سنويًّا بمعدلِ ٨٪، ما أكبرُ مبلغٍ يجبُ استثمارُه في المشروعِ الأوَّلِ، بحيثُ يستثمرُ بقيةَ المبلغِ في المشروعِ الثاني، ليكونَ إجماليُّ الربحِ منَ المشروعينِ على الأقلِّ ١٥٠٠ دينارٍ سنويًّا؟

٧) يقدِّمُ متعهدُ بناءٍ عرضينِ إلى العمالِ مقابلَ حفرِ أساساتٍ لإحدى العماراتِ التيْ يقومُ بتنفيذِها، الأولُّ: تقاضي (٢٠) دينارًا مقابلَ العملِ بالإضافةِ إلى ٠,٣ من الدينارِ لكلِّ ساعةِ عملٍ، والثاني: تقاضي ٠,٧ منَ الدينارِ لكلِّ ساعةِ عملٍ.

ما أقلُّ عددٍ منَ الساعاتِ التي تجعلُ الأجرةَ التي يحصلُ عليها العاملُ وفقَ العَرضِ الثاني أكبرَ منَ الأجرةِ التي يحصلُ عليها وفْقَ العَرضِ الأوَّلِ؟

٢ – ٤ المتبايناتُ المركبةُ بمتغيرٍ واحدٍ

النتاجاتُ

- تتعرّفُ المتبايناتِ المركبةَ بمتغيرٍ واحد.
- تحلُّ متبايناتٍ مركبةً بمتغيرٍ واحد وتمثّلُ حلَّها على خطِّ الأعدادِ.

بالرجوعِ إلى دائرةِ الأرصادِ الجوّيةِ، كانت درجاتُ حرارةِ الطقسِ في عمانَ في شهرِ كانونِ الأولِّ في عامِ ٢٠١٣ تتراوحُ بينَ ١٠ و ١٨ درجةً سِلْسيوس.

اكتبْ متباينةً توضحُ فيها درجاتِ الحرارةِ في تلكَ الفترةِ.

تعريفٌ (٣)

المتباينةُ المركبةُ بمتغيرٍ واحدٍ: هيَ متباينةٌ تنتجُ عندَ دمجِ متباينتينِ خطيتينِ بمتغيرٍ واحدٍ.

مثل: ٥ < س < ١٣   −١ < ٢س < −٦

٠ ≤ س + ٦ ≤ ٩   ٧س ≥ ٣س − ١ > −٢ + س

كما تُسمَّى الحدودُ الثلاثةُ للمتباينةِ المركبةِ **أطرافَ المتباينةِ**.

مثالٌ (٢–١١)

جِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينتينِ المركّبتينِ الآتيتينِ:

١) −٣ < ٤س + ١ < ٩   ٢) −١ < ١ − ٢س ≤ ٥

الحلُّ

١) −٣ < ٤س + ١ < ٩

−٤ < ٤س < ٨   طرحُ العددِ (١) منْ جميعِ أطرافِ المتباينةِ

−١ < س < ٢   قسمةُ جميعِ الأطرافِ على العددِ (٤)

مجموعةُ الحلِّ = (−١ ، ٢)   كتابةُ مجموعةِ الحلِّ باستعمالِ رمزِ الفترةِ

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ

٢) −١ < ١ − ٢س ≤ ٥

−٢ < −٢س ≤ ٤ — طرحُ العددِ (١) منْ جميعِ الأطرافِ

١ > س ≥ −٢ — قسمةُ جميعِ الأطرافِ على العددِ (−٢)

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ

مجموعةُ الحلِّ = [−٢ ، ١) — كتابةُ مجموعةِ الحلِّ باستعمالِ رمزِ الفترةِ

تدريبٌ ٢–١٤

جِدْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ منَ المتبايناتِ الآتيةِ:

أ) ٤ < س − ٥ < ١٠

ب) ٥ ≥ ٢س + ١ ≥ −٣

جـ) ٠ < ٣ − س ≤ ٩

مثالٌ (٢–١٢)

حُلَّ المتباينةَ ١٣ > ٥س + ٢ > −١٣

الحلُّ

١٣ > ٥س + ٢ > −١٣

١١ > ٥س > −١٥ — طرحُ العددِ (٢) منْ جميعِ أطرافِ المتباينةِ

٢٫٢ > س > −٣ — قسمةُ جميعِ أطرافِ المتباينةِ على العددِ (٥)

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ

وهذا يعني وجودَ عناصرَ مشتركةٍ بينَ س < ٢٫٢ ، س > −٣، لذا تكونُ مجموعةُ الحلِّ = (−٣ ، ∞) ∩ (−∞، ٢٫٢) = (−٣ ، ٢٫٢)

• تذكَّرْ

- الحرفُ (أو) يعني الاتحادَ ورمزُهُ ∪
- الحرفُ (و) يعني التقاطعَ ورمزُهُ ∩

تدريبٌ ٢–١٥

حلَّ المتباينةَ –١,٨ < ٢,٥س – ١,٢ ≤ ١,٨

مثالٌ (٢–١٣)

جِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ –١٦ < ٢س – ٢ < ١٦

الحلُّ

–١٦ < ٢س – ٢ < ١٦

–١٤ < ٢س < ١٨ جمعُ العددِ (٢) إلى جميعِ أطرافِ المتباينةِ

–٧ < س < ٩ قسمةُ جميعِ أطرافِ المتباينةِ على العددِ (٢)

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ

وهذا يعني وجودَ عناصرَ مشتركةٍ بينَ س > –٧ ، س < ٩ لذا تكونُ

مجموعةُ الحلِّ = (–٧ ، ∞) ∩ (–∞ ، ٩) كتابةُ مجموعةِ الحلِّ باستعمالِ رمزِ الفترةِ

= (–٧ ، ٩)

فكِّرْ وقدِّمْ تبريرًا

إذا كانَ أ ، ب ، جـ ، د ∈ ح، د ≠ صفرًا، وكانتْ أ > ب > جـ فهلْ أ د > ب د > جـ د ؟

تدريبٌ ٢–١٦

جِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: –١ < ٤س – ٧ < ١

مثالٌ (٢–١٤)

جِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ : ٢س – ١ ≤ ٣س + ٦ ≤ ٢س – ٤

الحلُّ

٢س − ١ ≤ ٣س + ٦ ≤ ٢س − ٤ المتباينةُ

٢س − ٧ ≤ ٣س ≤ ٢س − ١٠ طرحُ (٦) منْ جميعِ الأطرافِ

−٧ ≤ س ≤ −١٠ طرحُ (٢س) منْ جميعِ الأطرافِ

لا يوجد أعداد حقيقية أكبر من أو يساوي −٧ وأصغر من أو يساوي −١٠ في الوقت نفسه.

مجموعةُ الحلِّ = (−∞ ، −١٠] ∩ [−٧ ، ∞) كتابةُ مجموعةِ الحلِّ باستعمالِ رمزِ الفترةِ

= ∅

ملاحظةٌ: يمكنُ حلُّ المتباينةِ السابقةِ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

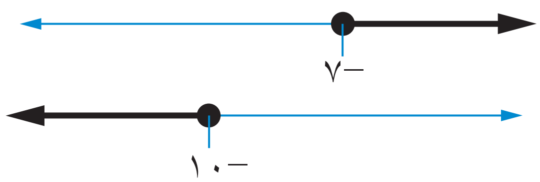
١) تجزئةُ المتباينةِ إلى متباينتينِ هما:

٢س − ١ ≤ ٣س + ٦ ، إذن س ≥ −٧

و

٣س + ٦ ≤ ٢س − ٤ ، إذن س ≤ −١٠

٢) إيجادُ مجموعةِ الحلِّ لكلِّ متباينةٍ على حدة.



٣) إيجادُ الحلِّ المشتركِ بينَ المتباينتينِ وذلكَ منْ خلالِ إيجادِ مجموعةِ التقاطعِ بينَ مجموعتي حلِّ المتباينتينِ.

[−٧، ∞) ∩ (−∞، −١٠] = ∅

تدريبٌ ٢−١٧

جِدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: س − ٣ < ٥س + ٤ < س + ٢

• فكِّرْ

جدْ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ: ٢س −١ < ٣س + ١ < س + ١

تمارينُ ومسائلُ

١) حلَّ المتبايناتِ الآتيةَ:

أ) ٤ < س + ٢ < ٥

ب) صفر ≤ ٢س − ٣ ≤ ١١

جـ) ٥ > ٤س + ٣ ≤ −٥

د) ١ ≤ ٨ − ٢س < ١٠

هـ) −٨ < ٣ − ٥س < ٨

و) ٩ < ٢ − ٤س < −٩

٢) مثّلْ على خطِّ الأعدادِ مجموعةَ حلِّ كلٍّ منَ المتبايناتِ الآتيةِ:

أ) ٢س + ١٠ < ٣س − ٤ < ٢س + ١

ب) ٣س > ٦س + ٧ < ٣س − ٣

جـ) ٠,٩ ≤ س + ١,٨ ≤ −٠,٩

د) −٥ ≤ ٥ − ٢س < ٥

٣) أعلنَ أحدُ تجارِ الجملةِ عنْ حاجتِهِ لموزعِ بضائعَ، وقدَّمَ لهُ عرضينِ: العرضَ الأوَّلَ: راتبًا شهريًّا مقدارُه ٢٥٠ دينارًا معَ عمولةٍ ٣٪ منْ إجماليِّ المبيعاتِ.

العرضَ الثاني: راتبًا شهريًّا مقدارُه ٣٠٠ دينارًا معَ عمولةٍ ٥٪ منَ المبيعاتِ التي تزيدُ عنْ ٣٠٠٠ دينارٍ.

جِدْ إجماليَّ المبيعاتِ الذيْ يجعلُ العرضَ الأوَّلَ أفضلَ منَ العرضِ الثاني، إذا كانَ إجماليُّ المبيعاتِ يزيدُ عنْ ٣٠٠٠ دينارٍ دائمًا.

مراجعةٌ

١) مثّلِ الفتراتِ الآتيةَ على خطِّ الأعدادِ:

أ) (−∞، ٠]

ب) [−٣ ، ٦]

جـ) (−١، ٥)

د) [−٤ ، ٤]

هـ) (−∞، ٧)

و) [−٣ ، ∞)

ز) (١ ، ٧]

ح) (٢ ، ∞)

٢) جِدْ طولَ كلٍّ منَ الفتراتِ الآتيةِ، إنْ أمكنَ:

أ) [−٢ ، ∞)

ب) (٥ ، ١٢]

جـ) (−٦ ، −١)

د) [−٣ ، ٠)

هـ) [−٢ ، ١٠]

و) (−∞، ٤)

٣) أيُّ المتبايناتِ الآتيةِ خطيّةٌ بمتغيرٍ واحدٍ وأيُّها غيرُ ذلكَ؟ ولماذا؟

أ) ٣س − ٥ ≤ ٢ − ٤س

ب) س + ٤ص > ٢

جـ) س^٢ + ٢س ≥ ٦

د) ١/س + ١/ص ≤ ٣

هـ) ٢٧ + س^٢ ≤ س^٣

و) ص − ٤ ≥ ١٢ − ٥ ص

٤) مثّلْ مجموعةَ حلِّ كلٍّ منَ المتبايناتِ الآتيةِ:

أ) س + ٤ ≥ ٢

ب) ٧ − س > ٦ + ٣س

جـ) ١ − ٣س > ٥س

د) ١٠س + ٥ ≤ ٨س − ٧

هـ) ٤ ≥ ٣ص + ١ ≥ −٤ص

و) −٢١ > ٦س + ٣ > ٢١

ز) −٤,١ > ١,٨س + ٤ > ٦,٧

ح) ٦,٥ > ١,٥س − ١ ≥ ٨,٥

٥) أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ وأيُّها غيرُ صحيحةٍ معَ ذكرِ السببِ؟

أ) −٢ < −٤

ب) يوجدُ س عددًا حقيقيًّا بحيثُ ٢ < س < ٣

جـ) ٢ ≤ ٣ < −٥

د) $\frac{١}{أ}$ < أ لكلِّ أ عددٌ حقيقيٌّ غيرُ الصفرِ

٦) ممثلُ شركةِ مبيعاتٍ عُرِضَ عليهِ راتبٌ سنويٌّ قدرُهُ ٤٢٠٠ دينارٍ، بالإضافةِ إلى عمولةٍ قدرُها ٢٪ منْ إجماليِّ المبيعاتِ السنويّةِ التي تزيدُ عنْ ١٠٠٠٠ دينارٍ، أو أنْ يأخذَ ما قيمتُهُ ١٠٪ من إجماليِّ المبيعاتِ. ما أقلُّ قيمةٍ للمبيعاتِ التي تجعلُ العرضَ الثاني أفضلَ مِنَ العرضِ الأوَّلِ؟

٧) اكتبِ المتبايناتِ التي مُثِّلَتْ مجموعةُ حلِّها على خطِّ الأعدادِ كالآتي:

أ)

ب)

جـ)

د)

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكونُ هذا السؤالُ منْ ٥ فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، لكلٍّ منها أربعةُ بدائلَ واحدٌ فقطْ منها صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ لكلٍّ منها:

(١) أيُّ الأعدادِ الآتيةِ ينتمي لمجموعةِ حلِّ المتباينةِ ٣س > ٤ − س؟

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) ٠

(٢) الفترةُ [−٢ ، ٤) هيَ مجموعةُ الحلِّ للمتباينةِ

أ) ٥ > س + ١ > −١
ب) ٥ ≥ س + ١ ≥ −١
جـ) ٥ ≥ س + ١ > −١
د) ٥ > س + ١ ≥ −١

(٣) أيُّ الآتي يمثِّلُ مجموعةَ حلِّ المتباينةِ −٢ ≥ س ≥ ٣؟

أ) 

ب) 

جـ) 

د) 

(٤) طولُ الفترةِ [−٣ ، ٥] يساوي:

أ) ٨ ب) −٨ جـ) ٢ د) −٢

(٥) أيُّ الفتراتِ الآتيةِ هيَ مجموعةُ حلِّ المتباينةِ س − ٢ > ٧؟

أ) (٩، ∞) ب) [٩ ، ∞) جـ) (−∞، ٩) د) (−∞، ٩]

٢) مثِّلْ مجموعةَ حلِّ المتبايناتِ الآتيةِ على خطِّ الأعدادِ:

أ) ٣س + ٤ ≥ ٦
ب) ٣س − ٤ > ٢س + ٥
جـ) ٢س ≤ س + ١
د) ١ − ٤س > ٢
هـ) ١ − ٥س > ٩
و) ٢س + ٣ ≤ ٤

ز) ٦,٢٥ < ٢,٥س + ٥ < ١٧,٥

ح) ٥,٤س – ٦ < ٢,٧س + ٤,٨ ≥ ٥,٤س – ١,٥

ط) ٦ ≥ ٣ – ٥س > −١ ي) −٣ < س – ١ < −٢

٣) جِدْ مجموعةَ الحلِّ للمتباينات الآتيةِ، ثمَّ اكتبْها بذكرِ الصفةِ المميزةِ لها:

أ) ٥,٢س + ٠,٢ ≥ ٢,٨ ب) ١ – ٠,٤س < −١

جـ) ٠,٢س – ٣ ≥ ٣,٥ د) ٢,٨ + ٧س > ٦س – ١,٢

٤) ثمنُ تذكرةِ الدخولِ لمدينةِ الألعابِ الترويحيّةِ (٣) دنانيرَ، وثمنُ تذكرةِ كلِّ لعبةٍ منَ الألعابِ (٧٥) قرشًا، فإذا ذهبتَ إلى مدينةِ الألعابِ ومعكَ ١٥ دينارًا، فما أكبرُ عددٍ منَ الألعابِ يمكنُ أنْ تلعبَها؟

٥) مثلثٌ طولُ قاعدتِهِ (٢٨) سم، وارتفاعُه (ع) سم، جِدْ قيَمَ ع لتكونَ مساحةُ المثلثِ (٥٧٤) سم^{٢} على الأكثرِ.

٦) اشتركَ محمدٌ وأحمدٌ في مسابقةٍ للركضِ وقطعا مسافةَ (٢) كم حولَ مضمارٍ رياضيٍّ، وفازَ أحمدُ بالسباقِ. فإذا كانَ الزمنُ الذي استغرقَهُ محمدٌ في السباقِ (٤) دقائقَ، اكتبِ المتباينةَ التي تصفُ معدلَ سرعةِ أحمدَ.

٣

٣-١ الاقترانُ التربيعيُّ ورسمُ منحناهُ

٣-٢ أصفارُ الاقترانِ التربيعيِّ

٣-٣ حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بيانيًّا

٣-٤ حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بالتحليلِ إلى العواملِ

٣-٥ حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بإكمالِ المربعِ

٣-٦ حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بالقانونِ العامِّ

هلْ تخيلتَ يومًا أنكَ عندما تقذفُ كرةَ السلةِ نحوَ الهدفِ المخصّصِ لها فإنّها ترسمُ مسارًا معيّنًا يشبهُ المسارَ الذي تتخذهُ المياهُ عندَ خروجِها منْ صنبورٍ متجهٍ للأعلى؟ وهلْ تخيلتَ أنَ قذائفَ المدفعيّةِ تتخذُ المسارَ نفسَهُ منذُ لحظةِ إطلاقِها وحتى سقوطِها على الأرضِ؟ وكذلك الحالُ عندَ قذفِ كرةٍ في الهواءِ أو رمي الرمحِ. إنَّ مثلَ هذهِ المساراتِ يُطلقُ عليها اسمُ القطعِ المكافِئِ، ويعبَّرُ عنهُ باقترانٍ تربيعيٍّ. ويمكنُ استخدامُ المعادلاتِ التربيعيةِ المرافقةِ لهذهِ الاقتراناتِ لحسابِ القيمِ القصوى (العظمى والصغرى) في المسائلِ المتعلقةِ بحركةِ هذهِ المقذوفاتِ وما يماثلُها.

منْ هُنا نجدُ أنَّ المعادلاتِ التربيعيةَ تستخدمُ في الكثيرِ منْ أمورِ حياتِنا اليوميةِ، لذا ستتعلمُ في هذهِ الوحدةِ الاقترانَ التربيعيَّ وتمثيلَهُ بيانيًا، وحلَّ المعادلاتِ التربيعيةِ المرافقةِ لهُ.

الوحدةُ الثالثةُ

الاقترانُ التربيعيُّ

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ دراسةِ هذهِ الوحدةِ أَنْ يكونَ قادرًا على:

- تحديدِ إحداثيي رأسِ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ومحورِ تماثلِهِ ونقاطِ تقاطعِهِ معَ محوري الإحداثياتِ، ومجالِ الاقترانِ التربيعيِّ ومداهُ ورسم منحناهُ.
- نمذجةِ مواقفَ حياتيةٍ مستخدمًا الاقترانَ التربيعيَّ.
- حلِّ المعادلةِ التربيعيةِ المرافقةِ للاقترانِ التربيعيِّ، وربطِ جذورِها بأصفارِ الاقترانِ التربيعيِّ مستخدمًا (التحليلَ، والرسمَ، والقانونَ العامَّ، وإكمالَ المربعِ).
- تحديدِ طبيعةِ جذورِ المعادلةِ التربيعيةِ باستخدامِ المميِّزِ.
- استخدامِ البرامجِ الحاسوبيّةِ، لرسمِ الاقتراناتِ التربيعيةِ ودراسةِ خواصِّها.

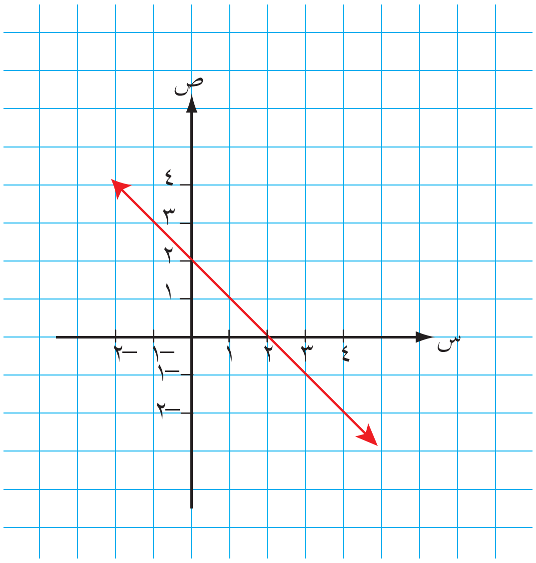
تهيئةٌ

١ صنّفِ المقاديرَ الآتيةَ إلى تربيعيةٍ وغيرِ تربيعيّةٍ:

أ) س – ٢٥   ب) ١٦ – ٤س   جـ) (س – ١)^{٢}

د) ٣س – ٢س^{٢} هـ) ٨س^{٢} – ٤   و) س^{٢} + ٤س – س^{٢} – ٥

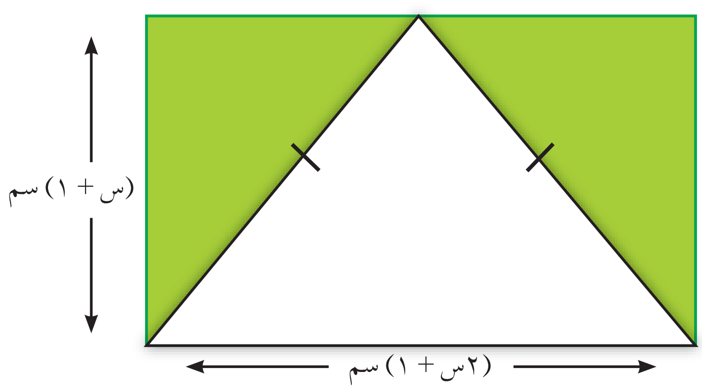
٢ يمثلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ ق، حيثُ ص = ق(س)، استعملِ الرسمَ في إيجادِ قيمةِ كلٍّ ممّا يأتي: ق(٠)، ق(٢)، ق(١)

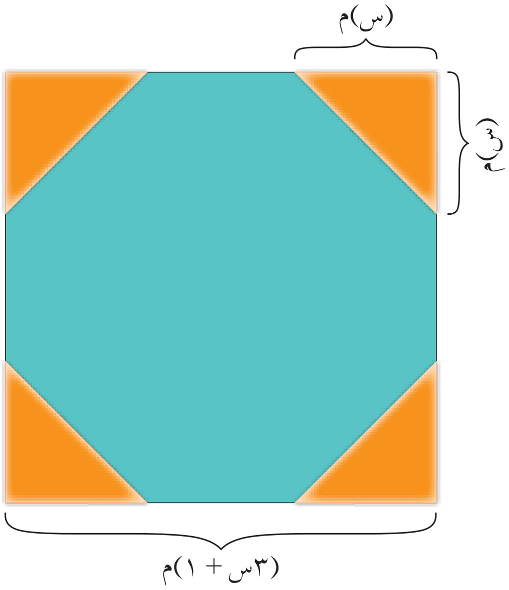


٣ ارسمْ منحنى الاقترانِ هـ، حيثُ هـ(س) = س – ٥

٤ إذا كانَ حاصلُ ضربِ مقدارينِ جبريينِ يساوي س^{٢} – ٥س + ٦ ، وكانَ أحَدهما يساوي (س – ٣)، فما المقدارُ الثاني؟

٥ اعتمدِ الشكلَ الآتي لكتابةِ المقدارِ الجبريِّ الدالِّ على مساحةِ المنطقةِ المظلَّلة.





٦ لوحةٌ إعلانيةٌ مربعةُ الشّكلِ طولُ ضلعِها (٣س + ١)م، قُصتْ منْ زواياها الأربعِ مثلثاتٍ متساويةً، كما في الشكلِ المجاورِ. اكتبْ مساحةَ ما تبقى منَ اللوحةِ الإعلانيةِ بدلالةِ س.

٧ حلّلِ المقاديرَ التربيعيةَ الآتيةَ:

أ) س^{٢} + ٤س + ٤

ب) س^{٢} + ٧س − ٣٠

جـ) ١٢س + س^{٢} + ٢٧

د) س^{٢} + س − ٥٦

هـ) ٩س^{٢} − ٤

و) (س −٣)^{٢} − ٩

ز) س^{٢} + ٨س

٨ إذا كانَ الاقترانُ ق(س) = ٦س − ٧، فَجِدْ قيمةَ س، حيثُ ق(س) = ٥

٣ – ١ الاقترانُ التربيعيُّ ورسمُ منحناهُ

النتاجات

- ترسمُ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ يدويًّا.
- تستخدمُ التكنولوجيا لرسمِ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ.
- تُحددُ إحداثيي الرأسِ ومحورَ التماثلِ ونقاطَ تقاطعِ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ معَ محوري الإحداثياتِ ومجالِهِ ومداهُ.

يمتلكُ أحمدُ سياجًا طولُهُ ٢٠م، ينوي عملَ حظيرةٍ بهذا السياجِ على شكلِ مستطيلٍ، ما أبعادُ الحظيرةِ بحيثُ تكونُ مساحتُها أكبرَ ما يمكنُ؟

تعلّمتَ أنَّ الصورةَ العامةَ لقاعدةِ الاقترانِ الخطيِّ هيَ: ق(س) = أس + ب حيثُ أ ، ب عددانِ حقيقيانِ. أ ≠ صفرًا.

سؤالٌ: أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ اقترانٌ خطيٌّ؟

أ) ق(س) = ٤ س – ٧   ب) هـ(س) = ٢ س – ٤   جـ) ل(س) = ٤ س^{٢} + ٧س + ٢

ماذا تلاحظُ؟

لا بُدَّ أنَكَ لاحظتَ أنَّ الاقتراناتِ في أ ، ب هيَ اقتراناتٌ خطيَّةٌ تختلفُ عنِ الاقترانِ غيرِ الخطيِّ في جـ، وأنَّ العبارةَ ٤س^{٢} + ٧س + ٢ هيَ عبارةٌ تربيعيةٌ. مثلُ هذا الاقترانِ يُسمّى **اقترانًا تربيعيًا**.

تعريفٌ (١)

إذا كان ق: ح ← ح، حيثُ ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ، وكانَتْ أ ، ب ، جـ أعدادًا حقيقةً أ ≠ ٠ فإنَّ الاقترانَ ق يُسمَّى اقترانًا تربيعيًا. ويُسمَّى العددُ أ معاملَ س^{٢}، ويُسمَّى العددُ ب معاملَ س ويُسمَّى العددُ جـ الحدَّ المطلقَ، وبتعبيرٍ عامٍّ تُسمَّى أ ، ب ، جـ معاملاتِ الاقترانِ التربيعيِّ ق. ومجالُ ق هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ ح، ومداهُ مجموعةُ صورِ المجالِ.

مثالٌ (٣-١)

أيُّ الاقترانات الآتيةِ اقترانٌ تربيعيٌّ؟

١) ق(س) = س^{٢} + ٣س + ٧ — ٢) هـ(س) = ٢س − س^{٢}

٣) ع(س) = س + ٤ — ٤) د(س) = ٣س^{٣} + ٩س^{٢} + ١

الحلُّ

١) الاقترانُ ق تربيعيٌّ، لأنَّهُ يمكنُ كتابةُ قاعدتِه على النحوِ الآتي:

ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ، حيثُ أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ٧

٢) الاقترانُ هـ اقترانٌ تربيعيٌّ، لأنَّهُ يمكنُ كتابةُ قاعدتِه على النحوِ الآتي:

هـ(س) = أس^{٢} + ب س + جـ ، حيثُ أ = −١ ، ب = ٢ ، جـ = صفرًا

٣) الاقترانُ ع ليسَ اقترانًا تربيعيًا، لأنّهُ لا يمكنُ كتابةُ قاعدتِهِ على الصورةِ العامةِ للاقترانِ التربيعيِّ.

٤) الاقتران د ليسَ اقترانًا تربيعيًّا، لأنّهُ لا يمكنُ كتابةُ قاعدتِهِ على الصورةِ العامةِ للاقترانِ التربيعيِّ.

تدريبٌ ٣-١

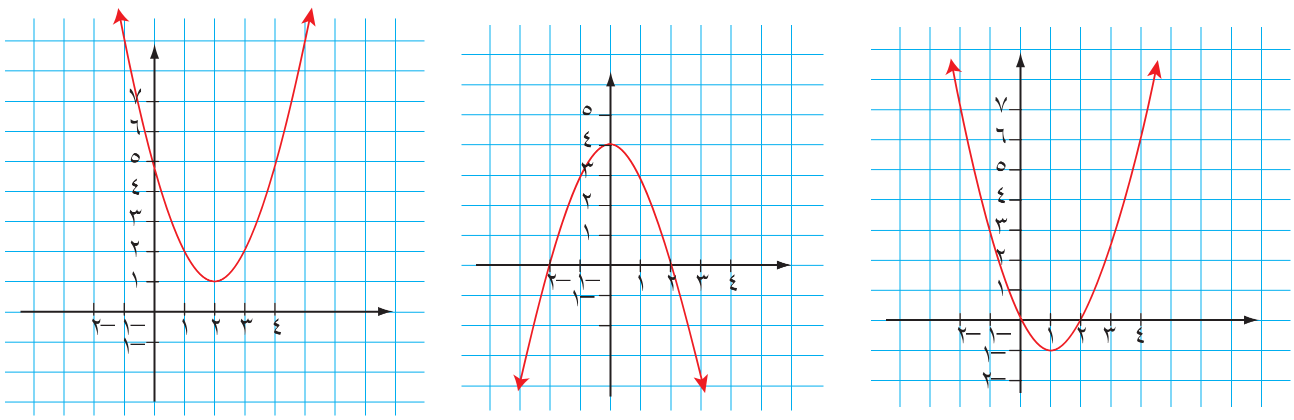
حدّدِ الاقترانَ التربيعيَ في كلٍّ ممّا يأتي، واكتبْ معاملَ كلٍّ منْ س^{٢}، س، والحدَ المطلقَ في كلٍّ منها.

أ) ق(س) = ٢س^{٢} — ب) هـ(س) = $\frac{١}{٢}$س − س^{٢} ، س > ٠

جـ) ك(س) = س^{٢} − ٥س + $\frac{١}{٢}$

نشاطٌ (٣-١)

يبينُ الشكلُ (٣ − ١) منحنياتٍ لثلاثةِ اقتراناتٍ تربيعيةٍ:



(أ) ق(س) = س^{٢} − ٢س   (ب) ل(س) = ٤ − س^{٢} (جـ) هـ(س) = س^{٢} − ٤س + ٥

الشكلُ (٣ − ١)

١) استعنْ بالرسمِ لتحديدِ إحداثيي رأسِ المنحنى، ونقاطِ التقاطعِ معَ محورِ السيناتِ، ونقاطِ التقاطعِ معَ محورِ الصادات.

٢) معتمدًا على الرّسمِ أكملْ تعبئةَ الجدولِ (٣−١)

الجدول (٣ − ١):

الشكلُ	قيمةٌ عظمى أوْ صغرى	مدى الاقترانِ	إشارةُ أ	معادلةُ محورِ التماثلِ	اتجاهُ فتحةِ المنحنى
أ	صغرى = −١	ص ≥ −١	موجبةٌ	س = ١	إلى الأعلى
ب					
جـ					

ماذا تلاحظُ؟

نشاطٌ (٣-٢)

١) افتحْ تطبيقَ الآلةِ الراسمةِ منْ خلالِ منظومةِ الإيديويف (EduWave).

٢) استخدمْ الآلةَ الراسمةَ في رسمِ منحنى الاقترانِ:

ق(س) = س^{٢} + ١، في الفترةِ [−٢ ، ٢]، منْ خلالِ تطبيقِ الخطواتِ الآتيةِ:

أ) أدخلْ معاملاتِ $س^٢$ ، س والحدَّ المطلقَ في الصيغةِ ١

ب) حددْ مجالَ الاقترانِ.

جـ) استعنْ بالرسمِ لتحديدِ إحداثيي نقطةِ الرأسِ، معادلةِ محورِ التماثلِ والقيمةِ الصغرى للاقترانِ ق.

د) جِدْ قيمةَ $س = \frac{-ب}{٢أ}$

ماذا تلاحظُ؟

ليكن $ق(س) = أس^٢ + ب س + جـ$ اقترانًا تربيعيًا فإنّهُ:

- إذا كانت أ > ٠، فإنَّ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق يكونُ مفتوحًا للأعلى، ويكونُ له قيمةٌ صغرى عند $س = \frac{-ب}{٢أ}$ ، هي $ق(\frac{-ب}{٢أ})$، ويكونُ مدى الاقترانِ = $\{ص: ص \geq ق(\frac{-ب}{٢أ})\}$

- إذا كانتْ أ < ٠، فإنّ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق يكونُ مفتوحًا للأسفلِ.

  ويكونُ له قيمةٌ عظمى عندَ $س = \frac{-ب}{٢أ}$ هي $ق(\frac{-ب}{٢أ})$، ويكونُ مدى الاقترانِ $= \{ص: ص \leq ق(\frac{-ب}{٢أ})\}$

- معادلةُ محورِ التماثلِ هيَ $س = \frac{-ب}{٢أ}$ وتُسمَّى نقطةُ تقاطعِ ق معَ محورِ التماثلِ نقطةَ رأسِ المنحنى، وإحداثياها $(\frac{-ب}{٢أ}، ق(\frac{-ب}{٢أ}))$

مثالٌ (٣-٢)

استخدمِ الآلَةَ الراسمةَ في رسمِ منحنى الاقترانِ: $ق(س) = س^٢ - ٢س$، في الفترةِ [-٣ ، ٣].

استعنْ بالرسمِ لتحديدِ:

١) إحداثيي نَقطةِ الرأسِ.

٢) معادلةِ محورِ التماثلِ.

٣) القيمةِ الصغرى للاقترانِ ق.

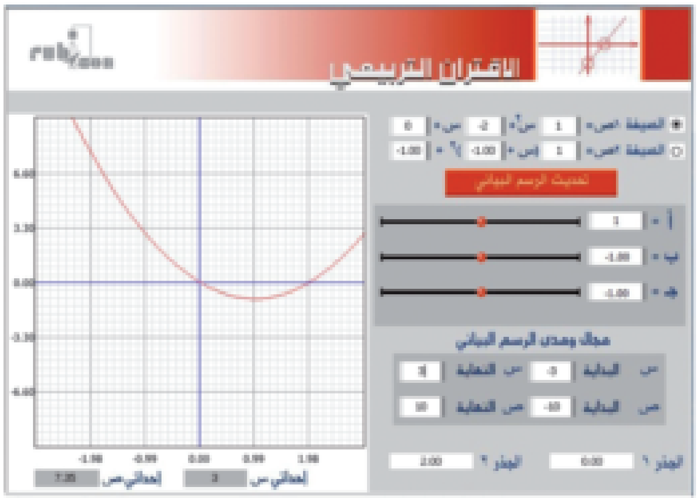
الحلُّ

بعدَ إدخالِ البياناتِ سيظْهَرُ الرسمُ الذي يمثِّلُ منحنى الاقترانِ ق.

١) إحداثيا نقطة الرأسِ (١ ، −١)

٢) معادلةُ محورِ التماثلِ س = ١

٣) القيمةُ الصغرى للاقترانِ ق هي ق(١) = −١



الشكلُ (٣ − ٢)

مثالٌ (٣−٣)

ارسمْ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق، حيثُ ق(س) = س^{٢} − ٤س + ١

الحلُّ

لرسمِ منحنى الاقترانِ ق، اتبعِ الخطواتِ الآتيةَ:

١) اكتبْ معاملاتِ ق: أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ١

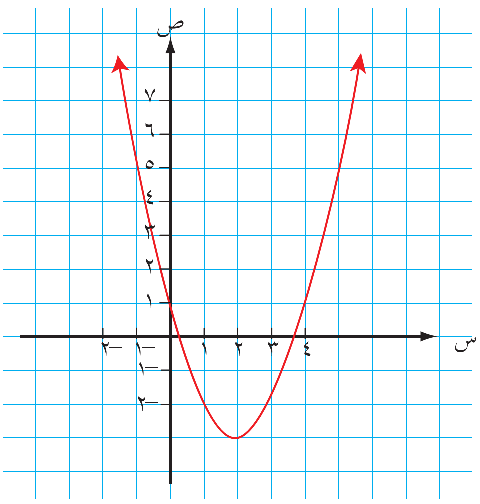
جِدْ معادلةَ محورِ التماثلِ س = $\frac{-ب}{٢\ أ}$ = $\frac{-(-٤)}{٢ \times ١}$ ، أيْ أنَّ س = ٢

٢) جِدْ ق(٢) = ٢^{٢} − ٤ × ٢ + ١ = −٣ ، وعليه فإنَّ إحداثيي الرأسِ (٢ ، −٣)

٣) كوِّنْ جدولًا كالآتي:

س	٠	١	٢	٣	٤
ص = ق(س)	١	−٢	−٣	−٢	١

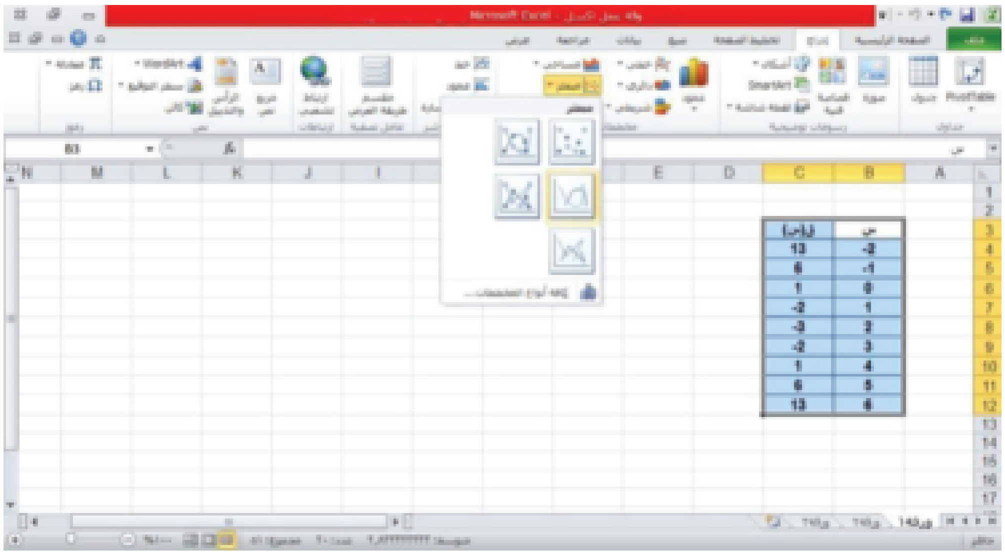
٤) عيِّنْ القيمَ في الجدولِ في نقاطٍ على المستوى الإِحداثيِّ، ثُمَّ صِلْ بينَها بخطٍّ منحنٍ أملسَ، فيكونُ التمثيلُ البيانيُّ لمنحنى الاقترانِ ق. كما في الشكلِ (٣ − ٣).



الشكلُ (٣ − ٣)

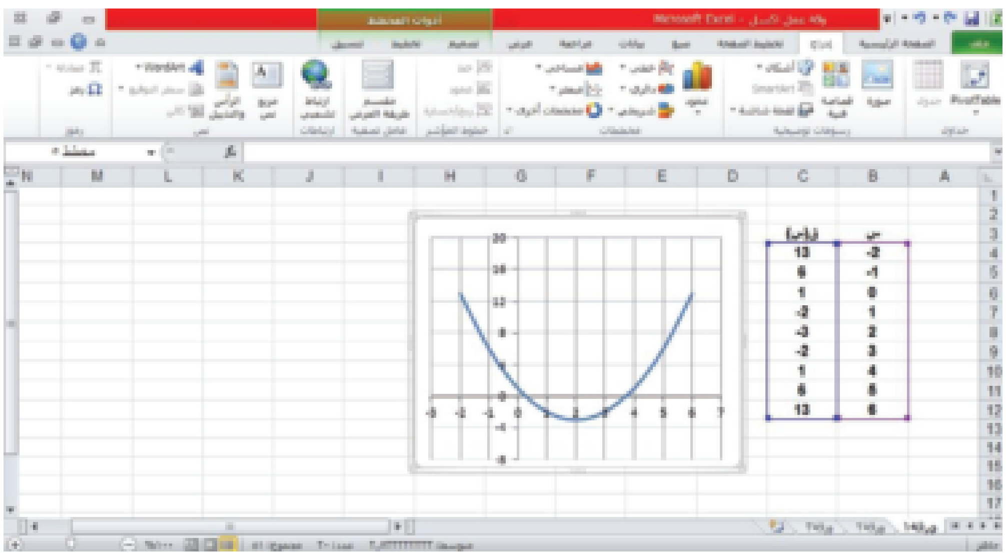
تأكّدْ مِنْ تمثيلِك لمنحنى الاقترانِ ق بإدخالِ بياناتِ الجدولِ في جدولٍ مماثلٍ في صفحةِ برنامجِ إكسلَ (Excel)، ثمَّ ظلّلِ الجدولَ واخترْ مجموعةَ مخطّطاتٍ مِنْ تبويبةِ إدراجٍ (Insert).

وانقرْ على مبعثرٍ ثمَّ اخترْ نوعَ المخططِ المناسبِ المبيّنِ في الشكلِ (٣ – ٤ / أ)



الشكلُ (٣ – ٤/أ)

ويمكنُكَ عملُ تنسيقٍ تحصلُ مِنْ خلالِهِ على المنحنى في الشاشةِ كما في الشكلِ (٣ – ٤/ب)



الشكلُ (٣ – ٤/ب)

تدريبٌ (٣–٢)

ارسمْ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق(س) = س^{٢} + ٤ س – ٥

ثمَّ تأكدْ مِنَ الرسمِ مستخدمًا برنامجَ إكسلَ (Excel).

مثالٌ (٣–٤)

إذا كانَ ق(س) = ٤س – س^{٢} + ١

١) هلْ منحنى الاقترانِ ق مفتوحٌ إلى الأعلى أمْ إلى الأسفلِ؟

٢) ما القيمةُ العظمى للاقترانِ ق إنْ وجدتْ؟

٣) ما مدى الاقترانِ ق؟

الحلُّ

اكتبْ الاقترانَ ق بالصورةِ العامةِ للاقترانِ التربيعيِّ حيثُ :

ق(س) = –س^{٢} + ٤ س + ١ ، أ = –١ ، ب = ٤ ، جـ = ١

١) بما أنَّ أ = –١ < ٠، فإنَّ منحنى الاقترانِ يكونُ مفتوحًا إلى الأسفلِ.

٢) بما أنَّ منحنى الاقترانِ ق مفتوحٌ إلى الأسفلِ، فإنَّ للاقترانِ قيمةً عظمى

عند س = $\frac{-ب}{٢ أ}$ أيْ عندَ س = $\frac{-٤}{٢(-١)}$ = ٢ وهيَ ق(٢) = ٥

٣) مدى الاقترانِ ق هوَ {ص: ص ≤ ٥}، لماذا؟

تدريبٌ (٣–٣)

إذا كانَ ق اقترانًا تربيعيًا، حيثُ ق(س) = س^{٢} + ٢ س

أ) هلْ منحنى الاقترانِ ق مفتوحٌ إلى الأعلى أمْ إلى الأسفلِ؟

ب) هلْ للاقترانِ ق قيمةٌ صغرى أم قيمةٌ عظمى؟ جِدْها.

جـ) ما مَدى الاقترانِ ق؟

تدريبٌ ٣–٤

إذا كانَ ق اقترانًا تربيعيًا، قيمتُه العظمى تساوي ٤ ومعادلةُ محورِ تماثلِهِ هيَ س = ٣، ارسمْ رسمًا تقريبيًّا لمنحنى الاقترانِ ق.

تدريبٌ ٣–٥

استخدمِ الآلَةَ الراسمةَ لرسم منحنى الاقترانِ التربيعيِّ: ق(س) = ٢س – س^{٢}.
معتمدًا على الرسمِ جِدْ إحداثيي نقطةِ الرأسِ، ومعادلةَ محورِ التماثلِ، والقيمةَ العظمى للاقترانِ ق.

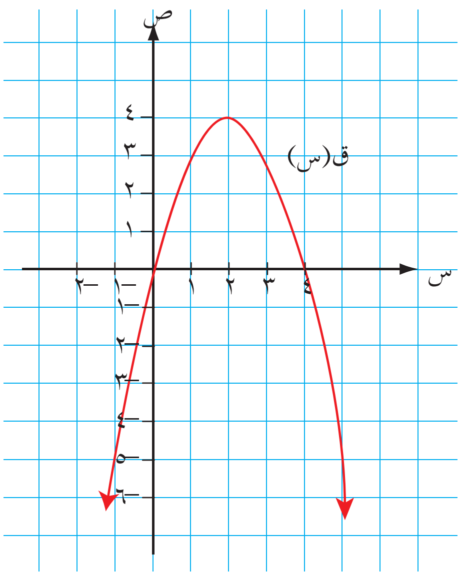
مثالٌ (٣–٥)

إذا كانَ ق(س) = ٤س – س^{٢}

١) ارسمْ منحنى الاقترانِ ق مستعملًا برنامجَ إكسلَ.

٢) ما الإحداثيُّ السينيُّ لنقاطِ تقاطعِ منحنى الاقترانِ ق معَ محورِ السيناتِ؟

٣) ما نقطةُ تقاطعِ منحنى الاقترانِ ق معَ محورِ الصاداتِ؟



الشكلُ (٣ – ٥)

الحلُّ

١) الشكلُ (٣ – ٥) يبيّنُ رسماً لمنحنى الاقترانِ ق.

٢) منْ خلالِ الشكلِ تلاحظُ أنَّ منحنى الاقترانِ ق يقطعُ محورَ السيناتِ عندما س = ٠ ، س = ٤

٣) تلاحظُ أنَّ منحنى الاقترانِ ق يقطعُ محورَ الصاداتِ عندَ النقطةِ (٠ ، ٠)

تدريبٌ ٣-٦

إذا كانَ ق(س) $= \frac{١}{٢}$ س^٢ − ٢س

أ) استعملْ برنامجَ إكسلَ في رسمِ منحنى الاقترانِ ق.

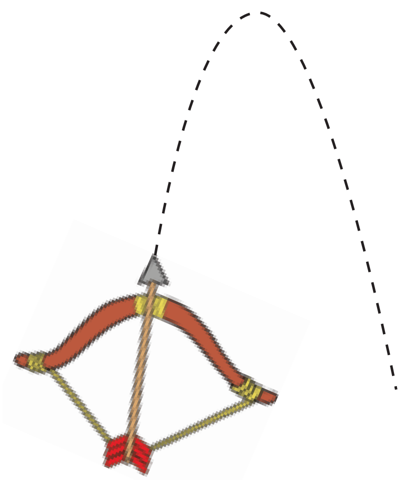
ب) ما النقطُ التي يقطعُ عندها المنحنى محورَ السيناتِ؟

جـ) ما النقطةُ التي يقطعُ عندها المنحنى محورَ الصاداتِ؟

إذا قُذفَ جسيمٌ إلى الأعلى، فإنّ ارتفاعَ الجسيم عندَ لحظةٍ ما، يكونُ مرتبطًا بزمنِ تلكَ اللحظةِ، أيْ أنَّ الارتفاعَ يكونُ اقترانًا متغيرُهُ الزمنُ ويكونُ الاقترانُ تربيعيًّا. ويمكنُ نمذجةُ مواقفَ حياتيةٍ باستخدامِ الاقترانِ التربيعيِّ، كما في المثالِ الآتي:

مثالٌ (٣-٦)

في لعبةِ الرِّمايةِ استخدمَ عزُّ الدينِ قوسًا لقذفِ سهمٍ إلى الأعلى بسرعةٍ ابتدائيةٍ قدرُها ٤٠ مترًا/ثانيةً وفقَ العلاقةِ ل = ٤٠ن − ٥ن^٢، حيثُ ن الزمنُ بالثواني، ل الارتفاعُ بالأمتارِ، ما أقصى ارتفاعٍ يمكنُ أن يصلَهُ السهمُ؟ انظرِ الشكلَ (٣ − ٦).



الشكل (٣ − ٦)

الحلُّ

اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ ل على الصورةِ ل(ن) = −٥ن^٢ + ٤٠ن

أ = −٥ > ٠ ، ب = ٤٠ ، جـ = ٠

بما أنَّ أ > ٠ ، فإنَّ للاقترانِ ل قيمةٌ عظمى

عندما ن = $\frac{-ب}{٢أ}$

$= \frac{-٤٠}{٢ \times -٥}$ = ٤ ثوانٍ

إذن أقصى ارتفاعٍ يصلُ إليهِ السهمُ = −٥ × (٤)^٢ + ٤٠ × ٤

= −٨٠ + ١٦٠ = ٨٠ مترًا

تمارينُ ومسائلُ

١) أيُّ الاقترانات الآتيةِ اقترانٌ تربيعيٌّ؟

أ) ق(س) = س$^{\frac{١}{٢}}$ + س ، س > ٠

ب) هـ(س) = س(س − ١) + ٥

جـ) ل(س) = ٢س + ١

د) ع(س) = س^{٢}(٣ − س^{٢}) + س + ٤

٢) ما معادلةُ محورِ تماثلِ الاقترانِ التربيعيِّ ق(س) = س^{٢} + ٠٫٢٥ + س؟

٣) ما مجالُ ومدى الاقترانِ التربيعيِّ ق(س) = ١ − س^{٢}؟

٤) إذا كان ق: ح ⟵ ح، حيثُ ق(س) = س^{٢} − ٥س + ٤ فجِدْ ق(−٢) ، ق(١)، ق(٤)

٥) جدْ معادلةَ محورِ التماثلِ، ورأسَ المنحنى، والقيمةَ العظمى أوْ القيمةَ الصغرى، والمجالَ، والمدى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

أ) ل(س) = س^{٢} + ٦س − ٧

ب) و(س) = ٢س − س^{٢} + ٤

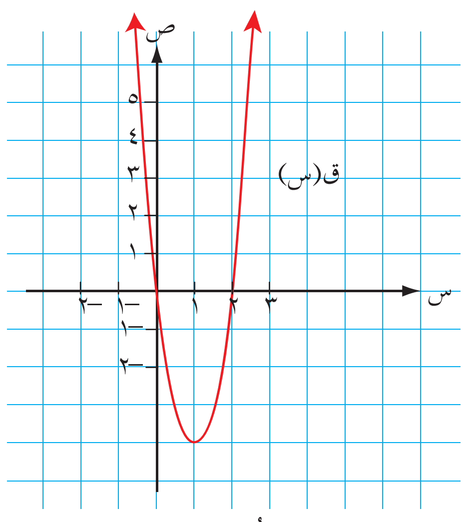
جـ) هـ(س) = س^{٢}

٦) ارسمْ منحنى الاقتراناتِ الآتيةِ:

أ) ق(س) = (س + ٢)^{٢} − ١

ب) هـ(س) = س^{٢} − ٢س + ٤

٧) يبينُ الشكلُ (٣ − ٧) منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق، اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ ق معتمدًا على الرسمِ.



الشكلُ (٣ − ٧)

٨) إذا علمتَ أنَّ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق يقطعُ محورَ السيناتِ عندما س = –٢، س = ٢، ويمرُّ بالنقطةِ (١ ، –٣). جِدْ قاعدةَ الاقترانِ ق، ثمَّ ارسمْ منحناهُ مستخدمًا برنامجَ إكسلَ.

٩) قُذِفَ جسيمٌ إلى أعلى وفقَ العلاقةِ: ف(ن) = ٨٠ن – ٥ن^{٢} ، حيثُ ف: الارتفاعُ بالأمتار، ن : الزمنُ بالثواني. جِدْ أقصى ارتفاعٍ يصلُ إليه الجسيمُ.

١٠) جِدِ العددينِ اللذينِ مجموعُهما ٤٠ وحاصلُ ضربِهما أكبرُ ما يمكنُ.

١١) اتفقتْ شركةُ استيرادٍ وتصديرٍ معَ أحدِ المصانعِ على استيرادِ نوعٍ منَ الماكناتِ، بشرطِ أن يكونَ مقدارُ ما تربحُهُ الشركةُ (ق) (مُقدرًا بآلافِ الدنانيرِ) مرتبطًا معَ الزمنِ اللّازمِ للاستيرادِ (ن) (مُقدرًا بالأسابيعِ) حسبَ العلاقةِ، ق(ن) = ٤ن – ن^{٢}، ما الزمنُ اللازمُ لتحصلَ الشركةُ على أكبرِ ربحٍ ممكنٍ؟

١٢) حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

٣ – ٢

أصفارُ الاقترانِ التربيعيِّ

النتاجاتُ

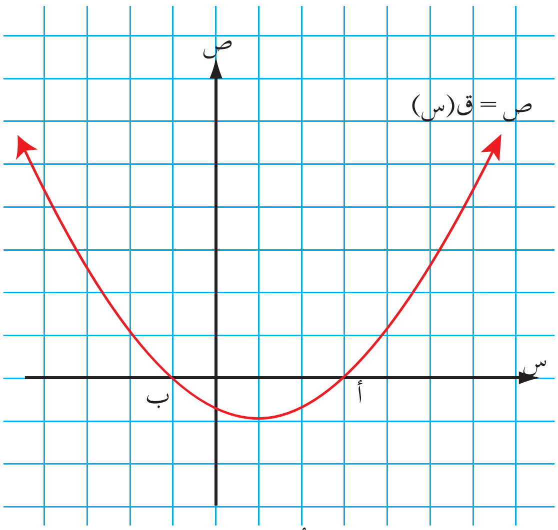
- تَجِدُ أصفارَ الاقترانِ التربيعيِّ من خلالِ رسمِ منحناهُ.

تأملِ الشكلَ (٣ – ٨) الذي يمثلُ رسمَ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق.

أينَ يقطعُ منحنى الاقترانِ ق محورَ السيناتِ؟

ما إحداثيا النقطةِ أ؟

ما إحداثيا النقطةِ ب؟



الشكلُ (٣ – ٨)

تلاحظُ منَ الرسمِ أنَّ الإحداثيَّ الصاديَّ لكلٍّ منَ النقطتينِ أ ، ب يساوي صفرًا، وهذا يعني أنَّ ق(أ) = ٠ ، و ق(ب) = ٠

ويُسمى العددانِ أ ، ب **أصفارَ الاقترانِ التربيعيِّ ق** الممثلِ في الشكلِ (٣ – ٨)

تعريفٌ (٢)

إذا كانَ ق اقترانًا تربيعيًا، فإنَّ الإحداثيَّ السينيَّ لنقطِ تقاطعِ منحنى الاقترانِ معَ محورِ السيناتِ تُمثّلُ أصفارَ هذا الاقترانِ.

أيْ أنَّ: العددَ $س_١$ يسمى صفرًا للاقترانِ ق إذا كانَ ق($س_١$) = ٠ حيثُ $س_١$ عددٌ حقيقيٌّ.

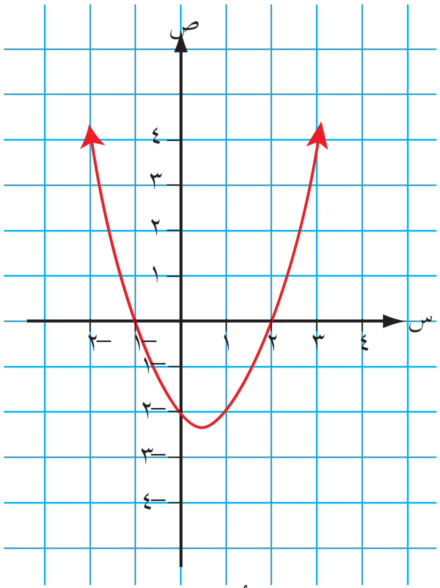
مثالٌ (٣–٧)

ارسمْ منحنى الاقترانِ ق(س) = $س^٢$ – س – ٢ ، ثمَّ اعتمدِ على الرسمِ في إيجادِ أصفارِه.

الحلُّ

منَ الشكلِ (٣ – ٩) تلاحظُ أنَّ صفري الاقترانِ ق هما:

س = −١ ، س = ٢



الشكلُ (٣ – ٩)

تدريبٌ ٣–٧

ارسمْ منحنى الاقترانِ ق بيانيًّا، حيثُ ق(س) = س٢ – ٤س، ثمَّ اعتمدْ على الرسمِ في إيجادِ أصفارِ الاقترانِ ق.

مثالٌ (٣–٨)

تأكدْ منْ أنَّ العددَ (−٥) صفرٌ للاقترانِ ق(س) = ٢س٢ + ١١س + ٥

الحلُّ

ق(−٥) = ٢(−٥)٢ + ١١ × (−٥) + ٥ = ٥٠ – ٥٥ + ٥ = ٠

إذنْ العددُ (−٥) صفرٌ للاقترانِ ق.

تدريبٌ ٣–٨

إذا علمتَ أنَّ العددَ (٧) صفرٌ للاقترانِ ق(س) = أس٢ – ٤س – ٢١، فَجِدْ قيمةَ الثابتِ أ.

سؤالٌ: ما العلاقة بين أصفارِ الاقترانِ ق والمقطع السيني لمنحنى ق؟

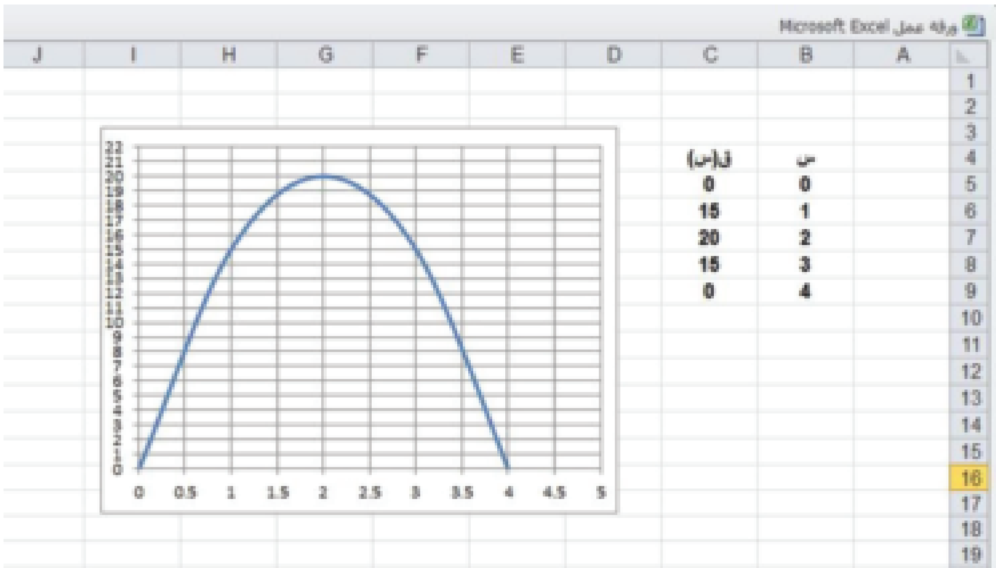
مثالٌ (٣–٩)

قذفَتْ كرةٌ إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارُها ٢٠م/ث، فإذا كانَ ارتفاعُ الكرةِ (ف) بالأمتارِ بعدَ (ن) منَ الثواني معطى وفقًا للقاعدة:

ف: ف(ن) = ٢٠ن – ٥ن^{٢}، فمتى ستعودُ الكرةُ إلى سطحِ الأرضِ؟ وما أقصى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ تصلَهُ؟

الحلُّ

باستخدام برنامجِ إكسلَ (Excel) فإنَّ رسمَ منحنى الاقترانِ ق يكونُ كما في الشكلِ (٣–١٠)، تلاحظُ منَ الشكلِ أنَّ الكرةَ ستعودُ إلى سطحِ الأرضِ عندما ن = ٤ ثوانٍ، وأمّا أقصى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ تصلَهُ فيساوي ٢٠ مترًا.



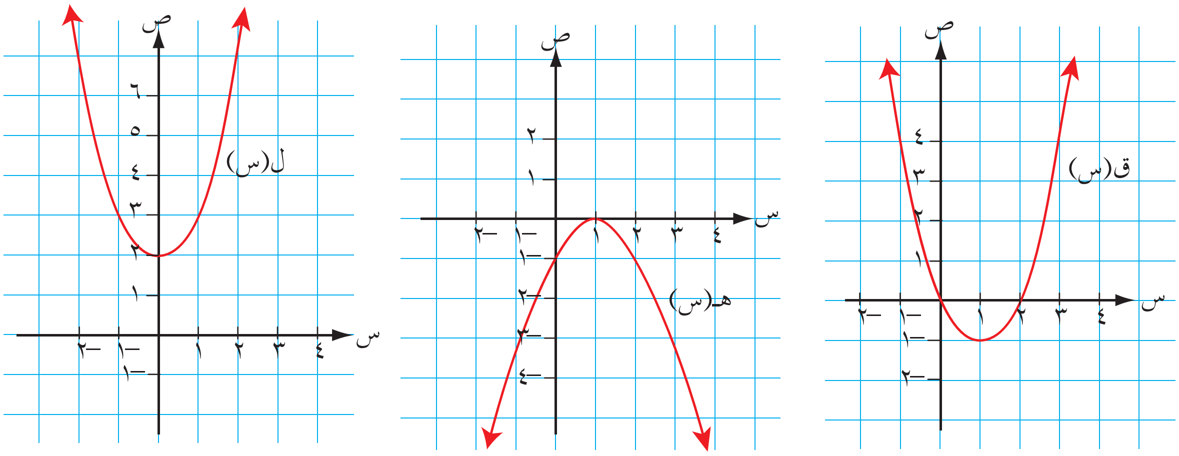
الشكلُ (٣ – ١٠)

تدريبٌ ٣–٩

يبيعُ مربي دواجنَ (س) بيضةً يوميًا، إذا كانَ الربحُ الذي سيحصلُ عليه عندَ بيعها ممثلًا بالعلاقةِ ص = ٤٠٠س – س^{٢} (قرشًا). استخدمْ برنامجَ إكسلَ (Excel) لمعرفةِ عددِ البيضِ اللازمِ بيعُهُ لتحقيقِ أكبرِ ربحٍ ممكنٍ، وما مقدارُ الربحِ آنذاك؟ علمًا بأن عددَ البيضِ المبيعِ يوميًا يتراوح بين ١٠٠ و ٢٥٠ بيضة.

تمارينُ ومسائلُ

١) الشكلُ (٣– ١١) يبينُ منحنياتِ ثلاثةِ اقتراناتٍ تربيعيّةٍ. ما أصفارُ كلٍّ منها؟



الشكلُ (٣ – ١١)

٢) هلْ العددُ (١) صفرٌ للاقترانِ ق(س) = ٥س^{٢} + س – ٦؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٣) ارسمْ منحنى الاقتراناتِ الآتيةِ، ثمَّ جِدْ أصفارَ كلٍّ منها:

أ) ق(س) = س^{٢}

ب) هـ(س) = س – $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

جـ) ل(س) = ٤ + س^{٢} – ٤س

٤) إذا كانَ العددُ ٢ صفرًا للاقترانِ ق(س) = أس^{٢} + ب س + ٦ وكانَ ق(١) = ٢، فَجِدْ قيمةَ كلٍّ منَ العددينِ الحقيقينِ أ ، ب

٥) يتغيرُ بعدا مستطيلٍ، بحيثُ يبقى محيطُهُ ٢٤سم، جِدْ طولَهُ عندما تصبحُ مساحتُه ٢٠سم^{٢}.

٦) أُضيفَ مربعُ العددِ الموجبِ س إلى العددِ ٢٥، وطُرِحَ منَ الناتجِ ١٠ أمثالِ س، وكان ناتجُ الطرحِ صفرًا، كيفَ يمكنُكَ معرفةُ قيمةِ س؟

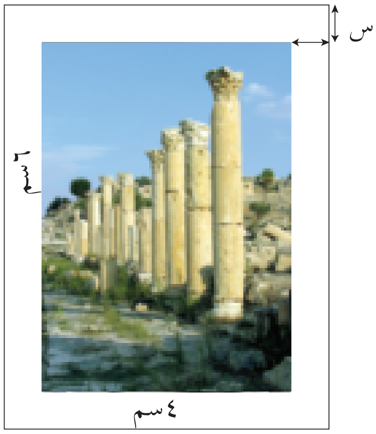
٣ – ٣ حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ بيانيًّا

النتاجاتُ

- تحلُّ معادلةً تربيعيةً بالرسم.
- تستخدمُ الرسمَ لإيجادِ نقطةِ تقاطعِ منحنيين.

يُرادُ إحاطةُ صورةٌ مستطيلةُ الشكلِ طولُها ٦سم وعرضها ٤سم، بإطارٍ عرضُهُ متساوٍ على الأطرافِ جميعِها.

إذا كانَتْ مساحةُ الإطارِ مع الصورةِ تساوي مثلَيْ مساحةِ الصورةِ، فجِدْ عرضَ الإطارِ.



الصورةُ العامَّةُ للمعادلةِ الخطيَّةِ بمتغيرٍ واحدٍ: أس + ب = صفرًا، أ ≠ ٠

سؤالٌ: أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ معادلةٌ خطيَّةٌ بمتغيّرٍ واحدٍ؟

أ) ٢س + ٤ = ٠ ب) –٥س + ٨ = ٠ جـ) –٧س^٢ + ٩س + ٤ = ٠

ماذا تلاحظُ؟

لا بدَّ أنكَ لاحظتَ أنَّ المعادلاتِ في أ ، ب خطيّةٌ، لكنِ المعادلةَ –٧س^٢ + ٩س + ٤ = ٠ ليستْ معادلةً خطيّةً

ولاحظْ أنَّ –٧س^٢ + ٩س + ٤ هيَ عبارةٌ تربيعيةٌ، ومنها نحصلُ على المعادلةِ:

–٧س^٢ + ٩س + ٤ = ٠

وتُسمّى مثلُ هذهِ المعادلةِ **معادلةً تربيعيةً**.

تعريفٌ (٣)

الصورةُ العامّةُ للمعادلةِ التربيعيةِ في متغيرٍ واحدٍ هيَ: أس^٢ + ب س + جـ = ٠

حيثُ أ ≠ ٠ ويُسمَّى العددُ س$_١$ حلًا أوْ جذرًا للمعادلةِ إذا كانَ أس$_١^٢$ + ب س$_١$ + جـ = ٠

نشاطٌ (٣-٣)

إذا علمتَ أنَّ: $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$ معادلةٌ تربيعيةٌ

ارسمْ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ $ق(س) = س^٢ - ٣س + ٢$

حدِّدْ أصفارَ الاقترانِ ق معتمدًا على الرسمِ.

سؤالٌ: ما علاقةُ أصفارِ الاقترانِ ق بجذورِ المعادلةِ التربيعةِ الواردةِ في النشاطِ (٣-٣)؟

إذا كانَ $ق(س) = أس^٢ + ب س + جـ$، فإنَّ المعادلةَ $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ تُسمّى **المعادلةَ المرافقةَ للاقترانِ ق.**

لاحظْ أنَّ أصفارَ الاقترانِ ق هي جذورُ المعادلةِ المرافقةِ للاقترانِ ق. وعليهِ فإنّهُ لحلِّ المعادلةِ التربيعيةِ بالرسمِ عليكَ القيامُ بالخطواتِ الآتيةِ:

١) كتابةِ قاعدةِ الاقترانِ التربيعيِّ الذي تكونُ هذهِ المعادلةُ مرافقةً لهُ.

٢) رسمِ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ.

٣) تحديدِ أصفارِ الاقترانِ منَ الرسمِ، فتكونُ هذهِ الأصفارُ جذورًا للمعادلةِ التربيعيةِ.

مثالٌ (٣-١٠)

حُلَّ المعادلةَ التربيعيةَ: $س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$ بالرسمِ

الحلُّ

ليكنْ $ق(س) = س^٢ - ٢س - ٣$

انظرِ الشكلَ (٣ - ١٢)، تلاحظُ أنَّ منحنى الاقترانِ ق

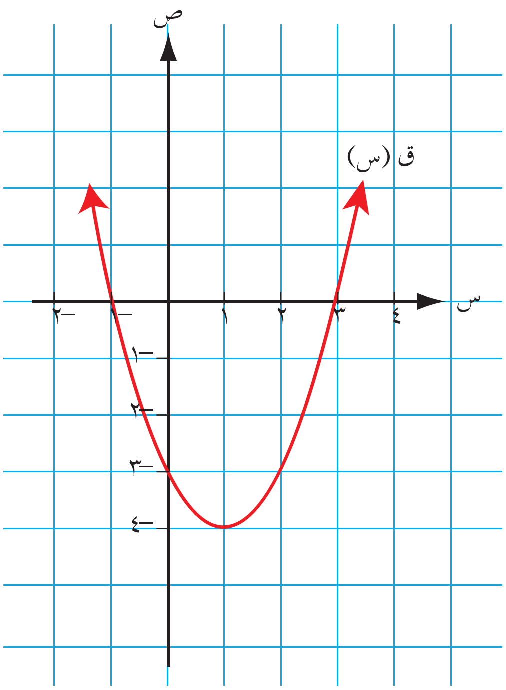
قطعَ محورَ السيناتِ عندما $س = -١$، $س = ٣$

وبناءً على ذلكَ فإنَّ للاقترانِ صفرينِ هما:

$س = -١$ ، $س = ٣$

فيكونُ $س = -١$ ، $س = ٣$ هما حلّانِ (جذرانِ) للمعادلةِ.

إذن مجموعةُ حلِّ المعادلةِ = $\{-١، ٣\}$



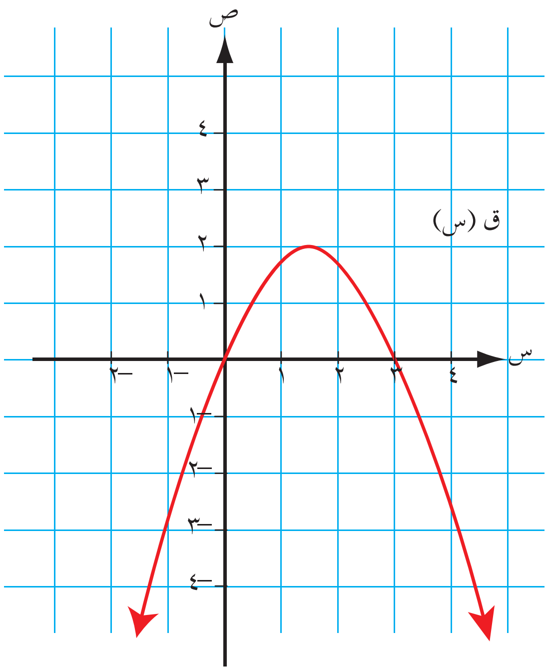
الشكلُ (٣ - ١٢)

تدريبٌ ٣–١٠

حُلَّ المعادلةَ التربيعيةَ ٢س – س٢ – ١ = ٠ بالرسمِ.

مثالٌ (٣–١١)

يبينُ الشكلُ (٣–١٣) منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق، جِدْ حلَّ المعادلةِ ق(س) = ٠ معتمدًا على الشكلِ.



الشكلُ (٣ – ١٣)

الحلُّ

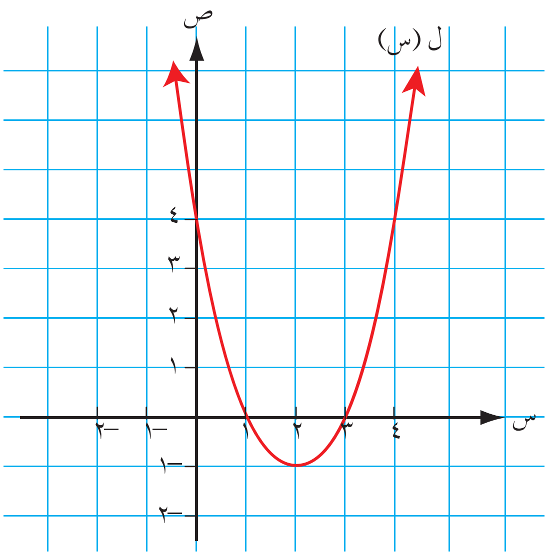
منَ الشكلِ تلاحظُ أنَّ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق يقطع محورَ السيناتِ عندما س = ٠، س = ٣، إذنْ جذرا المعادلةِ التربيعيةِ ق(س) = ٠

هما س = ٠ ، س = ٣

إذنْ مجموعةُ حلِّ المعادلةِ = {٠ ، ٣}.

تدريبٌ ٣–١١

يبينُ الشكلُ (٣ – ١٤) منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ل، جِدْ جذري المعادلةِ التربيعيةِ المرافقةِ للاقترانِ ل.



الشكلُ (٣ – ١٤)

تعلَّمْ

■ يتقاطعُ منحنى الاقترانِ ق مع منحنى الاقترانِ ل عندما يكونُ ق(س) = ل(س)

مثالٌ (٣–١٢)

يقطعُ الخطُ المستقيمُ الذي معادلتُهُ

ص = −٣س + ١ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق، حيثُ ق(س) = س^{٢} – س + ٢، جِدْ نقطةَ تقاطعِ المنحنيينِ.

الحلُّ

يتقاطعُ المنحنيانِ عندما ص = ق(س) ، أيْ عندما

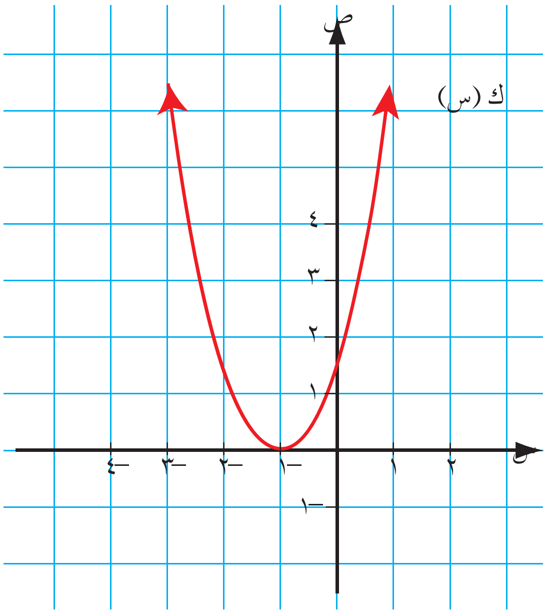
−٣س + ١ = س^{٢} – س + ٢ ،

ومنهُ س^{٢} + ٢س + ١ = ٠ .

الإحداثيُّ السينيُّ لنقطةِ تقاطعِ المستقيمِ ص مع منحنى الاقترانِ ق هوَ جذورُ المعادلةِ

س^{٢} + ٢س + ١ = ٠ .

ليكنْ ك(س) = س^{٢} + ٢س + ١ هو الاقترانُ المرافقُ للمعادلة، من خلالِ رسمِ منحنى الاقترانِ ك كما في الشكلِ (٣ – ١٥) تجدُ أنَّ جذرَ المعادلةِ هو س = −١



الشكلُ (٣ – ١٥)

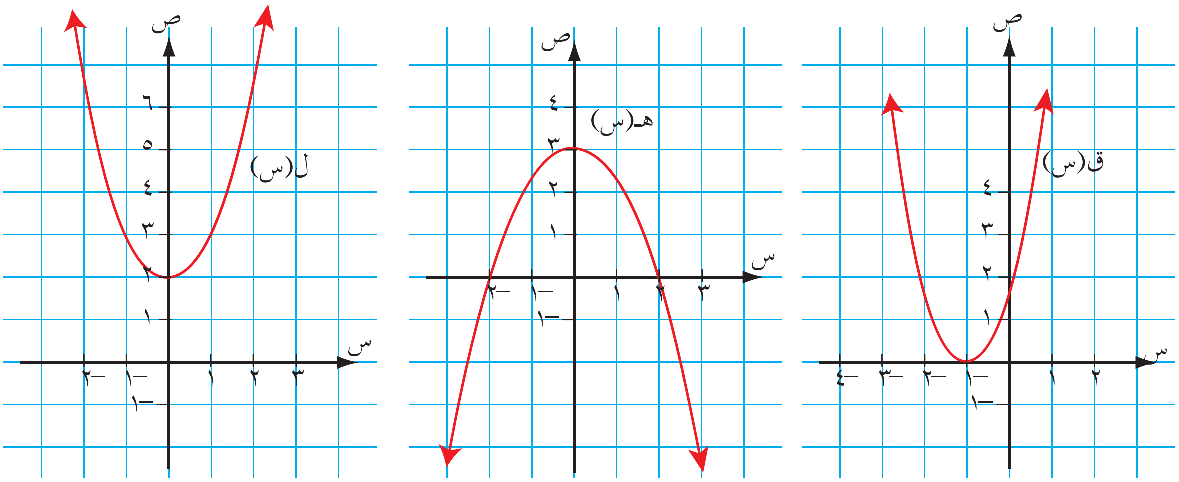
أيْ أنَّ المنحنيينِ يتقاطعانِ عندَ النقطةِ (−١، ق (−١)) = (−١ ، ٤).

تدريبٌ ٣–١٢

جِدْ نقطةَ (نقاطِ) تقاطعِ منحنى الاقترانِ ق(س) = س^{٢} مع منحنى الاقترانِ ل(س) = ٨س – س^{٢}

تمارينُ ومسائلُ

١) يبينُ الشكلُ (٣ – ١٦) رسمَ منحنى الاقتراناتِ التربيعيةِ ق، هـ، ل على الترتيبِ، جِدْ جذورَ المعادلةِ المرافقةِ لكلٍّ منها.



الشكلُ (٣ – ١٦)

٢) إذا قطعَ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق محورَ السيناتِ عندما س = –١، س = ٥، فما جذورُ المعادلةِ التربيعيةِ المرافقةِ للاقترانِ ق؟

٣) حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ بيانيًّا مستخدمًا برنامجَ إكسلَ (Excel):

أ) ٢س^{٢} + ٣س + ٤ = ٠   ب) ٢ – ٢س – س^{٢} = ٠

جـ) س^{٢} – س + ٠,٢٥ = ٠   د) (س – ٢)^{٢} = ٠

٤) يزيدُ طولُ مستطيلٍ على عرضِهِ بمقدارِ ٧سم، إذا علمتَ أنَّ مساحتَهُ ٦٠سم^{٢}، جِدْ كلًّا منْ طولِهِ وعرضِهِ.

٥) حديقةٌ على شكلِ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ، طولُ ضلعِها الأكبرِ ١٣م، يزيدُ طولُ أحدِ ضلعي القائمةِ على طولِ الضلعِ الآخرِ بمقدارِ ٧م، جِدْ طولَ ضلعي القائمةِ.

٦) حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ مستخدمًا الآلةَ الراسمةَ.

٧) جد نقطة تقاطع منحنى كل من الاقترانين:

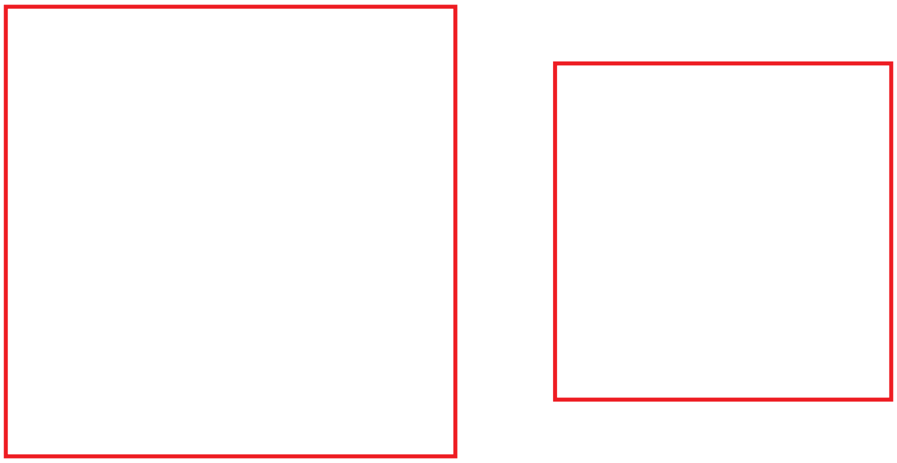
ق(س) = س^{٢} ، ل(س) = ٦س – ٩

٣ – ٤ حلُّ المعادلةِ التربيعيّةِ بالتحليلِ إلى العواملِ

النتاجاتُ

- تحـلُّ معادلـةً تربيعيّـةً بالتحليلِ إلى العواملِ.

لدى نوالُ شريطًا لاصقًا ملوّنًا طولُه ٧٢ سم، أرادت استخدامه لإحاطة بطاقتينِ مربعتينِ مختلفينِ، إذا كانَ مجموعُ مساحتي البطاقتينِ ١٦٤ سم^{٢}، ساعدْ نوالَ في تحديدِ نقطةِ قصِّ الشّريطِ.



تعلَّمْ

■ إذا كانَ أ، ب عددينِ حقيقيين وكانَ أ × ب = ٠

فإنَّ أ = ٠ أو ب = ٠ أو كليهما يساوي صفرًا تُسمّى هذهِ الخاصيةُ **بالخاصيّةِ الصفريّةِ**

نشاطٌ (٣-٤)

لحلِّ المعادلةِ التربيعيّةِ س^{٢} + ٤س = ٥ قُمْ بما يلي:

١) اكتبْ المعادلةَ بالصورةِ العامّةِ أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

٢) حلِّلِ الطّرفَ الأيمنَ للمعادلةِ إلى العواملِ الأوّليّةِ بكتابتِهِ على شكلِ حاصلِ ضربِ عبارتينِ خطيتينِ.

٣) استخدمِ الخاصّيّةَ الصفريّةَ.

٤) حُلَّ المعادلتينِ الخطّيّتينِ التي حصلتَ عليهما في الخطوةِ السابقةِ.

سؤالٌ: هَلِ القيمُ التي حصلتَ عليها في الخطوةِ السابقةِ تحققُ المعادلةَ س^{٢} + ٤س = ٥؟

مثالٌ (٣–١٣)

حُلَّ المعادلتينِ التربيعيتينِ الآتيتينِ بطريقةِ التحليلِ إلى العواملِ:

١) $س^٢ + ٩س + ١٤ = ٠$　　　　٢) $٢س^٢ - س - ١ = ٠$

الحلُّ

١) نحلِّلُ الطرفَ الأيمنَ للمعادلةِ التربيعيةِ

$(س + ٧)(س + ٢) = ٠$

وعليهِ فإنَّ: إما $س + ٧ = ٠$　ومنهُ $س = -٧$

وإما $(س + ٢) = ٠$ ومنهُ $س = -٢$

مجموعةُ الحلِّ = $\{-٧، -٢\}$

٢) نحللُ الطرفَ الأيمنَ للمعادلةِ التربيعيةِ

$(٢س + ١)(س - ١) = ٠$

وعليهِ فإنَّ: إما $٢س + ١ = ٠$　ومنهُ $س = \frac{-١}{٢}$

وإما $(س - ١) = ٠$ ومنهُ $س = ١$

مجموعةُ الحلِّ = $\{\frac{-١}{٢}، ١\}$

تدريبٌ ٣–١٣

حُلَّ المعادلتينِ التربيعيتينِ الآتيتينِ:

أ) $س^٢ - ٧س + ١٠ = ٠$　　　　ب) $٣س^٢ = ٨س - ٤$

مثالٌ (٣–١٤)

إذا علمتَ أنّ غرفةَ الاجتماعاتِ بمدرسةِ سلمى مستطيلةُ الشكلِ مساحتُها (٣٢)م٢ ويزيدُ طولُها على عرضِها بمقدارِ (٤)م، جِدْ أبعادَ الغرفةِ.

الحلُّ

افرضْ أنَّ عرضَ الغرفةِ = س، إذن يكونُ طولُها = س + ٤

مساحةُ المستطيلِ = الطولَ × العرضِ

٣٢ = (س + ٤) × س

أيْ أنَّ س^{٢} + ٤س − ٣٢ = ٠

وبالتحليلِ نحصلُ على (س − ٤) (س + ٨) = ٠ وعليه فإنَّ:

إمّا س + ٨ = ٠ ومنهُ س = −٨ وهذهِ قيمةٌ مرفوضةٌ (لماذا؟)

وإمّا س − ٤ = ٠ ومنهُ س = ٤

إذنْ عرضُ الغرفةِ = ٤م وطولُها = ٤ + ٤ = ٨م

إذنْ أبعادُ الغرفةِ ٤ متر، ٨ متر.

تدريبٌ ٣–١٤

بطاقَةٌ مثلثةُ الشكلِ، إذا علمتَ أنَّ طولَ قاعدتِها يساوي مثلي ارتفاعِها، وكانَتْ مساحتُها ٦٤ سم^{٢}، جِدِ ارتفاعَها.

تدريبٌ ٣–١٥

حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) إذا كانَ العددُ (١) جذرًا للمعادلةِ س^{٢}− ٤س + جـ = ٠ ، جِدْ قيمةَ جـ، ثمَّ جِدِ الجذرَ الآخرَ (إنْ وُجِدَ).

٢) حُلَّ كلًّا منَ المعادلاتِ التربيعيّةِ الآتيةِ بالتّحليلِ إلى العواملِ:

أ) س^{٢} + س − ٢٠ = ٠

ب) س^{٢} + ٧س = ٠

جـ) س (س − ١) = ٦

٣) إذا كانَ س + ٧، س − ٥ هما العاملينِ الأولينِ الناتجينِ عنْ تحليلِ المعادلةِ التربيعيّةِ المرافقةِ للاقترانِ التربيعيِّ ق، فاكتبْ قاعدةَ الاقترانِ ق.

٤) ينوي وليدٌ رسمَ صورةٍ جداريّةٍ مربعةِ الشكلِ على سورِ المدرسةِ، جِدْ طولَ ضلعِها إذا علمتَ أنَّ ناتجَ طرحِ محيطِها مِنْ مساحتِها يساوي (٥).

٥) سياجٌ معدنيٌّ طولُه ٢٠م يحيطُ بمبنى مستطيلِ الشكلِ مساحتُه ٢١م^{٢}، جِدْ أبعادَ المبنى.

٣ – ٥ حلُّ المعادلةِ التربيعيّةِ بإكمالِ المربعِ

النتاجاتُ

- تحلُّ معادلةً تربيعيةً بإكمالِ المربعِ.

أرادَ معتزٌ تصميمَ نموذجٍ كرتونيٍّ لشاخصةٍ مروريةٍ على شكلِ مثلثٍ، يزيدُ طولُ قاعدتِه على ارتفاعِه بمقدارِ ٤ سم، ومساحتُه ٤٨ سم^{٢}. ساعدْ معتزًا في إيجادِ ارتفاعِه ليكتملَ النموذجُ.

نشاطٌ (٣-٥)

جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

١) $٣^{٢} + ٤(٣) = ...$

٢) $(٣ + \frac{٤}{٢})^{٢} - (\frac{٤}{٢})^{٢} = ...$

٣) $٧^{٢} + ٦(٧) = ...$

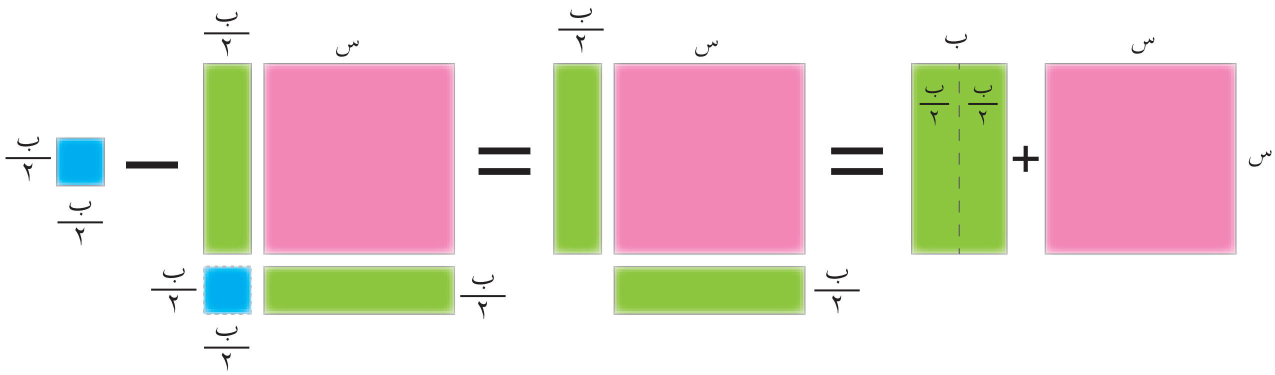
٤) $(٧ + \frac{٦}{٢})^{٢} - (\frac{٦}{٢})^{٢} = ...$

ماذا تلاحظُ؟

لا بدَّ أنَّكَ تلاحظُ أنَّ الإجابةَ في الفرعِ (١) تساوي الإجابةَ في الفرعِ (٢)، والإجابةَ في الفرعِ (٣) تساوي الإجابةَ في الفرعِ (٤).

وبالاعتمادِ على النشاطِ المذكورِ يمكنُ القولُ أنَّ $س^{٢} + ب\,س = (س + \frac{ب}{٢})^{٢} - (\frac{ب}{٢})^{٢}$،

وللتحققِ مِنْ صحّةِ هذهِ العلاقةِ الجبريةِ هندسيًّا، فإنّنا نقومُ بتمثيلِ المقدارِ $س^{٢} + ب\,س$ هندسيًّا كما يأتي:



لاحظْ أنَّ المقدارَ الجبريَّ $س^{٢} + ب\,س$ هندسيًّا يعبرُ عنْ مربعٍ مساحتُه $(س + \frac{ب}{٢})^{٢}$ منقوصٌ منهُ المربعُ الصغيرُ ذو المساحةِ $(\frac{ب}{٢})^{٢}$ ويمكنُ أنْ يُكتبَ على النحوِ الآتي:

$$س^{٢} + ب\,س = (س + \frac{ب}{٢})^{٢} - (\frac{ب}{٢})^{٢}$$

أمّا جبريًا فإنَّ:

$$(س + \frac{ب}{٢})^{٢} - (\frac{ب}{٢})^{٢} = س^{٢} + ب\,س + (\frac{ب^{٢}}{٤}) - (\frac{ب^{٢}}{٤}) = س^{٢} + ب\,س$$

تُسمّى عمليةُ إضافةِ وطرحِ $(\frac{ب}{٢})^{٢}$ إلى المقدارِ $س^{٢} + ب\,س$ **بعمليةِ إكمالِ المربع.**

• تذكَّرْ

مربعُ مجموعِ حدّينِ:

$$(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢أب + ب^{٢}$$

مربعُ فرقِ حدّينِ:

$$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢أب + ب^{٢}$$

خلاصةٌ

لكيْ نكملَ المربعَ في المعادلةِ من النوعِ $أس^{٢} + ب\,س = جـ$ نضيفُ ونطرحُ منهُ مربعَ نصفِ العددِ ب، بشرطِ أنْ تكونَ $أ = ١$

نشاطٌ (٣-٦)

إذا علمتَ أنَّ المعادلةَ التربيعيّةَ المرافقةَ لاقترانٍ تربيعيٍّ هيَ ٢س^{٢} − ٢٠س + ١٨ = ٠

قُمْ بما يلي:

١) اجعلِ الحدَّ المطلقَ في الطرفِ الأيسرِ منَ المعادلةِ.

٢) اجعلْ معاملَ س^{٢} يساوي (١)

٣) أضفْ مربعَ نصفِ معاملِ س لكلٍّ منَ الطّرفينِ.

٤) حلِّلِ المقدارَ الثّلاثيَّ في الطّرَفِ الأيمنِ واكتبْهُ كمربعٍ كاملٍ على صورةِ (س + ثابت)^{٢}.

٥) خُذِ الجذرَ التربيعيَّ للطّرفينِ، سينتجُ معادلتانِ خطيتانِ.

٦) أكملْ حلَّ المعادلتينِ الخطّيّتينِ وستحصلُ على حلّينِ للمعادلةِ التربيعية.

فائدةٌ:

- $\sqrt{\text{س}^{2}} = |\text{س}|$ ، س ∋ ح
- إذا كانَ |س| = أ فإنَّ س = أ ، أو س = −أ

مثالٌ (٣-١٥)

استخدمْ طريقةَ إكمالِ المربعِ لحلِّ المعادلةِ التربيعيةِ: ٢س^{٢} + ٤س − ١٦ = ٠

الحلُّ

٢س^{٢} + ٤س = ١٦ — جعلُ الحدِ المطلقِ في الطرفِ الأيسرِ.

س^{٢} + ٢س = ٨ — القسمةُ على معاملِ س^{٢} . لماذا؟

$(\frac{1}{2} \times 2)^{2}$ = ١ — (معاملُ س = ٢، نصفُهُ = ١، مربعُ نصفِ معاملِ س = ١)

س^{٢} + ٢س + ١ = ٨ + ١ — إضافةُ مربعِ نصفِ معاملِ س للطرفينِ

(س + ١)^{٢} = ٩ — كتابةُ الطرفِ الأيمنِ على صورةِ مربع كامل

$\sqrt{(\text{س} + 1)^{2}} = \sqrt{9}$ = ٣ — إيجادُ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ

إمّا س + ١ = ٣ ومنهُ، س = ٢ — حَلُّ المعادلتينِ

وإمّا س + ١ = −٣ ومنهُ ، س = −٤

مجموعةُ الحلِّ: {−٤ ، ٢} — كتابةُ مجموعةِ حلِّ المعادلةِ

تدريبٌ ٣-١٦

حُلَّ المعادلاتِ الآتية ، وتحقق من صحّة الحلِّ:

أ) (٢س − ١)^{٢} = ١٠٠ ب) س^{٢} − ٨س + ١٥ = ٠

مثالٌ (٣-١٦)

استخدمْ طريقةَ إكمالِ المربعِ في حلِّ المعادلةِ التربيعيةِ ٢س^{٢} − ٨س + ١٠ = ٠

الحلُّ

اكتبْ المعادلةَ على الصورةِ ٢س^{٢} − ٨س = −١٠

اقسمْ على معاملِ س^{٢} لتصبحَ المعادلةُ على الصورةِ س^{٢} − ٤س = −٥

ب = −٤ ، إذنْ ($\frac{١}{٢}$ × −٤)^{٢} = (٢)^{٢} = ٤

أضِفْ ٤ للطرفينِ تحصلْ على:

س^{٢} − ٤س + ٤ = −١ ومنهُ (س − ٢)^{٢} = −١

بما أنَّ المقدارَ (س − ٢)^{٢} لا يمكنُ أن يكونَ سالبًا مهما كانتْ قيمةُ س، فإنّهُ لا يوجدُ للمعادلةِ حلولٌ حقيقيةٌ، أيْ أنَّ مجموعةَ الحلِّ = $\emptyset$

تدريبٌ ٣-١٧

حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدّرسِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) جِدْ جذورَ المعادلةِ $(٢س - ١)^{٢} = ٢٥$

٢) استخدِمْ طريقةَ إكمالِ المربعِ في حلِّ المعادلاتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ:

أ) $س^{٢} - ٤س - ١٢ = ٠$

ب) $٢س^{٢} - س = ٠$

جـ) $س^{٢} - ٦س = ٧$

د) $٤س - ٢س^{٢} + ٦ = ٠$

هـ) $٩ + س^{٢} = ١٠س$

و) $٨س - ٢س^{٢} = ١٦$

٣) هل يمكنُكَ الحصولُ على عددينِ موجبينِ، مجموعُهما ١٠، ومجموعُ مربعيهما ٥٨؟ برّرْ إجابتَكَ.

٤) هَلْ يمكنكَ إيجادُ حلٍّ حقيقيٍّ لكلٍّ من المعادلاتِ الآتيةِ ؟ مبرِّرًا إجابتَكَ.

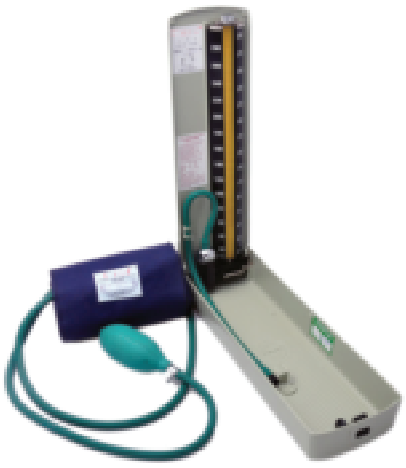
أ) $٢س^{٢} - ١٢س + ٢٠ = ٠$

ب) $(س + ١)^{٢} = -١$

٣ – ٦ حلُّ المعادلةِ التربيعيّةِ بالقانونِ العامِّ

النتاجات

- تحلُّ معادلةً تربيعيةً بالقانونِ العامِّ.
- تستعملُ المميِّزَ لتحديدِ عددِ الحلولِ الحقيقيّةِ لمعادلةٍ تربيعية.



يمكنُ تمثيلُ ضغطِ الدمِ الانقباضيِّ الطبيعيِّ للمرأةِ بالميللتر زئبقَ بالاقترانِ:

$\text{ص} = ٠,٠١\,\text{س}^{٢} + ٠,٠٥\,\text{س} + ١,٧$

حيثُ س العمرُ بالسنواتِ، ويستعملُ هذا الاقترانُ لتقديرِ عمرِ المرأةِ إذا عُلِمَ ضغطُ الدمِ الانقباضيّ لها. هلْ تستطيعُ حلَّ المعادلةِ المرافقةِ لهذا الاقترانِ بالطرقِ التي تعلمتَها سابقًا؟

من الصّعبِ تحليلُ المعادلةِ المرافقةِ لمثلِ هذا الاقترانِ إلى عواملِها الأوليةِ، كما أنّهُ منَ الصعبِ رسمُ منحنى هذا الاقترانِ يدويًّا. لذا فإنّنا نتساءلُ، هلْ هناكَ قاعدةٌ عامّةٌ لإيجادِ جذورِ المعادلةِ التربيعيةِ $\text{أ}\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = ٠$ حيثُ $\text{أ} \neq ٠$؟

نشاطٌ (٣-٧)

ليكنْ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١$ جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

١) معاملاتِ الاقترانِ ق.

٢) $\text{س}_{١} = \dfrac{-\text{ب} + \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$

٤) $\text{س}_{٢} = \dfrac{-\text{ب} - \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{جـ}}}{٢\,\text{أ}}$

٤) $\text{ق}(\text{س}_{١})$ ، $\text{ق}(\text{س}_{٢})$

ماذا تلاحظُ؟

نشاطٌ (٣-٨)

ليكنْ ق(س) = س^٢ + ٣س + ٢ جِد قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

١) معاملاتِ الاقترانِ ق.

٢) $س_١ = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

٣) $س_٢ = \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

٤) ق($س_١$) ، ق($س_٢$)

ماذا تلاحظُ؟

ممّا سبقَ لا بدَّ أنّكَ لاحظتَ أنَّ: $س_١ = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ ، $س_٢ = \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

هما جذرا المعادلةِ التربيعيّةِ أس^٢ + ب س + جـ = ٠، ولإثباتِ صحةِ ما توصلتَ إليه، سنستخدمُ طريقةَ إكمالِ المربعِ لحلِّ المعادلةِ التربيعيةِ أس^٢ + ب س + جـ = ٠، أ ≠ ٠ كما يأتي:

$س^٢ + \frac{ب}{أ}س + \frac{جـ}{أ} = ٠$	قسمةُ طرفي المعادلةِ التربيعيّةِ على أ
$س^٢ + \frac{ب}{أ}س = -\frac{جـ}{أ}$	إضافةُ العددِ $-\frac{جـ}{أ}$ إلى الطرفينِ
$س^٢ + \frac{ب}{أ}س + \frac{ب^٢}{٤أ^٢} = \frac{ب^٢}{٤أ^٢} - \frac{جـ}{أ}$	إضافةُ مربعِ نصفِ معاملِ س للطرفينِ
$(س + \frac{ب}{٢أ}) \times (س + \frac{ب}{٢أ}) = \frac{ب^٢}{٤أ^٢} - \frac{جـ}{أ}$	تحليلُ الطرفِ الأيمنِ
$(س + \frac{ب}{٢أ})^٢ = \frac{ب^٢ - ٤ أ جـ}{٤أ^٢}$	كتابةُ الطرفِ الأيمنِ بصورةِ مربعٍ كاملٍ، وتوحيدُ المقامينِ بالطرفِ الأيسرِ.
$س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \frac{\sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$	إيجادُ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ

$س = \pm \frac{\sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} - \frac{ب}{٢ أ}$ إضافةُ $- \frac{ب}{٢أ}$ للطرفينِ

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ تبسيطٌ

وهذا هوَ **القانونُ العامُّ** لحلِّ أيِّ معادلة تربيعية.

ويُسمّى المقدارُ ($ب^٢ - ٤ أ جـ$) **مميِّزَ المعادلةِ التربيعيةِ،** ويُرمزُ له بالرمزِ Δ

أَيْ أنَّ: $\Delta = ب^٢ - ٤ أ جـ$

قاعدةٌ

القانونُ العامُّ لحلِّ المعادلةِ التربيعيةِ $أس^٢ + ب س + جـ = ٠$ هوَ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

حيثُ $ب^٢ - ٤أ جـ \geq ٠$

مثالٌ (٣-١٧)

استخدمِ القانونَ العامَّ لحلِّ المعادلةِ التربيعيَّةِ: $س^٢ + ٥س = ٨٤$

الحلُّ

أَعِدْ كتابةَ المعادلةِ بالصورةِ العامةِ $س^٢ + ٥س - ٨٤ = ٠$

$أ = ١$، $ب = ٥$، $جـ = -٨٤$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ} = \frac{-٥ \pm \sqrt{(٥)^٢ - ٤ \times ١ \times (-٨٤)}}{٢ \times ١}$$

$$= \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٥ + ٣٣٦}}{٢} = \frac{-٥ \pm \sqrt{٣٦١}}{٢} = \frac{-٥ \pm ١٩}{٢}$$

$$س_١ = \frac{-٥ + ١٩}{٢} = ٧، \quad س_٢ = \frac{-٥ - ١٩}{٢} = -١٢$$

مجموعةُ الحلِّ = $\{-١٢، ٧\}$

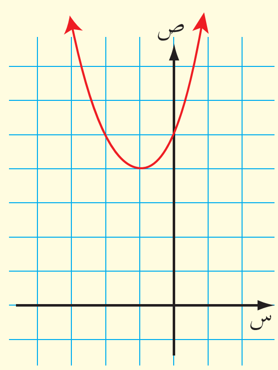
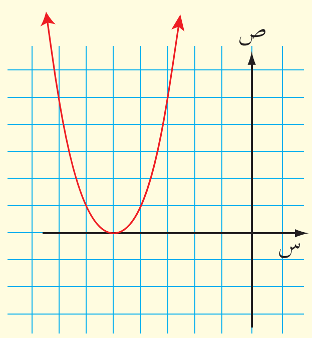
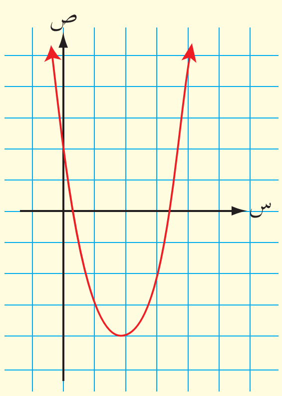
تدريبٌ ٣-١٨

حُلَّ المعادلةَ ٢س^{٢} + ٥س + ٢ = ٠ باستخدامِ القانونِ العامِّ لحلِّ المعادلةِ التربيعيةِ.

نشاطٌ (٣-٩)

أكملِ الجدولَ (٣-٢)

الجدولُ (٣-٢)

المعادلةُ	س^{٢} + ٢س +٥ = ٠	س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = ٠	٢س^{٢} – ٧س + ٢ = ٠
المميِّزُ Δ	ب^{٢} – ٤ أ جـ = ...	ب^{٢} – ٤أجـ = ...	ب^{٢} – ٤أجـ = ...
إشارةُ Δ			
تمثيلُ الاقترانِ المرتبطِ بالمعادلةِ التربيعيةِ			
عددُ المقاطعِ السينيّة			
عددُ الحلولِ الحقيقيةِ للمعادلةِ			

منَ الجدولِ السابقِ هلْ توجدُ علاقةٌ بينَ إشارةِ المميِّزِ وعددِ الحلولِ الحقيقيّةِ للمعادلةِ التربيعيةِ؟

نتيجــةٌ

لاحظْ أنّهُ: يمكنُ استعمالُ المميّزِ للكشفِ عنْ إمكانيّةِ تحليلِ المعادلاتِ التربيعيةِ وتحديدِ عددِ الحلولِ الحقيقيةِ لها (إنْ وجدت)، فإذا كانَ:

أ) $\Delta > ٠$، فإنَّ للمعادلةِ التربيعيةِ جذرينِ حقيقيينِ مختلفينِ.

ب) $\Delta < ٠$، فإنَّهُ لا يوجدُ للمعادلةِ التربيعيةِ جذورٌ حقيقيّةٌ.

جـ) $\Delta = ٠$، فإنَّ للمعادلةِ التربيعيةِ جذرًا حقيقيًّا مكررًا هوَ $س = \frac{-ب}{٢أ}$.

مثالٌ (٣-١٨)

جِدْ قيمةَ المميِّزِ للمعادلةِ التربيعيةِ ٤س^٢ – ٥س = –٣، ثمَّ تَبيَّنْ إذا كانَ للمعادلةِ حلولٌ حقيقيّةٌ.

الحلُّ

٤س^٢ – ٥س + ٣ = ٠	كتابةُ المعادلةِ بالصورةِ العامّةِ
أ = ٤ ، ب = –٥ ، جـ = ٣	تحديدُ قيمِ أ ، ب، جـ
المميِّزُ Δ = ب^٢ – ٤ أ جـ	حسابُ قيمةِ المميِّزِ
= (–٥)^٢ – ٤ × (٤) × (٣)	تعويضُ قيمِ أ ، ب، جـ
= –٢٣	تبسيطٌ

بما أنَّ المميّزَ سالبٌ فإنّهُ لا يوجدُ للمعادلةِ حلولٌ حقيقيّةٌ.

مجموعةُ الحلِّ = $\emptyset$

تدريبٌ ٣-١٩

جِدْ قيمةَ المميّزِ ثمَّ حَدِّدْ عددَ الجذورِ لكلٍّ منَ المعادلاتِ الآتيةِ:

أ) س^٢ – ٩س = –٢١

ب) ٢س^٢ + ١١س + ١٥ = ٠

جـ) ٩س^٢ + ٢٤س + ١٦ = ٠

مثالٌ (٣–١٩)

إذا كانَ للمعادلةِ $س^٢ - ٢س + جـ = ٠$ جذرانِ حقيقيانِ مختلفانِ، فما مجموعةُ قيمِ جـ ؟

الحلُّ

بما أنَّ للمعادلةِ جذرينِ حقيقيينِ مختلفينِ، فَإنَّ مميِّزَ المعادلةِ التربيعيةِ موجبٌ.

أيْ أنَّ $\Delta = ب^٢ - ٤ \times أ \times جـ > ٠$.

ومنهُ $\Delta = (-٢)^٢ - ٤ \times ١ \times جـ > ٠$

ومنهُ $٤ - ٤جـ > ٠$

$٤جـ < ٤$

$جـ < ١$

وبذلكَ فَإنَّ مجموعةَ قيمِ جـ هيَ: $\{ جـ : جـ < ١ \}$

تدريبٌ ٣–٢٠

إذا كانَ للمعادلةِ $س^٢ - ٨ هـ س + ٤ = ٠$ حلٌّ واحدٌ فما قيمةُ (قِيَمُ) الثابتِ هـ ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) جِدْ جذورَ المعادلةِ $س^٢ - ٣س = ١٠$

٢) استخدمِ القانونَ العامَّ لحلِّ المعادلاتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ:

أ) $س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$

ب) $٣س^٢ - ٤س = ٣$

جـ) $٣س + ٣س^٢ = -٤$

د) $س^٢ - ٨س + ١٦ =$ صفر

٣) عددانِ حقيقيانِ حاصلُ ضربِهما ٧٧، ويزيدُ أحدُهما على الآخرِ بمقدارِ ٤، جِدِ العددينِ.

٤) هلْ يمكنُ إيجادُ حلٍّ حقيقيٍّ للمعادلةِ $١٤س^٢ - ٣٠س = ٠$ ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٥) جِدْ قيمةَ المميِّزِ، ثمَّ حدِّدْ عددَ الحلولِ الحقيقيّةِ لكلِّ معادلةٍ فيما يأتي:

أ) $س^٢ + س + ٩ = ٠$

ب) $٢س^٢ + ١١س + ٦ = ٠$

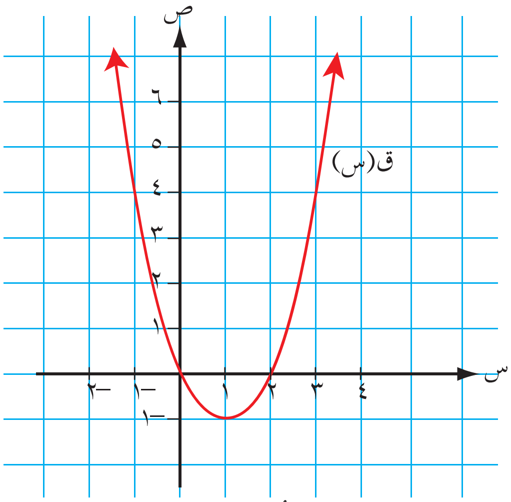
٦) يقفزُ خالدٌ منْ فوقِ منصةٍ للقفزِ في بركةِ سباحةٍ، وتمثِّلُ المعادلةُ

$ل = -٥ن^٢ + ٨ن + ٦$ ارتفاعَ خالدٍ (ل) بالأمتارِ بعدَ (ن) منَ الثواني. استعملْ المميِّزَ لتعرِفَ إذا كانَ خالدٌ سيصلُ إلى ارتفاعِ ٢٠ مترًا، فسِّرْ إجابتَكَ.

٧) حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مراجعةٌ

١) تأمّلِ الشكلَ (٣–١٧) وأجِبْ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



الشكلُ (٣ – ١٧)

أ) ما مجالُ ومدى الاقترانِ ق؟

ب) جِدْ قيمةَ س التي يأخذُ عندَها الاقترانُ ق قيمةً صغرى.

جـ) جِدْ معادلةَ محورِ تماثلِ الاقترانِ ق.

د) جِدْ إحداثيي رأسِ منحنى الاقترانِ ق.

هـ) ما إشارةُ مميّزِ المعادلةِ المرافقةِ للاقترانِ ق؟

و) جِدْ نقاطَ تقاطعِ منحنى ق معَ محوري الإحداثياتِ.

ز) كَمْ عددَ الجذورِ الحقيقيّةِ للمعادلةِ المرافقةِ للاقترانِ ق؟

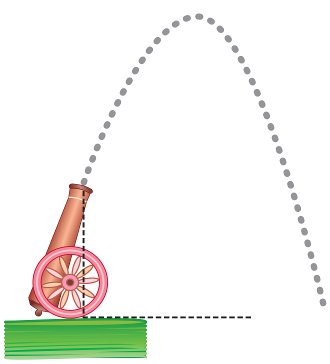
ح) ما قيمةُ ق (– ١) ؟

ط) ما أصفارُ الاقترانِ ق؟

٢) إذا كانَ للاقترانِ ق صفرٌ وحيدٌ، حيثُ ق (س) = أس^{٢} + ٦س + ٩ فما قيمةُ الثابتِ أ؟

٣) أطلقَ مدفعٌ قذيفةً بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارُها ١٩,٦ مترًا / ثانيةٍ منْ سطحِ الأرضِ، فإذا كانتِ المسافةُ التي تقطعُها القذيفةُ (ف) بالأمتارِ بعدَ (ن) منَ الثواني معطاةً بالعلاقةِ:

ف = –٤,٩ن^{٢} + ١٩,٦ ن .


الشكلُ (٣ – ١٨)

أ) جِدْ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليهِ القذيفةُ منْ سطحِ الأرضِ.

ب) متى تصلُ القذيفةُ إلى سطحِ الأرضِ؟

٤) حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ:

أ) $(س + ٥)^{٢} = ٤٩$

ب) $٣ - س^{٢} = ٢ س$

جـ) $س^{٢} + ٦س + ٧ = ٠$

د) $٤ س^{٢} + ١٢ = ١٦ س$

هـ) $٢٠ = ١٢ س - ٢ س^{٢}$

٥)* أقيمَ سياجٌ طولُهُ ٤٠٠م حولَ قطعةِ أرضٍ مستطيلةِ الشكلِ وتقعُ على ضفةِ نهرٍ مستقيم، فإذا لم تُسَيَّجِ الواجهةُ الواقعةُ على ضفّةِ النّهْرِ، جِدْ أبعادَ قطعةِ الأرضِ بحيثُ تكونُ مساحتُها أكبرَ ما يمكنُ.

افهمْ: ماذا فهمتُ منْ هذهِ المسألةِ؟
اخططْ : كيف يمكنني حلَّ هذهِ المسألةِ؟
انفِّذْ: أنفِّذُ ما خططتُ له سابقًا.
اتحققْ: كيفَ يمكنني التحققُ منْ صحةِ الحلِّ؟

* السؤالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكـونُ هـذا السؤالُ منْ تسعِ فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ مـنْ متعدّدٍ، ولكلٍّ منها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منْها فقطْ صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ لكلٍّ منها.

(١) أحدُ الاقتراناتِ الآتيةِ **ليسَ** تربيعيًّا:

أ) ق(س) = ٢ س^{٣} − ٢س + ٢ ب) ل(س) = س^{٢} − ٢س + ٢

جـ) هـ(س) = ١٠ س^{٢} د) و(س) = ٤ − ٨س − س^{٢}

(٢) معادلةُ محورِ التماثلِ للاقترانِ التربيعيِّ ق(س) = س^{٢} هيَ:

أ) س = ١ ب) س = ٠ جـ) س = ٢ د) س = −٢

(٣) الإحداثيُّ السينيُّ لنقطةِ الرأسِ للاقترانِ التربيعيِّ ل(س) = ٢س^{٢} − ٢س هوَ:

أ) س = $\frac{١}{٢}$ ب) س = ٠ جـ) س = ٢ د) س = −$\frac{١}{٢}$

(٤) مجالُ الاقترانِ التربيعيِّ ق(س) = (س − ١)^{٢} يساوي:

أ) ∅ ب) مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيةِ

جـ) مجموعةَ الأعدادِ الصحيحةِ. د) مجموعةَ الأعدادِ الصحيحةِ الموجبةِ.

(٥) يقطعُ الاقترانُ التربيعيُّ ق(س) = ٣س − س^{٢} محورَ الصاداتِ في النقطةِ:

أ) (٠، ٣) ب) (٣، ٠) جـ) (٣،−١) د) (٠،٠)

(٦) إذا كانَ إحداثيّا رأسِ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ص = ق(س) المفتوحِ للأسفلِ هما (−٣، ١)، فإنَّ مدى الاقترانِ ق هوَ مجموعةُ القيمِ التي تحقّقُ:

أ) س ≤ −٣ ب) س ≥ −٣ جـ) ص ≤ ١ د) ص ≥ ١

(٧) مجموعةُ حلِّ المعادلةِ س^{٢} + ٢ = ٣س هيَ:

أ) {١،٢} ب) {٢،−١} جـ) {−١،−٢} د) ∅

(٨) مميِّزُ المعادلةِ التربيعيّةِ المرافقةِ للاقترانِ ق (س) = ١ – س – س^{٢} يساوي:

أ) Δ= –٣ ب) Δ= –٤ جـ) Δ= –٥ د) Δ= ٥

(٩) القيمةُ الصغرى للاقترانِ التربيعيِّ ق(س) = س^{٢} – ٢س + ٩ تساوي:

أ) صفرًا ب) ١ جـ) ١١ د) ٨

٢) جِدْ قيَمَ جـ التي تجعلُ الاقترانَ ق(س) = س^{٢} + ٤س + جـ ليسَ له جذورٌ حقيقيّةٌ.

٣) جدْ حلَّ المعادلاتِ التربيعيةِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَ):

أ) س^{٢} – ٢س = ٢٤

ب) (س + ٢)^{٢} = س + ٤

جـ) ٢س^{٢} + ٦س = ٠

د) –١٠ = س (٣ – س)

هـ) س^{٢} – ٤س – ٥= ٠

٤) جِدْ أبعادَ المستطيلِ الذي محيطُه ٦٨ سم، وطولُ قطرِه ٢٦ سم.

٥) إذا علمتَ أنَّ منحنى الاقترانِ التربيعيِّ ق يقطعُ محورَ السيناتِ عندما س = –٢، س = ٤، ويمرُّ بالنقطةِ (٠،٨). جِدْ قاعدةَ الاقترانِ ق، ثم ارسمْ منحناهُ مستخدمًا برنامجَ إكسلَ (Excel).

٤

٤-١ مبدأُ العدِّ.

٤-٢ الفضاءُ العينيُّ والتجربةُ العشوائيّةُ.

٤-٣ الحادثُ.

٤-٤ احتمالُ الحادثِ.

تهتمُّ الاحتمالاتُ بحسابِ فرصةِ وقوعِ حادثٍ ما في التجاربِ العشوائيةِ، وتفيدُ في اتخاذِ القراراتِ في العديدِ منَ التطبيقاتِ الحياتيّةِ مثلِ الاقتصادِ، والبحثِ العلميِّ، والتنبؤِ بالأحوالِ الجويّةِ، فمثلاً قدْ تقرّرُ شركةُ طيرانٍ إيقافَ رحلاتِها الخارجيةِ ليومٍ ما لأنَّ هناكَ فرصةً كبيرةً لأنْ تسوءَ الأحوالُ الجويّةُ في ذلكَ اليومِ.

الوحدةُ الرابعةُ

الاحتمالاتُ

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ دراسةِ هذهِ الوحدةِ أَنْ يكونَ قادرًا على:

- تَعرُّفِ مبدأ العدِّ.
- استخدامِ مبدأِ العدِّ في حلِّ مسائلَ رياضيّةٍ.
- تحديدِ الفضاءِ العينيِّ لتجاربَ عشوائيّةٍ.
- تمثيلِ الفضاءِ العينيِّ رياضيًّا باستخدامِ الشجرةِ والمستوى الإحداثيِّ.
- تَعرُّفِ الحادثِ وأنواعِهِ لتجاربَ عشوائيةٍ.
- تمثيلِ الحادثِ بأشكالِ (فن).
- التوصُّلِ إلى مفهومِ الاحتمالِ.
- إيجادُ قيمةِ احتمالِ حادثٍ ما لتجربةٍ عشوائيةٍ.

تهيئةٌ

١ اكتبْ جميعَ النواتجِ الممكّنةِ لكلٍّ منِ التجاربِ العشوائيةِ الآتيةِ:

أ) إلقاءِ قطعةِ نقدٍ، وتسجيلِ الوجهِ الظاهرِ إلى أعلى.

ب) إلقاءِ حجرِ نردٍ، وتسجيلِ عددِ النقاطِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ.

جـ) سحبِ بطاقةٍ منْ صندوقٍ يحتوي ٥ بطاقاتٍ مرقمةٍ من ١ إلى ٥، وتسجيلِ الرقمِ المكتوبِ على البطاقةِ.

د) سحبِ كرةٍ منْ صندوقٍ يحتوي (٨) كراتٍ حمراءَ، و(٦) كراتٍ بيضاءَ، وتسجيلِ لونِ الكرةِ المسحوبةِ.

٢ عيّنِ النقاطَ الآتيةَ في المستوى الإحداثيِّ:

أ) (٢،٣) ب) (٠،٣) جـ) (٤،٠)

د) (٦،٦) هـ) (٠،٠)

٣ إذا كانتْ س = {٥، ٦، ٧، ٨} ، ص = {٣، ٤، ٥، ٦} ، فجِدْ كلًّا ممّا يأتي ومثّلِ الناتجَ بأشكالِ (فن).

أ) س ∪ ص ب) س ∩ ص جـ) س − ص د) ص − س

٤ إذا كانَ معدلُ ساعاتِ نومِ أحمدَ (٨) ساعاتٍ يوميًا، فما نسبةُ ما ينامُهُ مِنَ اليومِ بأبسطِ صورةٍ؟

٥ صفٌّ فيهِ ٣٠ طالبًا، نجحَ منهمْ في امتحانِ الرياضيّاتِ ٢٠ طالبًا، وفي امتحانِ اللغةِ العربيّةِ ٢٥ طالبًا، وفي الامتحانينِ معًا ١٧ طالبًا.

مثّلْ معطياتِ السؤالِ بأشكالِ (فن) ثمَّ جِدْ:

أ) عددَ الطلبةِ الذينَ نجحوا في الرياضياتِ فَقَطْ.

ب) عددَ الطلبةِ الذينَ نجحوا في اللغةِ العربيةِ فَقَطْ.

جـ) عددَ الطلبةِ الذينَ لم ينجحوا في أيٍّ منَ المادتينِ.

٦ إذا كانتْ المجموعةُ س = { ١، ٣، ٧، ٩}، والمجموعةُ ص = { أ، ب، جـ} فَجِدْ:

أ) حاصلَ الضربِ الديكارتيِّ لكلٍّ ممّا يأتي:

س × ص ، ص × س ، س × س

ب) ما عددُ عناصرِ كلٍّ منَ: المجموعةِ س، والمجموعةِ ص، والمجموعةِ س × ص، والمجموعةِ ص × س، المجموعةِ س × س؟ ماذا تلاحظُ؟

مبدأُ العدِّ

النتاجات
- تتعرّفُ مبدأَ العدِّ.
- تستخدمُ مبدأَ العدِّ في حلِّ مسائلَ رياضيّةٍ.

يقدمُ مطعمٌ ٣ أنواعٍ منَ الفطائرِ هيَ: (جبنةٌ وزعترٌ وسبانخٌ)، ونوعينِ منَ العصائرِ هما: (ليمونٌ وبرتقالٌ)، بكَمْ طريقةٍ يمكنُ لعثمانَ أَنْ يختارَ وجبةً تحتوي على فطيرةٍ وعصيرٍ؟

سيختارُ عثمانُ الوجبةَ بخطوتينِ:

الأولى: اختيارِ نوعِ الفطيرةِ، ويتمُّ هذا الاختيارُ بواحدةٍ من ثلاثِ طرقٍ (جبنة، زعتر، سبانخ).

الثانيةِ: اختيارِ نوعِ العصيرِ، ويتمُّ هذا الاختيارُ بإحدى طريقتينِ (ليمون، برتقال).

وتُستخدمُ طريقةُ الشجرةِ لتوضيحِ ذلكَ:

نوعُ الفطيرةِ	جبنةٌ		زعترٌ		سبانخٌ	
نوعُ العصيرِ	ليمونٌ	برتقالٌ	ليمونٌ	برتقالٌ	ليمونٌ	برتقالٌ
الوجبةُ	جبنة، ليمون	جبنة، برتقال	زعتر، ليمون	زعتر، برتقال	سبانخ، ليمون	سبانخ، برتقال

وبهذا تكونُ طرقُ اختيارِ الوجبةِ: (جبنة، ليمون)، (جبنة، برتقال)، (زعتر، ليمون)، (زعتر، برتقال)، (سبانخ، ليمون)، (سبانخ، برتقال).

وبهذا يكونُ عددُ طرقِ اختيارِ الوجبةِ المكوّنةِ منْ نوعٍ منَ الفطائرِ ونوعٍ منَ العصيرِ يساوي عددَ طرقِ اختيارِ الفطيرةِ × عددِ طرقِ اختيارِ العصيرِ

= ٣ × ٢ = ٦

ويُسمّى المبدأُ الذي عُرِفَ به عددُ طرقِ الاختيارِ **مبدأَ العَدِّ**.

قاعدةٌ (١)

مبدأُ العدِّ:

في عمليةٍ تتكونُ منْ خطوتينِ، إذا كانَ عددُ طرقِ إجراءِ الخطوةِ الأولى ن$_1$، وعددُ طرقِ إجراءِ الخطوةِ الثانيةِ ن$_2$، فإنَّ عددَ طرقِ إجراءِ العمليةِ بأكملِها هو ن$_1$ × ن$_2$.

مثالٌ (٤–١)

كمْ عددًا مكوَّنًا منْ منزلتينِ مختلفتينِ يمكنُ تكوينُهُ منَ الأرقامِ {١، ٣، ٥} دونَ تكرارِ الرقمِ الواحدِ؟

الحلُّ

يمكنُنا إجراءُ هذهِ العمليةِ بخطوتينِ:

الأولى : اختيارِ رقمٍ لمنزلةِ الآحادِ وهذا يتمُّ بواحدةٍ منْ ثلاثِ طرقٍ هيَ: ١، ٣، ٥

الثانيةِ : اختيارِ رقمٍ لمنزلةِ العشراتِ، وهذا يمكنُ بإحدى طريقتينِ فقطْ، وذلكَ لأنَّ المنزلتينِ مختلفتانِ، فعندَ اختيارِ العددِ ١ لمنزلةِ الآحادِ نستطيعُ اختيارَ ٣ أو ٥ فقطْ لمنزلةِ العشراتِ ولا نختارُ ١، وهكذا بالنسبةِ للرقمينِ ٣ أو ٥ ونستخدمُ طريقةَ الشجرةِ لتوضيحِ ذلكَ:

منزلةُ الآحادِ	١	٣	٥
منزلةُ العشراتِ	٣، ٥	١، ٥	١، ٣
العددُ	٣١، ٥١	١٣، ٥٣	١٥، ٣٥

وبذلكَ تكونُ الأعدادُ التي يمكنُ تكوينُها هيَ: ٣١، ٥١، ١٣، ٥٣، ١٥، ٣٥، وعددُها ٦

وباستعمالِ مبدأ العدِّ يمكنُ معرفةُ عددِ الأعدادِ الناتجةِ دونَ كتابتِها:

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ الآحادِ يساوي ٣

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ العشراتِ يساوي ٢

إذن فإنَّ عددَ الأعدادِ التيْ يمكنُ تكوينُها يساوي ٣ × ٢ = ٦

تدريبٌ ٤–١

لتكنْ ص = {٢، ٤، ٦، ٨}، كَمْ عددًا منْ منزلتينِ مختلفتينِ يمكنُ تكوينُهُ منْ أرقامِ المجموعةِ ص؟

مثالٌ (٤–٢)

لدى عمرَ ٣ قمصان ذات ألوانٍ مختلفة، و ٤ ربطاتِ عنقٍ ذات ألوانٍ مختلفة أيضًا، فكمْ عددَ الطرقِ التي يمكنُ أنْ يظهرَ منْ خلالِها عمرُ بمظهرٍ مختلفٍ؟

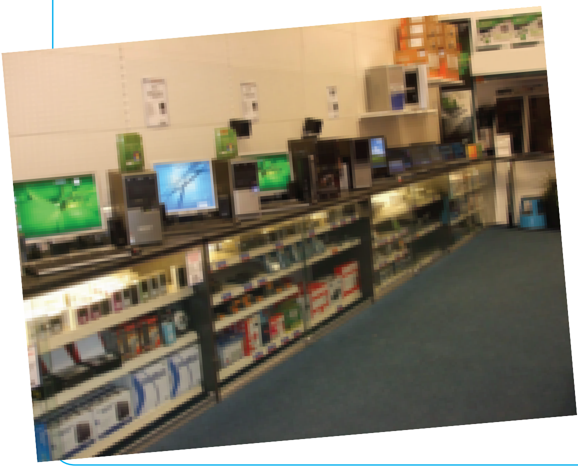
الحلُّ

يختارُ عمرُ القميصَ بواحدةٍ منْ ٣ طرقٍ مختلفة

ويختارُ ربطةَ العنقِ بواحدةٍ من ٤ طرقٍ مختلفة.

عددُ الطرقِ التي يمكنُهُ منْ خلالِها الظهورَ بمظهرٍ مختلفٍ = ٣ × ٤ = ١٢ طريقةً.

تدريبٌ ٤–٢



أرادتْ آيةُ شراءَ حاسوبٍ محمولٍ منْ محلٍ لبيعِ أجهزةِ الحاسوبِ يحتوي (٥) أنواعٍ مختلفةٍ، بكمْ طريقةٍ يمكنُ أنْ تختارَ نوعَ الحاسوبِ؟ وإذا كانَ في المحلِّ (٤) حجومٍ مختلفةٍ لكلِّ نوعٍ، فبكمْ طريقةٍ تستطيعُ أنْ تختارَ حاسوبَها المحمولَ؟

مثالٌ (٤–٣)

كمْ عددًا مكوّنًا مِنْ منزلتينِ يمكنُ تكوينُهُ منْ مجموعةِ الأرقامِ {١، ٤، ٦، ٧، ٨}:

١) إذا سُمحَ بالتكرارِ؟

٢) إذا لمْ يُسمحْ بالتكرارِ؟

الحلُّ

١) إذا سُمحَ بالتكرارِ

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ الآحادِ يساوي ٥

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ العشراتِ يساوي ٥

إذن فإنَّ عددَ الأعدادِ التي يمكنُ تكوينُها يساوي ٥ × ٥ = ٢٥

٢) إذا لمْ يُسمحْ بالتكرارِ

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ الآحادِ يساوي ٥

عددُ طرقِ اختيارِ منزلةِ العشراتِ يساوي ٤

إذن فإنَّ عددَ الأعدادِ التي يمكنُ تكوينُها يساوي ٥ × ٤ = ٢٠

تحدَّثْ

ما سببُ اختلافِ عددِ طرقِ اختيارِ الأعدادِ في الفرعينِ ١ ، ٢ في المثالِ (٤–٣)؟

مثالٌ (٤-٤)

ما عددُ الطرقِ التي يمكنُ منْ خلالِها أنْ تقفَ سيارتانِ في مواقفَ للسياراتِ فيهِ ستةُ مواقفَ في صفٍّ واحدٍ؟

الحلُّ

تقفُ السيارةُ الأولى بطرقٍ عددُها ٦

تقفُ السيارةُ الثانيةُ بطرقٍ عددُها ٥

عددُ الطرقِ التي تقفُ بها السيارتانِ = ٦ × ٥ = ٣٠ طريقةً.

تدريبٌ ٤-٣

بكمْ طريقةٍ يمكنُ اختيارُ رئيسٍ ونائبٍ للرئيسِ للبرلمانِ المدرسيِّ منْ أعضاءِ البرلمانِ البالغِ عددُهم ٢٠ عضوًا؟

فكّرْ وناقشْ

هلْ تستطيعُ استخدامَ مبدأِ العدِّ في المسألةِ الآتيةِ؟

يحتوي واحدٌ منَ الرفوفِ في المكتبةِ ٨ كتبٍ عربيّةٍ و ٤ كتبٍ إنجليزيةٍ، و ٥ كتبٍ فرنسيّةٍ، بكمْ طريقةٍ يمكنُ لشهدَ أنْ تختارَ ثلاثةَ كتبٍ أحدُها بالعربيةِ والثاني بالإنجليزيةِ والثالثُ بالفرنسيةِ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) كمْ كلمةً مكونةً منْ حرفينِ مختلفينِ يمكنُ تكوينُها منَ المجموعةِ {م، ن، ل، ع}، بغضِّ النظرِ عنْ معنى الكلمةِ؟

٢) تنتجُ شركةٌ للألبانِ نوعينِ منَ الحليبِ (كاملِ الدسم، قليلِ الدسم)، منْ خلالِ ثلاثةِ حجومٍ منَ العبواتِ (صغيرٍ، وسطٍ، كبيرٍ)، بكمْ طريقةٍ يمكنُ للمستهلكِ أنْ يشتريَ الحليبَ؟

٣) كمْ عددًا مكوّنًا منْ منزلتينِ مختلفتينِ يمكنُ تكوينُهُ منْ مجموعةِ الأرقامِ {١، ٢، ٣، ٤، ٥} بحيثُ يكونُ رقمُ الآحادِ ٥؟

٤) ما عددُ الطرقِ التيْ يمكنُ أنْ يجلسَ بها بشارٌ وعليٌّ على ٨ مقاعدَ مختلفةٍ موضوعةٍ على استقامةٍ واحدةٍ؟

٥) ما عددُ طرقِ اختيارِ بنطالٍ منْ محلِّ بيعِ ألبسةٍ، يتوفرُ فيهِ ٥ ألوانٍ، و ٤ قياساتٍ مختلفةٍ منْ كلِّ لونٍ؟

٦) ما عددُ النواتجِ الممكنةِ عندَ إلقاءِ حجرِ نردٍ مرتينِ وتسجيلِ عددِ النقاطِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ؟

٤ – ٢ الفضاءُ العينيُّ والتجربةُ العشوائيةُ

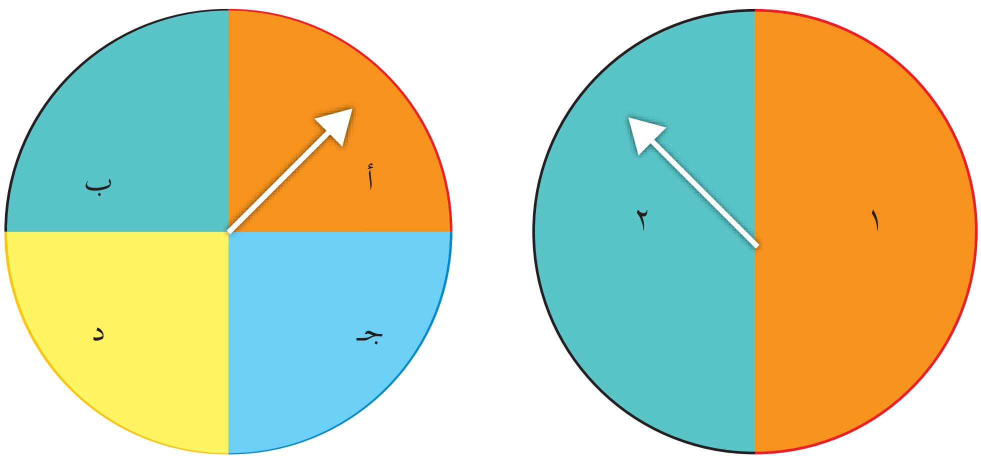
النتاجاتُ

- تجدُ الفضاءَ العينيَّ لتجربةٍ عشوائيةٍ.
- تمثلُ الفضاءَ العينيَّ بالشجرةِ البيانيةِ والمستوى الإحداثيِّ.

لديكَ قرصانِ دائريانِ مزودٌ كلٌّ منهما بمؤشرٍ، الأولُّ مقسومٌ إلى جزأينِ متساويينِ مكتوبٌ عليهما ١، ٢ والثاني مقسومٌ إلى أربعةِ أجزاءٍ متساويةٍ مكتوبٌ عليها الرمزُ أ ، ب ، جـ ، د ، إذا دُوِّرَ المؤشرانِ بحيثُ يستقرُّ المؤشرُ على أحدِ الأجزاءِ، أجبْ عمّا يأتي:

١) اكتبْ جميعَ النواتجِ الممكنةِ منْ عمليةِ تدويرِ كلِّ مؤشرٍ وحدَهُ.

٢) اكتبْ جميعَ النواتجِ الممكنةِ منْ عمليةِ الدورانِ في المؤشرينِ وتسجيلِ النتائجِ على شكلِ أزواجٍ مرتبةٍ (الرقمُ الذي يقفُ عندَه مؤشرُ القرصِ الأوّلِ، الحرفُ الذي يقفُ عندَه مؤشرُ القرصِ الثاني).



الشكلُ (٤ – ١)　　　الشكلُ (٤ – ٢)

يمكنُ معرفةُ النواتجِ الممكنةِ منْ عمليةِ تدويرِ المؤشرِ الأولى وهي: {١، ٢}. لماذا؟

والنواتجِ الممكنةِ من عمليةِ تدويرِ المؤشرِ الثاني وهي: {أ، ب، جـ، د}. لماذا؟

كما يمكنُ معرفةُ جميعِ النواتجِ الممكنةِ لعمليةِ الدورانِ في القرصينِ على شكلِ أزواجٍ مرتبةٍ هي:

{ (١، أ) ، (١، ب) ، (١، جـ) ، (١، د) ، (٢، أ) ، (٢، ب) ، (٢، جـ) ، (٢، د) }

لكنْ لا يمكنُ معرفةُ أيِّها سيتحقق فعلًا إلا بعدَ إجراءِ التجربة، لأنَّ ذلكَ مبنيٌّ على التخمين. مثلُ هذهِ التجاربِ تُسمّى **تجاربَ عشوائيةً**، ومجموعةُ جميعِ النواتجِ الممكنة تُسمّى **الفضاءَ العينيَّ**.

تعريفٌ (١)

التجربةُ العشوائيةُ: هيَ التجربةُ التي يمكنُ معرفةُ جميعِ نواتجِها الممكنةِ قبلَ إجرائِها، ولكنْ لا يمكنُ تحديدُ أيِّ هذهِ النواتجِ سيتحققُ فعلًا إلّا بعدَ إجراءِ التجربة.

الفضاءُ العينيُّ للتجربةِ العشوائيّةِ: هوَ مجموعةُ كلِّ النواتجِ الممكنةِ لهذهِ التجربة، ويُرمزُ لهُ بالرمزِ (Ω)، ويُقرأُ (أوميجا).

فكّرْ وناقشْ

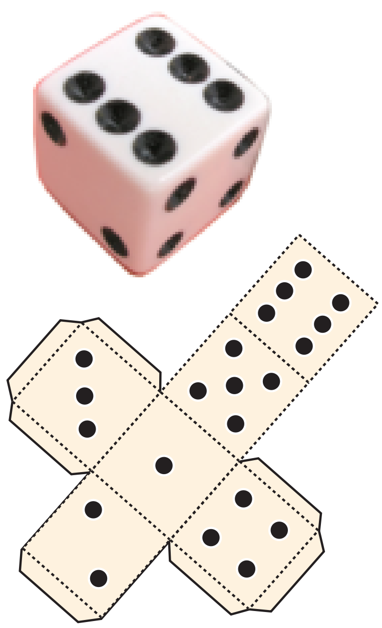
بالرجوعِ إلى المثالِ السابقِ، ما النتائجُ الممكنةُ في حالةِ تسجيلِ نتائجِ المؤشرِ الثاني ثمَّ الأولِّ؟

مثالٌ (٤-٥)

اكتبِ الفضاءَ العينيَّ للتجاربِ العشوائيةِ الآتية:

١) إلقاءِ حجرِ نردٍ مرةً واحدةً وتسجيلِ عددِ النقاطِ على الوجهِ العلويِّ.

٢) إلقاءِ قطعةِ نقدٍ مرةً واحدةً وملاحظةِ الوجهِ الظاهرِ للأعلى.



الحلُّ

١) لاحظْ أنَّهُ عندَ إلقاءِ حجرِ النردِ سيكونُ عددُ النقاطِ على الوجهِ العلويِّ إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ وبناءً على ذلكَ فإنَّ الفضاءَ العينيَّ لتجربةِ إلقاءِ حجرِ النردِ مرةً واحدةً فقطْ هيَ:

$$\Omega = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$$

٢) لاحظْ أنَّهُ عندَ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ سيكونُ الوجهُ الظاهرُ للأعلى صورةً (ص) أو كتابةً (ك) وبناءً على ذلكَ فإنّ الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ
Ω = {ص ، ك}

مثالٌ (٤-٦)

يحتوي صندوقٌ على (٤) بطاقاتٍ متماثلةٍ، مكتوبٌ عليها الأرقامُ: ١، ٣، ٥، ٧، سُحبَ عشوائيًا من الصندوقِ بطاقتانِ على التوالي معَ الإرجاعِ. اكتبِ الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ.

تعلَّمْ

- السحبُ معَ الإرجاعِ يعني إعادةَ البطاقةِ المسحوبةِ أولًا إلى الصندوقِ بعدَ تسجيلِ العددِ المكتوبِ عليها، ثمَّ إجراءَ السحبِ التالي.

الحلُّ

Ω = {(١،١)، (١،٣)، (١،٥)، (١،٧)، (٣،١)، (٣،٣)، (٣،٥)، (٣،٧)، (٥،١)، (٥،٣)،
(٥،٥)، (٥،٧)، (٧،١)، (٧،٣) (٧،٥)، (٧،٧)}

تدريبٌ ٤-٤

اكتبِ الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ في المثالِ (٤-٦) إذا كانَ السحبُ دونَ إرجاعٍ، ثمَّ فسِّرْ سببَ اختلافِ الفضاءِ العينيِّ لهذهِ التجربةِ عنِ الفضاءِ العينيِّ في المثالِ (٤-٦).

تعلَّمْ

- السحبُ دونَ الإرجاعِ يعني سحبَ البطاقةِ الأولى منَ الصندوقِ وتسجيلَ العددِ المكتوبِ عليها، ثمَّ سحبَ البطاقةِ الثانيةِ منَ الصندوقِ دونَ إرجاعِ الأولى.

مثالٌ (٤-٧)

اكتبِ الفضاءَ العينيَّ لتجربةِ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ، ثم اختيارِ أحدِ أرقامِ المجموعةِ س = {١، ٢، ٣، ٤} عشوائيًا. ثمَّ مثّلْ ذلكَ باستخدامِ:

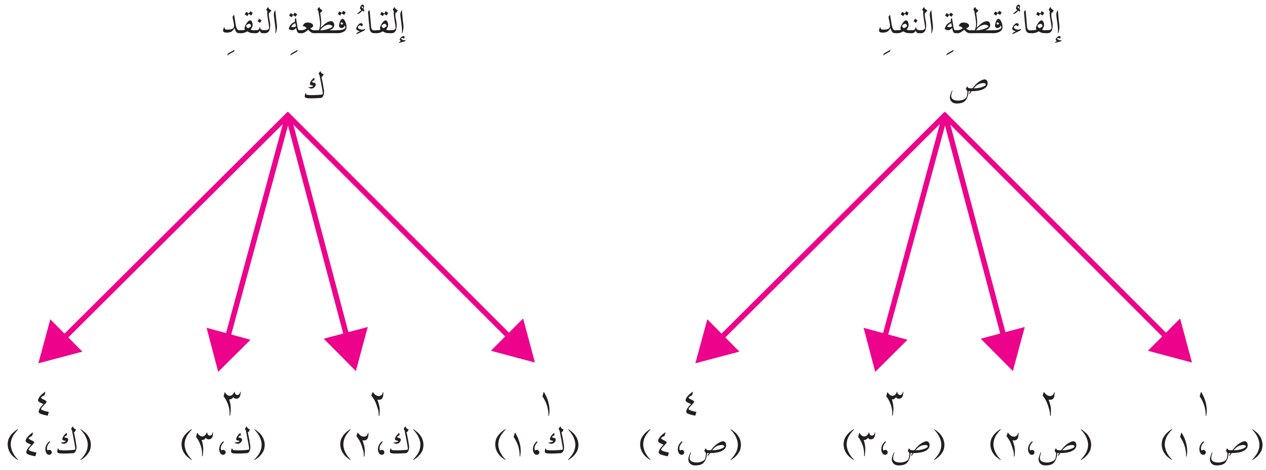
١) الشجرةِ البيانيّةِ.　　　　٢) المستوى الإحداثيِّ

الحلُّ

كلُّ ناتجٍ منْ نواتجِ هذهِ التجربةِ مكوّنٌ منَ الزوجِ المرتبِ إحداثياهُ:

(وجهُ قطعةِ النقدِ، رقمٌ منَ المجموعةِ س) وبناءً على ذلكَ فإنَّ:

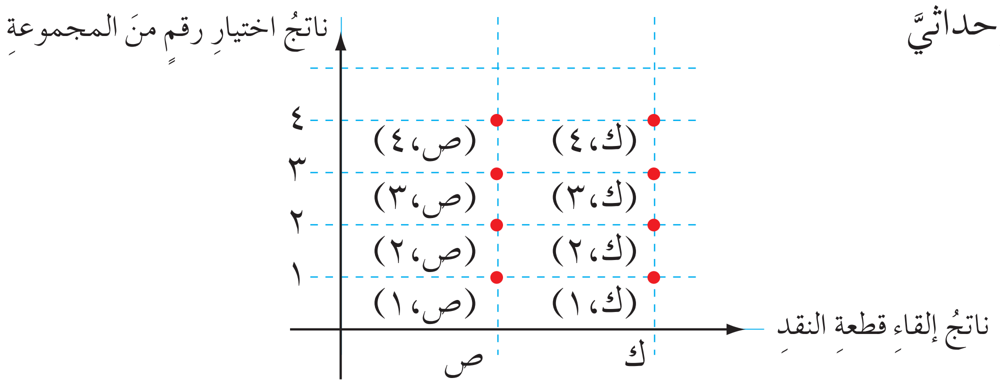
١) الشجرةَ البيانيّةَ:



وبناءً على ذلكَ فإنَّ:

Ω = {(ص، ١)، (ص، ٢)، (ص، ٣)، (ص، ٤)، (ك، ١)، (ك، ٢)، (ك، ٣)، (ك، ٤)}

٢) المستوى الإحداثيّ



الشكلُ (٤-٣).

وبناءً على ذلكَ فإنَّ:

Ω = {(ص، ١)، (ص،٢)، (ص،٣)، (ص،٤)، (ك،١)، (ك،٢)، (ك،٣)، (ك،٤)}

تدريبٌ ٤–٥

أ) اكتبِ الفضاءَ العينيَّ لتجربةِ إلقاءِ حجري نردٍ مختلفينِ معًا مرةً واحدةً فقطْ، وتسجيلِ عددِ النقاطِ على الوجهِ العلويِّ لحجري النردِ باستخدامِ الشجرةِ البيانيةِ.

ب) هلْ يختلفُ الفضاءُ العينيُّ للتجربةِ عنِ الفضاءِ العينيِّ لتجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ مرتينِ متتاليتينِ؟

مثالٌ (٤–٨)

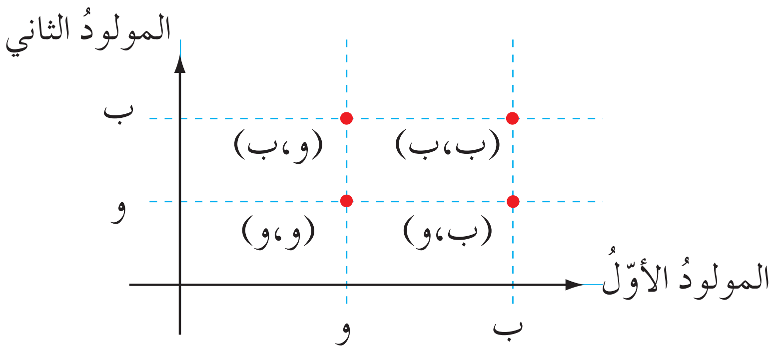
في تجربةِ اختيارٍ عشوائيٍّ لعائلةٍ لديها طفلانِ، وتسجيلِ النتائجِ حسبَ الجنسِ وتسلسلِ الولادةِ. مثِّلِ الفضاءَ العينيَّ لهذهِ التجربةِ بطريقةِ المستوى الإحداثيِّ.

الحلُّ

كلُّ ناتجٍ منْ نواتجِ هذهِ التجربةِ مكّونٌ منَ الزوجِ المرتبِ الذيْ إحداثياهُ:

(جنسُ الطفلِ الأوّلِ، جنسُ الطفلِ الثاني).

ملاحظةٌ لتسهيلِ الكتابةِ نستخدمُ حرفَ **و** إذا كانَ الطفلُ ولدًا، ونستخدمُ الحرفَ **ب** إذا كانَ الطفلُ بنتًا.



وبناءً على ذلكَ فإنَّ: Ω = {(و، و)، (و،ب)، (ب،و)، (ب،ب)}

تدريبٌ ٤–٦

صندوقانِ يحتوي أحدُهما كرتينِ متماثلتينِ: بيضاءَ، وحمراءَ، ويحتوي الصندوقُ الثاني ثلاثَ كراتٍ متماثلةٍ: صفراءَ، وخضراءَ، وزرقاءَ.

في تجربةِ سحبِ كرةٍ منَ الصندوقِ الأوّلِ، ثُمَّ كرةٍ منَ الصندوقِ الثاني عشوائيًا. مثِّلِ الفضاءَ العينيَّ لهذهِ التجربةِ بطريقةِ الشجرةِ البيانيّةِ، والمستوى الإحداثيِّ.

فكّرْ وقدِّمْ تبريرًا

" في تجربةِ سحبِ كرةٍ زرقاءَ منْ صندوقٍ يحتوي (٥) كراتٍ زرقاءَ متماثلةٍ وتسجيلِ اللونِ" هلِ التجربةُ تجربةٌ عشوائيةٌ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) اكتبِ الفضاءَ العينيَّ للتجاربِ العشوائيةِ الآتيةِ:

أ) تجربةِ سحبِ كرةٍ واحدةٍ منْ صندوقٍ يحتوي (١٠) كراتٍ متماثلةٍ، منها (٢) حمراءُ، و(٣) صفراءُ، و(٥) بيضاءُ، وتسجيلِ لونِ الكرةِ.

ب) تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ، ثمَّ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ وملاحظةِ عددِ النقاطِ على الوجهِ العلويِّ لحجرِ النردِ، والوجهِ الظاهرِ لقطعةِ النقدِ.

جـ) تسجيلِ نتيجةِ منتخبِنا الوطنيِّ لكرةِ اليدِ معَ المنتخبِ السعوديِّ.

٢) مثّلِ الفضاءَ العينيَّ لتجربةِ إلقاءِ قطعتي نقدٍ مختلفتينِ مرةً واحدةً وملاحظةِ الوجهينِ الظاهرينِ باستخدامِ:

أ) الشجرةِ البيانيةِ.

ب) المستوى الإحداثيِّ.

٣) مثّلِ الفضاءَ العينيَّ لتجربةِ إلقاءِ ثلاثِ قطعٍ نقديةٍ مختلفةٍ مرةً واحدةً وملاحظةِ الأوجهِ الظاهرةِ باستخدامِ طريقةِ الشجرةِ البيانيةِ.

٤) صُمِّمَ حجرُ نردٍ بحيثُ يحملُ وجهانِ فيهِ الرقمَ ١، ووجهانِ يحملانِ الرقمَ ٣، ووجهانِ يحملانِ الرقمَ ٥، فإذا أُلقيَ هذا الحجرُ مرتينِ متتاليتينِ فاكتبِ الفضاءَ العينيَّ.

٥) اكتبِ الفضاءَ العينيَّ لتجربةِ اختيارِ عددٍ منْ ١ إلى ٤، واختيارِ أحدِ الألوانِ: أحمرَ، أو أزرقَ، أوْ رماديٍّ.

٤ – ٣

الحادثُ

النتاجاتُ

- تتعرّفُ الحادثَ وأنواعَهُ.
- تمثلُ الحادثَ بأشكالِ (فن).

عندما يخوضُ منتخبُنا الوطنيُّ لكرةِ القدمِ مباراةً فإنَّ النتيجةَ تكونُ إمّا فوزًا أو تعادلًا أو خسارةً، وعندَ إلقاءِ قطعةِ النقدِ، فإنَّ النتيجةَ تكونُ ظهورَ الصورةِ، أو ظهورَ الكتابةِ على الوجهِ العلويِّ، وهناكَ تجاربُ أخرى قدْ يكونُ لها أكثرُ مِنْ نتيجةٍ.

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ مرةً واحدةً وتسجيلِ عددِ النقاطِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ، فإنَّ الفضاءَ العينيَّ لهذهِ التجربةِ هوَ:

$$\Omega = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$$

كلُّ مجموعةٍ جزئيّةٍ منَ الفضاءِ العينيِّ تُسمّى **حادثًا**، ويُرمزُ لها بالرمزِ: $ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، ... إلخ

فمثلًا: $ح_١ = \{٣\}$، $ح_٢ = \{٣، ٤، ٦\}$، $ح_٣ = \varnothing$، $ح_٤ = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$

جميعُها مجموعاتٌ جزئيةٌ منَ الفضاءِ العينيِّ Ω، ويُسمّى كلٌّ منها **حادثًا**.

تعريفٌ (٢)

الحادثُ: مجموعةٌ جزئيةٌ مِنَ الفضاءِ العينيِّ لتجربةٍ عشوائيةٍ، ويُرمزُ له بالرمزِ ح.
ويرمزُ لعددِ عناصرِ الحادثِ ح بالرمزِ ع (ح).

مثالٌ (٤–٩)

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ مرةً واحدةً وتسجيلِ عددِ النقاطِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ. اكتبْ كلًّا منَ الحوادثِ الآتيةِ وحدِّدْ عدَدَ عناصرِها:

١) $ح_١$: ظهورُ عددٍ فرديٍّ.

٢) $ح_٢$: ظهورُ عددٍ أوليٍّ.

٣) $ح_٣$: ظهورُ عددٍ أكبرَ منْ ٦

٤) $ح_٤$: ظهورُ عددٍ زوجيٍّ أكبرَ منْ ٤

٥) $ح_٥$: ظهورُ عددٍ أكبرَ مِنْ أوْ يساوي ١

الحلُّ

١) $ح_١$ = {١، ٣، ٥}　　عددُ العناصرِ: ع ($ح_١$) = ٣

٢) $ح_٢$ = {٢، ٣، ٥}　　عددُ العناصرِ: ع ($ح_٢$) = ٣

٣) $ح_٣$ = $\varnothing$　　عددُ العناصرِ: ع ($ح_٣$) = ٠

٤) $ح_٤$ = {٦}　　عددُ العناصرِ: ع ($ح_٤$) = ١

٥) $ح_٥$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}　　عددُ العناصرِ: ع ($ح_٥$) = ٦

لاحظْ أنَّ الحوادثَ قدْ تختلفُ في عددِ عناصرِها، وتُصنفُ الحوادثُ حسبَ عددِ عناصرِها كالآتي:

الحادثُ البسيطُ : هوَ الحادثُ الذي يحوي عنصرًا واحدًا فقطْ منَ الفضاءِ العينيِّ Ω

الحادثُ المركبُ : هوَ الحادثُ الذي يحوي عنصرينِ أوْ أكثرَ منَ الفضاءِ العينيِّ Ω

الحادثُ الأكيدُ : هوَ الحادثُ الذي يحوي جميعَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω

الحادثُ المستحيلُ : هوَ الحادثُ الذي لا يحوي أيَّ عنصرٍ منْ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω

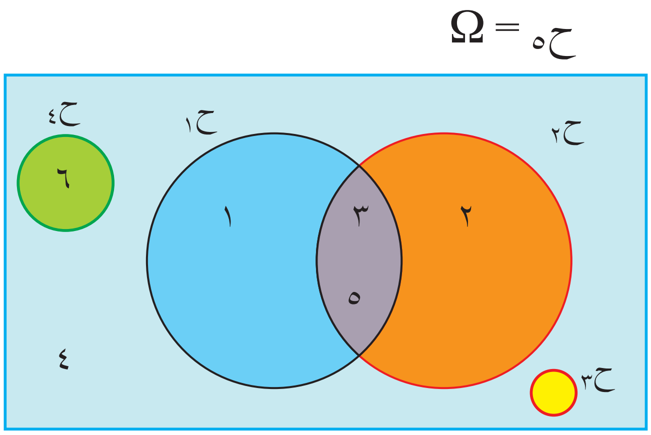
• فكِّرْ

- هلْ يعتبرُ كلُّ حادثٍ أكيدٍ حادثًا مركبًا؟
- هلْ يعتبرُ كلُّ حادثٍ مركبٍ حادثًا أكيدًا؟

مثالٌ (٤-١٠)

مثّلِ الحوادثَ في المثالِ (٤-٩) بأشكالِ (فن).

الحـلُّ



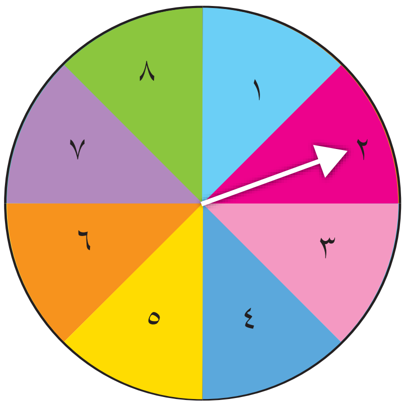
الشكلُ (٤ – ٥)

تدريبٌ ٤-٧

في الشكلِ (٤-٦) إذا دُوِّرَ المؤشِّرُ، اكتبِ الحوادثَ الآتيةَ بذكرِ عناصرِها ومثِّلْها بأشكالِ (فن):

أ) ح١: وقوفُ المؤشرِ عندَ رقمٍ يقبلُ القسمةَ على ٣

ب) ح٢: وقوفُ المؤشرِ عندَ رقمٍ منْ مضاعفاتِ العددِ ٢

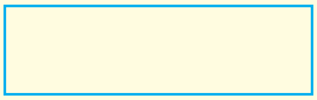
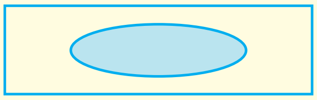
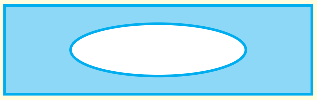
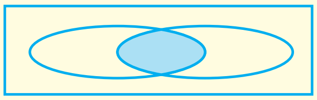
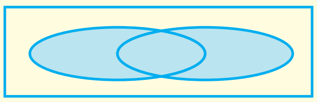
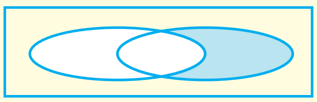


الشكلُ (٤ – ٦)

تدريبٌ ٤-٨

اكتبْ مثالًا لحادثٍ: بسيطٍ، مركبٍ، مستحيلٍ، أكيدٍ، وناقشْ ما توصلتَ إليهِ معَ زملائِكَ.

بما أنَّ الحوادثَ تمثِّلُ مجموعاتٍ جزئيةٍ منَ الفضاءِ العينيِّ، فإنَّهُ يمكنُ إجراءُ العملياتِ عليها كما هوَ موضّحٌ في الجدولِ الآتي:

الرمزُ	الدلالةُ	تمثيلُه بأشكالِ (فن)
Ω	الفضاءُ العينيُّ لتجربةٍ عشوائيةٍ أو حادثٌ أكيدٌ.	
$\varnothing$	الحادثُ المستحيلُ.	
ح $\subset \Omega$	ح حادثٌ منْ Ω (ح محتواةٌ في Ω).	
$\overline{ح}$	الحادثُ المتمِّمُ للحادثِ ح، أو حادث عدمِ وقوعِ الحادثِ ح.	
ح$_1 \cap$ح$_2$	حادثُ وقوعِ الحادثينِ ح$_1$، ح$_2$، **معًا**.	
ح$_1 \cup$ح$_2$	حادثُ وقوعِ ح$_1$ أو وقوعِ ح$_2$ ، أو حادثُ وقوعِ أحدِهما على الأقلِّ.	
ح$_1 -$ ح$_2$	حادثُ وقوعِ ح$_1$ وعدمِ وقوعِ ح$_2$	

الشكلُ (٤ – ٧)

مثالٌ (٤–١١)

في تجربةِ اختيارِ عدد واحد منْ مجموعةِ الأعدادِ {٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢} عشوائيًا، إذا كانَ:

ح$_1$: العددُ المختارُ أكبرُ منْ أوْ يساوي ١٠

ح$_2$: العددُ المختارُ عددٌ زوجيٌّ.

فاكتبِ الحوادثَ الآتيةَ بذكرِ عناصرِها: ح$_1$ ، ح$_2$ ، $\overline{ح_1}$ ، ح$_1 \cup$ح$_2$ ، ح$_1 \cap$ح$_2$ ، ح$_1 -$ ح$_2$

الحلُّ

ح$_1$ = {١٠، ١١، ١٢}

ح$_2$ = {٨، ١٠، ١٢}

$\overline{ح_1}$ = {٨، ٩}

ح$_1 \cup$ح$_2$ = {٨، ١٠، ١١، ١٢}

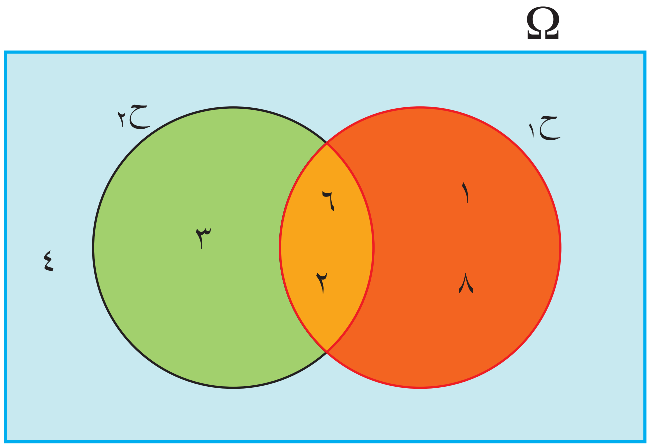
ح$_1 \cap$ح$_2$ = {١٠، ١٢}

ح$_1 -$ ح$_2$ = {١١}

مثالٌ (٤-١٢)

اعتمادًا على الشكلِ (٤ – ٨)، عبِّرْ عنِ الحوادثِ الآتيةِ بذكرِ عناصرِها.

١) Ω ٢) $ح_١$
٣) $ح_٢$ ٤) $\overline{ح_١}$
٥) $ح_١ \cap ح_٢$ ٦) $ح_١ \cup ح_٢$
٧) $ح_١ - ح_٢$ ٨) $ح_٢ - ح_١$



الشكلُ (٤ – ٨)

الحلُّ

١) $\Omega = \{١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٨\}$
٢) $ح_١ = \{١، ٢، ٦، ٨\}$
٣) $ح_٢ = \{٢، ٣، ٦\}$
٤) $\overline{ح_١} = \{٣، ٤\}$
٥) $ح_١ \cap ح_٢ = \{٢، ٦\}$
٦) $ح_١ \cup ح_٢ = \{١، ٢، ٣، ٦، ٨\}$
٧) $ح_١ - ح_٢ = \{١، ٨\}$
٨) $ح_٢ - ح_١ = \{٣\}$

تدريبٌ ٤-٩

يحتوي صندوقٌ على ثلاث كرات متماثلة ملونة: سوداءَ، وحمراءَ، وصفراءَ، سحبتْ كرةٌ ثمَّ أُعيدتْ إلى الصندوقِ، ثمَّ سُحبتْ كرةٌ ثانيةٌ، فإذا كانَ:

$ح_١$: ظهورَ كرتينِ مختلفتينِ في اللونِ $ح_٢$: ظهورَ كرتينِ لهما اللونُ نفسُهُ

$ح_٣$: ظهورَ الكرةِ الثانيةِ حمراءَ.

فجِدْ ما يأتي: $ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$ ، $ح_١ \cup ح_٣$، $ح_١ \cap ح_٢$ ، $ح_١ - ح_٣$، $\overline{ح_١}$ ، $\overline{ح_٢}$، $\overline{(ح_١ \cap ح_٢)}$، $\overline{(ح_١ \cup ح_٢)}$، $\overline{ح_١} \cup \overline{ح_٢}$ ، $\overline{ح_١} \cap \overline{ح_٢}$

• فكِّرْ

في التدريبِ (٤-٩) السابقِ:

- ما العلاقةُ بينَ $\overline{(ح_١ \cap ح_٢)}$ ، $\overline{ح_١} \cup \overline{ح_٢}$ ؟
- ما العلاقةُ بينَ $\overline{(ح_١ \cup ح_٢)}$ ، $\overline{ح_١} \cap \overline{ح_٢}$؟
- هل يوجدُ علاقةٌ بينَ $ح_١ - ح_٢$ ، $ح_٢ - ح_١$؟

تمارينُ ومسائلُ

١) في تجربةِ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ ثمَّ حجرِ نردٍ، إذا كانَ:

$ح_١$: ظهورَ صورةٍ وعددٍ فرديٍّ.

$ح_٢$: ظهورَ كتابةٍ وعددٍ أوليٍّ.

$ح_٣$: ظهورَ صورةٍ وعددٍ أقلَ منْ ٢

فاكتبْ كلًّا منَ الحوادثِ الآتيةِ بذكرِ عناصرِها:

$ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_١ \cup ح_٣$ ، $ح_١ \cap ح_٢$ ، $ح_١ - ح_٢$ ، $\overline{ح_١ \cup ح_٢}$ ، $\overline{ح_١} \cap \overline{ح_٢}$

٢) في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ مرةً واحدةً، ما نوعُ الحوادثِ الآتيةِ؟

$ح_١ = \{٥\}$ ، $ح_٢ = \{٢، ٤\}$، $ح_٣ = \varnothing$ ، $ح_٤ = \Omega$

٣) ما ناتجُ اتحادِ جميعِ الحوادثِ البسيطةِ لتجربةٍ عشوائيةٍ؟

٤) في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ مرتينِ، إذا كانَ:

$ح_١$: = {(١، ٤)، (٢، ٣)، (٣، ٢)، (٤، ١)}

$ح_٢$: = {(١، ٢)، (٢، ١)}

صِفْ بالكلماتِ كلَّ حادثٍ منها.

٥) إذا كانَ $ح_١$، $ح_٢$، حادثينِ وكانَ $ح_١ \supset ح_٢$، فجدْ ما يأتي:

أ) $ح_١ \cup ح_٢$ ب) $ح_١ \cap ح_٢$ جـ) $ح_١ - ح_٢$

٦) في تجربةِ اختيارٍ عشوائيٍّ لعائلةٍ لديها طفلانِ، وتسجيلِ النتائجِ حسبَ الجنسِ وتسلسلِ الولادةِ، فإذا كانَ:

$ح_١$: لدى العائلةِ بنتٌ واحدةٌ على الأكثرِ.

$ح_٢$: لدى العائلةِ ولدانِ.

$ح_٣$: لدى العائلةِ ولدٌ وبنتٌ.

فاكتبْ عناصرَ: Ω ، $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_١ \cup ح_٢$

٤ – ٤ احتمالُ الحادثِ

النتاجات

- تتعرّفُ مفهومَ الاحتمالِ لحادثٍ.
- تَجدُ احتمالَ الحادثِ.

قبلَ بدايةِ مباراةِ كرةِ القدمِ بينَ منتخبي (الأردنِّ)، و(العراقِ)، قامَ حكمُ المباراةِ بإلقاءِ قطعةِ نقدٍ، لمعرفةِ مَنْ سيبدأُ اللعبَ أولًا، فإذا كانَ الوجهُ الظاهرُ صورةً، يبدأُ المنتخبُ الأردنيُّ اللعبَ، وإذا كانَ الوجهُ الظاهرُ كتابةً يبدأُ المنتخبُ العراقيُّ اللعبَ.

أيُّ المنتخبينِ لهُ فرصةٌ أكبرُ في أنْ يبدأَ اللعبَ أولًا؟ ولماذا؟

عندَ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ يظهرُ على الوجهِ العلويِّ إمّا صورةٌ أوْ كتابةٌ، وإذا ألقى طالبٌ قطعةَ النقدِ (١٠) مراتٍ، وحصلَ على صورةٍ (٤) مراتٍ، فإنَّ ناتجَ قسمةِ عددِ مراتِ ظهورِ الصورةِ على عددِ مراتِ إلقاءِ قطعةِ النقدِ يساوي $\frac{٤}{١٠}$

ويُسمّى العددُ $\frac{٤}{١٠}$ **التكرارَ النسبيَّ** لحادثِ ظهورِ الصورةِ في هذهِ التجربةِ.

تعريفٌ (٣)

التكرارُ النسبيُّ لحادثٍ ما: هو النسبةُ بينَ عددِ مراتِ وقوعِ الحادثِ إلى عددِ مراتِ إجراءِ التجربةِ.

وإذا زادَ عددُ مراتِ إجراءِ تجربةِ إلقاءِ قطعةِ النقدِ ليصبحَ عددًا كبيرًا جدًا، فإنَّ التكرارَ النسبيَّ يقتربُ منَ العددِ $\frac{١}{٢}$؛ لأنَّ النواتجَ ص، ك لهما فرصةُ الحدوثِ نفسُها.

ويُسمّى العددُ الثابتُ $\frac{١}{٢}$ **احتمالَ** ظهورِ الصورةِ عندَ إلقاءِ قطعةِ النقـدِ مرةً واحـدةً. وإذا رمزنا للحادثِ بالرمزِ ح، وللاحتمالِ بالرمزِ ل، فالرمزُ **ل(ح)** يعني احتمالَ وقوعِ الحادثِ ح أيْ أنَّ

ل(ح) = $\frac{١}{٢}$

إنَّ التكرارَ النسبيَّ لحادثٍ ما هوَ تقديرٌ لاحتمالِ ذلكَ الحادثِ عندَ ازديادِ عددِ مرات إجراءِ التجربةِ بشكلٍ كبيرٍ جدًا، ولأنَّ حسابَ احتمالِ الحادثِ عنْ طريقِ حسابِ التكرارِ النسبيِّ فيهِ نوعٌ مِنَ الصعوبةِ وعدمِ الدّقةِ العلميّةِ، فيمكنُ حسابُ احتمالِ حادثٍ منَ العلاقةِ:

قاعدةٌ (٢)

$$\text{احتمالُ وقوعِ الحادثِ ح} = \frac{\text{عددَ عناصرِ الحادثِ ح}}{\text{عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ } \Omega}$$

وبالرموزِ ل(ح) = $\frac{\text{ع(ح)}}{\text{ع}(\Omega)}$ ، حيثُ ع(ح): عددُ عناصرِ الحادثِ، ع(Ω): عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω.

فكّرْ وقدِّمْ تبريرًا

إذا كانَ ح حادثًا، وكان ل(ح) = $\frac{٣}{٤}$ وكانَ عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ = ١٢ عنصرًا، فما عددُ عناصرِ الحادثِ ح؟

مثالٌ (٤-١٣)

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ مرةً واحدةً، ما احتمالُ:

١) ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ ٢؟ ٢) ظهورِ العددِ ٥؟

الحلُّ

الفضاءُ العينيُّ Ω = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

١) ح$_١$: حادثُ ظهورِ عددٍ أكبرَ منْ ٢

ح$_١$ = {٣، ٤، ٥، ٦}

$$\text{ل(ح}_١\text{)} = \frac{\text{عددَ عناصرِ الحادثِ ح}_١}{\text{عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ } \Omega} = \frac{٤}{٦}$$

٢) $ح_٢$: حادثُ ظهورِ العددِ ٥

$ح_٢ = \{٥\}$

$$ل(ح_٢) = \frac{\text{عددَ عناصرِ الحادثِ } ح_٢}{\text{عددِ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ } \Omega} = \frac{١}{٦}$$

مثالٌ (٤-١٤)

في تجربةِ إلقاءِ قطعتي نقد مختلفتينِ مرةً واحدةً ما احتمالُ الحوادثِ الآتيةِ:

$ح_١$: ظهورُ الصورتينِ معًا؟

$ح_٢$: ظهورُ الكتابةِ مرةً واحدةً على الأقلِّ؟

$ح_٣$: ظهورُ الكتابةِ مرةً واحدةً على الأكثرِ؟

الحلُّ

الفضاءُ العينيُّ Ω = {(ص،ص)، (ص،ك)، (ك،ص)، (ك،ك)}

$ح_١$: {(ص،ص)} ومنها $ل(ح_١) = \frac{١}{٤}$

$ح_٢$: {(ص،ك)، (ك،ص)، (ك،ك)} ومنها $ل(ح_٢) = \frac{٣}{٤}$

$ح_٣$: {(ص،ص)، (ك،ص)، (ك،ص)} ومنها $ل(ح_٣) = \frac{٣}{٤}$

تدريبٌ (٤-١٠)

صندوقٌ يحتوي على ١٥ كرةً متماثلةً منها: ٥ كرات حمراءَ، ٣ كرات صفراءَ، ٧ كرات زرقاءَ، سُحبتْ منَ الصندوقِ كرةٌ واحدةٌ عشوائيًا. ما احتمالُ أن تكونَ الكرةُ المسحوبةُ:

أ) حمراءَ؟ ب) صفراءَ؟ جـ) زرقاءَ؟

مثالٌ (٤-١٥)

عندَ سؤالِ طالباتِ الصفِّ التاسعِ البالغِ عددُهنَّ (٣٠) طالبةً عنْ عددِ إخوتِهِنَّ كانتِ النتائجُ كالآتي:

عددُ الإخوةِ	٠	١	٢	٣	٤
عددُ الطالباتِ	٣	٥	٦	١٤	٢

فإذا اختيرتْ إحدى طالباتِ الصفِّ عشوائيًا فما احتمالُ أنْ يكونَ:

١) ليسَ لها إخوةٌ ٢) عددَ إخوتِها ٢ فقطْ ٣) عددَ إخوتِها أكثرَ منْ ٢

الحلُّ

١) ل (ليسَ لها إخوةٌ) = $\frac{\text{عددَ الطالباتِ اللّاتي ليسَ لهنَّ إخوةٌ}}{\text{عددِ طالباتِ الصفِّ كاملًا}} = \frac{٣}{٣٠}$

٢) ل (عددُ إخوتها ٢ فقطْ) = $\frac{\text{عددَ الطالباتِ اللّاتي عددُ إخوتِهنَّ ٢ فقطْ}}{\text{عددِ طالباتِ الصفِّ كاملًا}} = \frac{٦}{٣٠}$

٣) ل (عددُ إخوتِها أكثرَ مِنْ ٢) = $\frac{١٦}{٣٠} = \frac{٨}{١٥}$ برّرْ هذهِ النتيجةَ.

تدريبٌ ٤-١١

صفٌّ فيه (٢٥) طالبًا، (١٥) طالبًا منهم يلعبونَ كرةَ القدمِ، و(١٢) طالبًا منهم يلعبونَ كرةَ السّلةِ، و(١٠) طلابٍ منهم يلعبونَ كرةَ القدمِ وكرةَ السّلةِ معًا، اختيرَ أحدُ طلبةِ هذا الصفِّ عشوائيًا، احسبِ احتمالَ أنْ يكونَ الطالبُ الذي تمَّ اختيارُهُ:

أ) يلعبُ كرةَ القدمِ ولا يلعبُ كرةَ السّلةِ.

ب) يلعبُ كرةَ السّلةِ فقطْ.

جـ) لا يلعبُ أيًّا مِنَ اللعبتينِ.

مثالٌ (٤–١٦)

في تجربةِ إلقاءِ حجري نردٍ مختلفتينِ مرةً واحدةً وتسجيلِ العددينِ على الوجهينِ الظاهرينِ للأعلى، ما احتمالُ:

١) $ح_١$: مجموعُ العددينِ على الوجهينِ الظاهرينِ يساوي ٣؟

٢) $ح_٢$: العددانِ على الوجهينِ الظاهرينِ متساويانِ؟

٣) $ح_٣$: العددُ الثاني مثلي العددِ الأوّلِ؟

الحلُّ

عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω يساوي ٣٦ عنصرًا. لماذا؟

١) $ح_١$: {(١، ٢)، (٢، ١) } ومنها ل($ح_١$) $= \frac{٢}{٣٦}$

٢) $ح_٢$: {(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦) } ومنها ل($ح_٢$) $= \frac{١}{٦}$

(برّرْ هذهِ النتيجةَ).

٣) $ح_٣$: {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)} ومنها ل($ح_٣$) $= \frac{١}{١٢}$ لماذا؟

تدريبٌ ٤–١٢

صفٌّ فيهِ (٣٥) طالبًا، منهم (١٦) طالبًا عيونُهم سوداءُ، وبقيةُ الطلبةِ عيونُهم عسلّيةٌ، إذا اختيرَ أحدُ الطلبةِ عشوائيًا، فما احتمالُ أن تكونَ:

أ) عيناهُ سوداوينِ؟ ب) عيناهُ عسليتينِ؟

• فكِّرْ

إذا كانَ ح حادثًا في تجربةٍ عشوائيةٍ فإن ٠ ≤ ل(ح) ≤ ١، لماذا؟

تمارينُ ومسائلُ

١) في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ ٣٠٠ مرةٍ، إذا ظهرَ الرقمُ (٥) ٤٨ مرةً، ما التكرارُ النسبيُّ لظهورِ الرقمِ ٥؟

٢) إذا كانَ عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ لتجربةٍ ما يساوي (١٥) عنصرًا. فما احتمالُ كلٍّ منَ الحوادثِ: البسيطِ، الأكيدِ، المستحيلِ؟

٣) ما احتمالُ اختيارِ عددٍ أوليٍّ منَ المجموعةِ {٢، ٤، ٦، ١٢، ١٣، ١٥} عشوائيًا؟

٤) يمثلُ الجدولُ الآتي أعدادَ طلبةِ الصفينِ الأوّلِ والثاني، موزعينَ على شعبتينِ في مدرسةٍ أساسيّةٍ:

الصفُّ	شعبةُ أ	شعبةُ ب	المجموعُ
الأولُ	١٨	٢٢	٤٠
الثاني	٢٤	٢٦	٥٠
المجموعُ	٤٢	٤٨	٩٠

إذا اخترنَا منْ بينِهم طالبًا عشوائيًا، فما احتمالُ أنْ يكونَ مِنْ طلبةِ الصفِّ:

أ) الأوّلِ؟ ب) الثاني؟

جـ) الأوّلِ (شعبةُ أ)؟ د) الثاني (شعبةُ ب)؟

٥) صندوقٌ يحتوي (٤) بطاقاتٍ متماثلة تحملُ الأسماءَ: محمد، أحمد، سالم، علي، إذا سُحِبَتْ بطاقةٌ عشوائيًا مِنَ الصندوقِ.

أ) ما احتمالُ ظهورِ اسمِ محمّدٍ على البطاقةِ المسحوبةِ؟

ب) ما احتمالُ عدمِ ظهورِ اسمِ سالمٍ على البطاقةِ المسحوبةِ؟

مراجعةٌ

١) أَعطِ مثالًا لتجربةٍ عشوائيّةٍ وحدِّدْ فضاءَها العينيَّ، ثمَّ أعطِ أمثلةً على الأنواعِ المختلفةِ للحوادثِ.

٢) دخلَ ريّانُ محلًا للأحذيةِ فوجدَ فيه ٤ ألوانٍ، و٣ موديلاتٍ من الأحذيةِ من المقاسِ الذي يناسبُه، بكمْ طريقةٍ يمكنُهُ اختيارُ حذائِهِ؟

٣) قامَ ثلاثةٌ منْ طلبةِ الصفِّ التاسعِ بتجربةِ قياسِ درجةِ غليانِ الماءِ في مختبرِ العلومِ في المدرسةِ، وسلّمَ كلٌّ منهمُ النتيجةَ إلى المعلمِ. هلْ يمكنُ اعتبارُ هذهِ التجربةِ تجربةً عشوائيةً؟ لماذا؟

٤) في تجربةِ إلقاءِ حجري نردٍ مرةً واحدةً، اكتبِ الحوادثَ الآتيةَ بذكرِ عناصرِها

أ) $ح_١$: مجموعُ الرقمينِ الظاهرينِ يساوي ٣

ب) $ح_٢$: مجموعُ الرقمينِ الظاهرينِ أكبرُ من ٩

جـ) $ح_٣$: الرقمانِ الظاهرانِ متساويانِ.

د) $ح_٤$: حاصلُ ضربِ الرقمينِ الظاهرينِ عددٌ زوجيٌّ.

هـ) $ح_٢ - ح_٣$

و) $\overline{ح_٤}$

ز) $ح_١ \cap ح_٢$

٥) لدى عامرٍ (٣٠) بطاقةٍ متماثلةٍ مرقمةٍ منْ ١ إلى ٣٠، سحبَ منها بطاقةً واحدةً عشوائيًا، جِدِ احتمالَ أنْ يكونَ العددُ الظاهرُ على البطاقةِ المسحوبةِ:

أ) منْ مضاعفاتِ العددِ ٤

ب) يقبلُ القسمةَ على ٢ أو ٣

٦) تضمُّ روضةُ أطفالٍ (١٠٠) طفلٍ، منهم (٦٠) طفلًا يحبونَ اللعبَ، و(٢٠) طفلًا يحبونَ الرسمَ، و(١٠) أطفالٍ يحبونَ اللعبَ والرسمَ معًا، اختير أحدُ الأطفالِ عشوائيًا. ما احتمالُ أنْ يكونَ هذا الطفلُ:

أ) يحبُّ اللعبَ فقطْ؟

ب) يحبُّ الرسمَ ولا يحبُّ اللعبَ؟

جـ) لا يحبُّ اللعبَ ولا يحبُّ الرسمَ؟

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) يتكونُ هذا السؤالُ منْ (٤) فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ منْ متعدّدٍ ولكلٍّ منها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منْها فقطْ صحيحٌ، انقلْ إلى دفترِكَ رقمَ الفقرةِ، وأمامَهُ رمزُ البديلِ الصحيحِ:

(١) يصنعُ محلُّ حلوى أربعةَ أنواعٍ منَ الكعكِ، كلُّ نوعٍ بثلاثِ نكهاتٍ. فإنَّ عددُ أنواعِ الكعكِ الذي يُصنعُ في المحلِّ يساوي:

أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٧ د) ١٢

(٢) واحدةٌ منَ التجاربِ الآتيةِ **لا** تمثّلُ تجربةً عشوائيةً:

أ) إلقاءِ حجرِ نردٍ.

ب) إلقاءِ قطعةِ نقدٍ ثمَّ حجرِ نردٍ.

جـ) سحبِ كرةٍ منْ صندوقٍ به كراتٌ مختلفةُ اللّونِ دونَ النظرِ إليها.

د) قياسِ نسبةِ عددِ ذراتِ الأوكسجينِ إلى عددِ ذراتِ الهيدروجينِ في الماءِ.

(٣) في مقصفِ المدرسةِ (٦) علبِ عصيرِ ليمونٍ، و (١٤) علبةَ عصيرِ برتقالٍ، و (٤) علبِ عصيرِ تفاحٍ. إذا اختيرت علبةُ عصيرٍ عشوائيًّا منَ المقصفِ، فإنَّ احتمالَ أنْ تكونَ العلبةُ علبةَ عصيرِ تفاحٍ يساوي:

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٦}$ جـ) $\frac{٧}{١٢}$ د) $\frac{١}{٥}$

(٤) أُلقيَ حجرُ نردٍ ٣٠ مرةً، وظهرَ الرقمُ (٥) ستَ مراتٍ، فإنَّ التكرارَ النسبيَّ لحادثِ ظهورِ الرقمِ (٥)، يساوي:

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{٥}$ جـ) $\frac{١}{٦}$ د) $\frac{١}{٣٠}$

٢) كمْ عددًا أكبرَ منْ ٥٠ ومنْ منزلتينِ مختلفتينِ يمكنُ تكوينُه منَ المجموعةِ: {٢، ٣، ٥، ٧} ؟

٣) اكتبِ الفضاءَ العينيَّ لتجربةِ سحبِ بطاقتينِ على التوالي معَ الإرجاعِ منْ صندوقٍ يحتوي (٣) بطاقاتٍ متماثلةٍ مرقمةٍ بالأرقامِ ٢، ٣، ٦

٤) عندَ كتابةِ عددٍ مكوَّنٍ منْ منزلتينِ منْ مجموعةِ الأعدادِ {٢، ٣، ٤، ٥}، إذا كانَ :

$ح_1$: رقمُ الآحادِ فرديٌّ.

$ح_2$: رقمُ العشراتِ أوّليٌّ.

فاكتبِ الحوادثَ الآتيةَ بذكرِ عناصرِها:

$$ح_1 \cap ح_2 \text{ ، } ح_1 \cup ح_2 \text{ ، } ح_1 - ح_2 \text{ ، } \overline{ح_1} \text{ ، } \Omega$$

٥) منْ (٤٠٠)حالةِ ولادةٍ، وُجدَ أنَّ عددَ الإناثِ (٢٧٠)، جِدِ التكرارَ النسبيَّ لحادثِ: المولودُ ذكرٌ.

٦) يتكوّنُ صفٌّ منْ (٢٥) طالبةً، منهم (١٠) طالباتٍ عيونُهنَّ عسليةٌ، و(١٢) طالبةً شعرُهُنَّ أسودُ، و(٧) طالباتٍ عيونُهنَّ عسليةٌ وشعرُهُنَّ أسودُ، إذا اختيرتْ طالبةٌ عشوائيًا فجِدِ احتمالَ:

أ) أنْ تكونَ الطالبةُ ذاتَ شعرٍ أسودَ فقطْ.

ب) أنْ تكونَ الطالبةُ ذاتَ عيونٍ عسليّةٍ فقطْ.

جـ) أنْ تكونَ الطالبةُ ذاتَ شعرٍ أسودَ أو عيونٍ عسليةٍ.

د) أن تكونَ الطالبةُ ذاتَ عيونٍ ليستْ عسليةً وشعرُها ليسَ أسودَ.

تمَّ بحمدِ اللّهِ تَعالى