الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الأول

11

كتاب الطالب

الرياضيات

الصف الحادي عشر- الفرع الأدبي

الفصل الدراسي الأول

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

نور محمد حسان

إبراهيم عقله القادري

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هـذا الكتـاب في مـدارس المملكـة الأردنيـة الهاشـمية جميعهـا، بناءً عـلى قرار المجلـس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج في جلسـته رقـم (2021/3)، تاريـخ 2021/6/10 م، وقرار مجلـس التربيـة والتعليم رقـم (2021/111)، تاريـخ 2021/6/30 م، بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2021 / 2022 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2021.
- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
ISBN: 978 - 9923 - 41 - 364 - 7

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2055)

375.001
الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج
الرياضيـات: الصـف الحـادي عشـر: الفـرع الأدبـي: كتـاب الطالـب: (الفصـل الدراسـي الأول)/ المركـز الوطني لتطويـر المناهـج. – ط2؛
مزيـدة ومنقحـة. – عمـان: المركـز، 2022
(85) ص.
ر.إ.: 2055/4/2022
الواصفات: / تدريس الرياضيات/ / أساليب التدريس/ / المناهج / / التعليم الثانوي /
يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.
British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1442 هـ / 2021 م
أعيدت طباعته 1443 هـ / 2022 م

المقدمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـمية الراسـخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معينًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاريّ، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً وأعدها وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنيّة؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

وقد روعي فـي إعداد كتب الرياضيـات للمرحلة الثانويـة تضمينها الموضوعات الرياضيـة الأكثر أهمية واسـتخدامًا في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُغية إعداد الطلبة للدراسة الجامعيّة إعدادًا جيّدًا يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. كما حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائيّة متدرجة تتيح للطلبة فرصة تعلمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

كما روعي تقديم الموضوعات بطريقة منظمة جاذبة ومدعمة بتمثيلات بيانية ومزوّدة بإرشادات تعين الطلبة على مواصلة تعلمهم بسلاسة من دون تعثر؛ فهي تذكرهم بالخبرات التعليميّة التي امتلكوها سابقًا وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة ببعضها ربطًا وثيقًا. إضافة إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات حياتيّة تحفِّز الطلبة على تعلّم الرياضيّات بشغف وتجعله ذا معنى.

ولأنَّ كثرة تدرُّب الطلبة على حَلِّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طلاقتهم الإجرائيّة فقد تضمّن كتابا الطالـب والتمارين عددًا كافيًا من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسيّ بصفته مرجعًا موثوقًا ورصينًا يغنيهم عن البحث عن أيّة مراجع أو مصادر إضافيّة، ويحقّق العدالة في التعلّم.

ونحن إذ نُقدِّم هـذا الكتاب، نؤمّل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلُّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنْ نستمرَّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 1 البرمجة الخطية 6

الدرس 1 حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا 8

الدرس 2 حَلُّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا 15

معمل برمجية جيوجبرا: تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا 23

الدرس 3 البرمجة الخطية 25

اختبار نهاية الوحدة 33

الوحدة 2 مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق 34

الدرس 1 مبدأ العَدِّ الأساسي 36

الدرس 2 مضروب العدد 42

الدرس 3 التباديل 46

الدرس 4 التوافيق 52

اختبار نهاية الوحدة 57

قائمة المحتويات

الوحدة 3 الاحتمالات 58

الدرس 1 الاحتمال بالتباديل والتوافيق 60

الدرس 2 المتغيرات العشوائية 67

الدرس 3 احتمال المتغير العشوائي 71

الدرس 4 توقُّع المتغير العشوائي 78

اختبار نهاية الوحدة 84

الوحدة
1

البرمجة الخطية
Linear Programming

ما أهمية هذه الوحدة؟

طُوِّرت نظرية البرمجة الخطية في بداية الحرب العالمية الثانية عام 1939م، واستُعمِلت لتقليل التكلفة وزيادة الإنتاجية في كثير من المجالات، وقد استفادت منها الشركات التجارية في جَنْي مزيد من الأرباح وتقليل الخسائر، وكذلك جدولة رحلات الطيران، وإنشاء خطوط الهاتف. سأتعرَّف في هذه الوحدة البرمجية الخطية، وبعض تطبيقاتها الحياتية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حَلَّ متباينة خطية بمتغير واحد، وتمثيلها على خط الأعداد.
- ✓ تمثيل متباينة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي.
- ✓ حَلَّ نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين.
- ✓ تمثيل نظام مُكوَّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين بيانيًّا.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ حَلَّ متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا.
- ◄ حَلَّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا.
- ◄ حَلَّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين باستعمال برمجية جيوجبرا.
- ◄ حَلَّ مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.

الدرس
1

حَلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا
Solving Linear Inequality in Two Variables Graphically

فكرة الدرس حَلُّ متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا.

المصطلحات منطقة الحلول المُمكِنة، المستقيم الحدودي.

مسألة اليوم تصنع نهى أســاور وأطواقًا من الخرز، وتستعمل 10 حبّات من الخرز لصنع السِّوار الواحد، و45 حبَّة لصنع الطوق الواحد.

كم سِوارًا وطوقًا يُمكِنها أنْ تصنع من 214 حبَّة خرز؟

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المتباينة الخطية جملة رياضية تحوي الرمز ≥، أو ≤، أو >، أو <، وأنَّها قد تحتوي على متغير واحد أو متغيرين. من الأمثلة على المتباينات الخطية بمتغيرين:

$x - 4y < -1$ | $3x + 2y > 2$ | $2x + y \leq 1$

يكــون الزوج المُرتَّب (a, b) حَــلًّا للمتباينة الخطية بمتغيريــن إذا كان الناتج صحيحًا عند تعويض إحداثييه في المتباينة.

أتذكَّر

تكون جميــع الأعداد الحقيقية التي تزيد على العدد a حَلًّا للمتباينة: $x > a$، وتكــون جميع الأعــداد الحقيقية التي تزيد على (أو تساوي) العدد a حَلًّا للمتباينة: $x \geq a$.

مثال 1

أُحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x - y \leq 3$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 **(1, 2)**

أُعوِّض الزوج المُرتَّب (1, 2) في المتباينة:

المتباينة الخطية $x - y \leq 3$

بالتعويض $1 - 2 \stackrel{?}{\leq} 3$

الناتج صحيح ✓ $-1 \leq 3$

أُلاحِــظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فــإنَّ الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المُرتَّب (1, 2) يُمثِّل حَلًّا لها.

2 **(7, 3)**

أُعوِّض الزوج المُرتَّب (7, 3) في المتباينة:

المتباينة الخطية $x - y \leq 3$

بالتعويض $7 - 3 \overset{?}{\leq} 3$

الناتج غير صحيح $4 \not\leq 3$ ✗

أُلاحِـظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنَّ الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، الزوج المُرتَّب (7, 3) لا يُمثِّل حَلًّا لها.

3 **(2, −1)**

أُعوِّض الزوج المُرتَّب (2, −1) في المتباينة:

المتباينة الخطية $x - y \leq 3$

بالتعويض $2 - (-1) \overset{?}{\leq} 3$

الناتج صحيح $3 \leq 3$ ✓

أُلاحِـظ أنَّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فـإنَّ الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المُرتَّب (2, −1) يُمثِّل حَلًّا لها.

أتحقَّق من فهمي

أُحدِّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x + 2y > 1$ في كلٍّ ممّا يأتي:

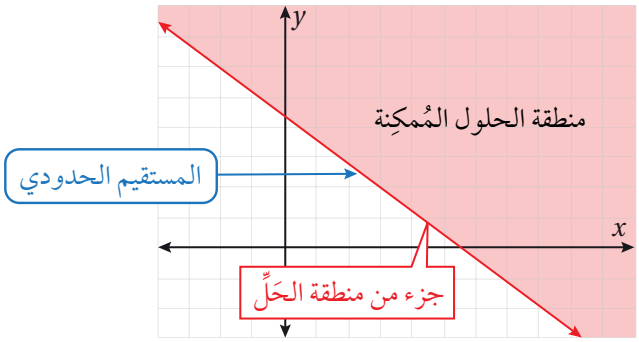
a) (2, 3) **b)** (1, −2) **c)** (1, 0)

لغة الرياضيات

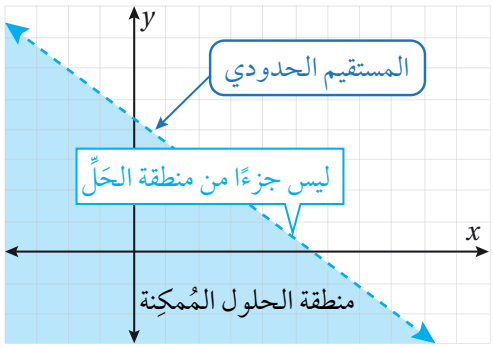
يُمكِن اسـتعمال رموز عِـدَّة للدلالة على عدم تحقُّق المتباينة. فمثلًا، للتعبير عن عدم تحقُّق (أقـل) أو (يسـاوي)، يُمكِن اسـتعمال أحد الرمزين الآتيين:
$\not\leq$, $\not\geq$

عنـد تمثيـل المتباينـة الخطيـة بيانيًّـا فـي المسـتوى الإحداثي، فـإنَّ النقـاط التي تُمثِّـل جميع حلولهـا المُمكِنـة تُسـمّى **منطقـة الحلـول المُمكِنـة** (feasible reagion). لتمثيـل المتباينة بيانيًّـا، أبـدأ برسـم مسـتقيم المعادلـة المرافقـة للمتباينـة، التي أحصـل عليها باسـتبدال الرمز ($\leq$ ، $\geq$ ، $<$، $>$) برمـز المسـاواة ($=$)، حيـث تُمثِّـل المعادلـة الناتجـة مسـتقيمًا يُسـمّى **المسـتقيم الحـدودي** (boundary line)؛ وهـو مسـتقيم يُقسِّـم المسـتوى الإحداثـي إلـى جزأيـن، أحدهمـا منطقـة الحلـول المُمكِنة.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز ≥ أو الرمز ≤، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي متصلًا كما في الشكل الآتي:



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءًا من منطقة الحلول المُمكِنة إذا تضمَّنت المتباينة الرمز < أو الرمز >، عندئذٍ يُرسَم المستقيم الحدودي مُتقطِّعًا كما في الشكل الآتي:



لتحديد أيِّ المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول المُمكِنة، أختار أيَّ نقطة (a, b) لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أُعوِّضها في المتباينة الخطية، فإذا كانت تُحقِّقها (أيْ ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أُظلِّل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلّا أُظلِّل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 2

أُمثِّل المتباينة الخطية: $2x + 3y < 6$ في المستوى الإحداثي.

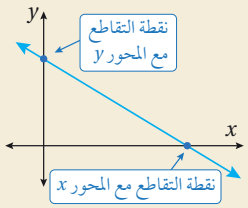
الخطوة 1: أمثِّل المستقيم الحدودي.

أُمثِّل المستقيم الحدودي: $2x + 3y = 6$ بيانيًّا، ثم أُنشِئ جدول قِيَم لإيجاد نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين:

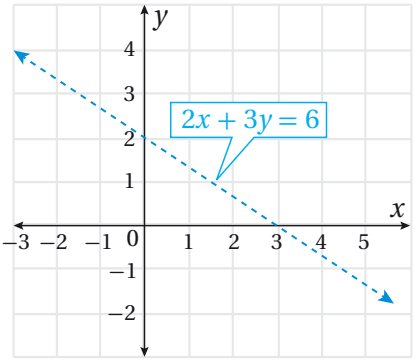
x	0	3
y	2	0

أتذكَّر

لتمثيل معادلة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y = 0$ في المعادلة، ثم أجد نقطة تقاطعه مع المحور y بتعويض $x = 0$ في المعادلة، ثم أصل بين نقطتي التقاطع بمستقيم كما في الشكل الآتي:



بعد ذلك أُعيِّن النقطتين (3, 0) و(0, 2) في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيمًا يمرُّ بهما. وبما أنَّه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّ المستقيم الحدودي يُرسَم مُتقطِّعًا كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2 : أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل (−2, 1)، ثم أتحقَّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة:

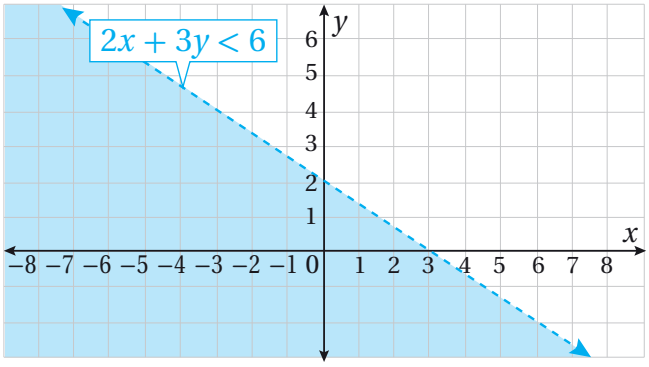
المتباينة الخطية $2x + 3y < 6$

بالتعويض $2(1) + 3(-2) \overset{?}{<} 6$

الناتج صحيح $-4 < 6$ ✓

الخطوة 3 : أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة.

بما أنَّ النقطة (−2, 1) أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنَّني أُظلِّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي:



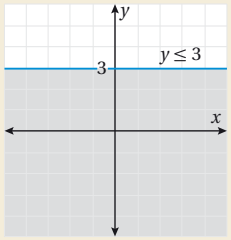
أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل المتباينة الخطية: $4x - 5y \geq 20$ في المستوى الإحداثي.

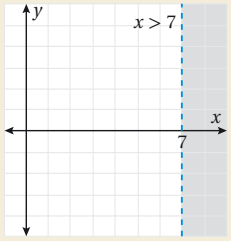
للمتباينات استعمالات كثيرة في المواقف العلمية والحياتية؛ إذ تساعدنا على اتخاذ القرار الأنسب المُتعلِّق بتحديد القِيَم المُمكِنة ضمن شروط مُحدَّدة.

أتذكَّر

تُمثَّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $y \leq 3$، كما في الشكل الآتي:



في حين تُمثَّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $x > 7$، كما في الشكل الآتي:



مثال 3 : من الحياة

مواقف: موقف سيّارات مساحته $1400\ m^2$، وهو يتّسع لعدد x من السيّارات الصغيرة، وعدد y من السيّارات الكبيرة. إذا كانت المساحة التي تقف عليها السيّارة الصغيرة $14\ m^2$، والمساحة التي تقف عليها السيّارة الكبيرة $35\ m^2$، فأجد عدد السيّارات الصغيرة والكبيرة التي يُمكِن أنْ يتّسع لها هذا الموقف.

الخطوة 1 : أُعبِّر عن المسألة جبريًّا بمتباينة خطية.

$$14x + 35y \leq 1400$$

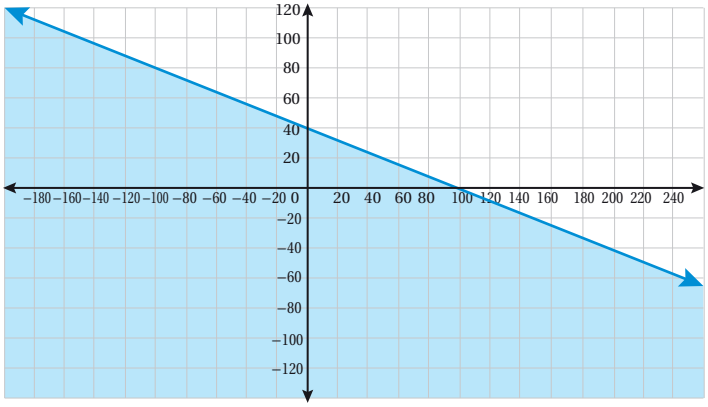
الخطوة 2 : أُمثِّل المتباينة بيانيًّا.

أُمثِّل بيانيًّا المستقيم الحدودي: $14x + 35y = 1400$. وبما أنَّه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنَّ المستقيم يُرسَم متصلًا.

أختار أيَّ نقطة، مثل $(20, 30)$، ثم أتحقَّق إذا كان الناتج صحيحًا أم لا عند تعويضها في المتباينة:

المتباينة الخطية	$14x + 35y \leq 1400$
بالتعويض	$14(20) + 35(30) \stackrel{?}{\leq} 1400$
الناتج صحيح	$1330 \leq 1400$ ✓

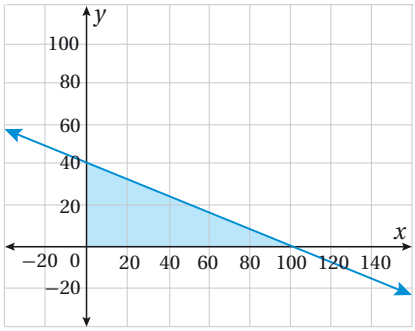
بما أنَّ النقطة $(20, 30)$ أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنَّني أُظلِّل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي:



معلومة

تُعَدُّ مواقف السيّارات الطابقية أحد أهمِّ الحلول لمشكلة تزايد عدد السيّارات.

الخطوة 3 : أُحدِّد حَلَّ المسألة.



أُلاحِظ أنَّ قِيَم x وy يجب أنْ تكون صحيحة وموجبة؛ لأنَّها تُمثِّل أعداد سيّارات؛ ما يُقلِّص منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور. أُلاحِظ أيضًا أنَّ أيَّ نقطة إحداثياها عددان صحيحان موجبان، وتقع على المستقيم الحدودي، أو ضمن المنطقة المُظلَّلة التي تظهر على شكل مثلث، تُعَدُّ حَلًّا. فمثلًا، النقطة (40, 20) تُمثِّل حَلًّا للمتباينة؛ لأنَّ المساحة التي تَشْغَلها 40 سيّارة صغيرة و20 سيّارة كبيرة $1260\ m^2$، وهي أقل من مساحة موقف السيّارات البالغة $1400\ m^2$.

أتحقَّق من فهمي

مطاعم: مطعم مساحة صالته $64\ m^2$، وهي تتَّسع لعدد x من الطاولات الصغيرة، وعدد y من الطاولات الكبيرة. تَشْغَل الطاولة الصغيرة مساحة $2.5\ m^2$، وتَشْغَل الطاولة الكبيرة مساحة $4\ m^2$. أجد عدد الطاولات الصغيرة والكبيرة التي يُمكِن وضعها في صالة المطعم.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $x - 3y \geq 5$:

1. $(1, -2)$
2. $(5, 0)$
3. $(-4, 1)$
4. $(-3, -4)$
5. $(-4, 0)$
6. $(5, 2)$

أُحدِّد إذا كان كل زوج مُرتَّب ممّا يأتي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $5x - 2y < 6$:

7. $(0, 0)$
8. $(2, 2)$
9. $(4, 1)$
10. $(-2, -1)$
11. $(-2, -8)$
12. $(-1, -6)$

أُمثِّل كُلًّا من المتباينات الخطية الآتية في المستوى الإحداثي:

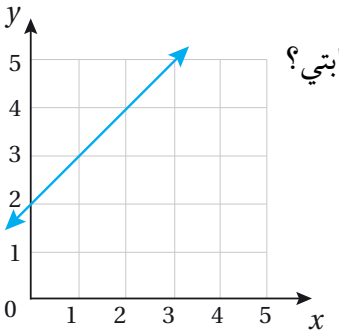
13. $8y + 3x < 2$
14. $4x \leq 8$
15. $2x - 9y \geq -3$
16. $5y - 8x \geq 1$
17. $-3y < 12$
18. $6x + 3y > -5$

19 **اختبارات:** تُمثِّل المتباينة: $3x + 2y \geq 93$ عدد أسئلة الاختيار من مُتعدِّد (x)، وأسئلة ملء الفراغ (y) التي يتعيَّن على منى الإجابة عنها بصورة صحيحة لنيل درجة A في اختبار التربية الإسلامية. إذا أجابت منى إجابة صحيحة عن 20 سؤالًا من أسئلة الاختيار من مُتعدِّد، وعن 18 سؤالًا من أسئلة ملء الفراغ، فهل ستنال درجة A في الاختبار؟

20 **شاحنات:** تستطيع شاحنة حمل 4000 kg من صناديق البضائع. إذا وُجِد عدد x من الصناديق التي كتلة كلٍّ منها 50 kg، وعدد y من الصناديق التي كتلة كلٍّ منها 95 kg، فما عدد الصناديق التي يُمكِن للشاحنة حملها من كلا النوعين؟

21 أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ المتباينة: $x + y < c$، حيث c عدد صحيح موجب.

22 أيُّ جهتي المستقيم في الشكل المجاور تُمثِّل منطقة حَلِّ المتباينة الآتية، مُبرِّرًا إجابتي؟

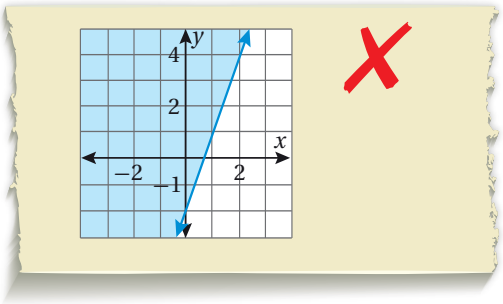


$$y \leq x + 2$$

23 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

24 **أكتشف الخطأ:** مثَّل سفيان المتباينة: $y \leq 3x - 2$ بيانيًّا على النحو الآتي:



أكتشف الخطأ في تمثيل سفيان، ثم أُصحِّحه.

25 **تبرير:** عند تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا، لماذا تُختار فقط نقطة اختبار لا تقع على المستقيم الحدودي؟ أُبرِّر إجابتي.

26 **تحدٍّ:** أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تقع النقطتان $(-5, -2)$ و$(3, 5)$ على المستقيم الحدودي، وتقع النقطتان $(6, 5)$ و$(2, 3)$ في منطقة الحلول المُمكِنة، ثم أُمثِّل المتباينة بيانيًّا.

الدرس
2

حَلُّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

فكرة الدرس حَلُّ نظام مُكوَّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا.

المصطلحات نظام المتباينات الخطية، مجموعة الحَلِّ.

مسألة اليوم قدَّم محَلٌّ لتبديل زيوت السيّارات عرضًا مجانيًّا لغسل السيّارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك العرض هو غسل 30 سيّارة يوميًّا، بتكلفة لا تزيد على 75 دينارًا، فكم سيّارة كبيرة وصغيرة يُمكِن غسلها يوميًّا بحسب هذا العرض؟

تكلفة غسل السيّارة الكبيرة 3 دنانير.

تكلفة غسل السيّارة الصغيرة ديناران.

يتكوَّن **نظام المتباينات الخطية** (system of linear inequalities) من متباينتين خطيتين أو أكثر. ويُطلَق على مجموعة الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق جميع المتباينات اسم **مجموعة الحَلِّ** (solution set). فمثلًا، يتكوَّن النظام الآتي من ثلاث متباينات:

المتباينة الأولى $x + y < 2$

المتباينة الثانية $-2x + y > -1$

المتباينة الثالثة $x - 3y \leq -2$

أتعلَّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المُرتَّبة التي تُحقِّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

يُمثِّل الزوج المُرتَّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنَّه يُحقِّق المتباينات جميعها.

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الأولى ✓ $-1 + 2 = 1 < 2$

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الثانية ✓ $-2(-1) + 2 = 4 > -1$

الزوج المُرتَّب يُحقِّق المتباينة الثالثة ✓ $-1 - 3(2) = -7 \leq -2$

لغة الرياضيات

تدل جملة (الزوج المُرتَّب يُحقِّق متباينة) على أنَّ الناتج يكون صحيحًا عند تعويض هذا الزوج في المتباينة.

لحَلِّ نظام متباينات، أُمثِّل كل متباينة فيه بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه، ثم أُظلِّل المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات جميعها التي تُمثِّل حَلَّ النظام.

مثال 1

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحَلِّ:

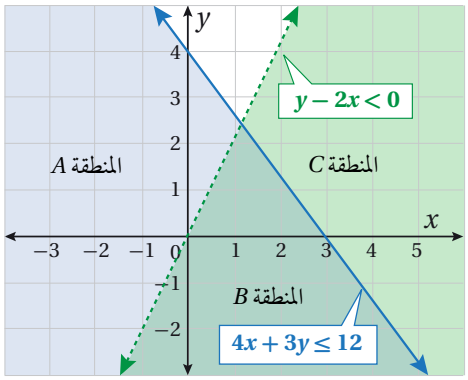
$$4x + 3y \le 12$$

$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: أُمثِّل المستقيمين الحدوديين.

$$4x + 3y = 12$$

$$y - 2x = 0$$



أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين في المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحَلِّ كما في الشكل المجاور.

أتذكَّر

إذا تضمَّنت المتباينة رمز $\le$ أو رمز $\ge$، فإنَّ المستقيم الحدودي لا يدخل ضمن منطقة الحَلِّ، ويكون تمثيله بخط مُتقطِّع.

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة التقاطع بين حَلَّي المتباينتين.

أُلاحِظ أنَّ حَلَّ المتباينة: $4x + 3y \le 12$ هو المنطقتان A وB، وأنَّ حَلَّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B وC. إذن، المنطقة B المشتركة بين منطقتي حَلِّ المتباينتين هي منطقة حَلِّ نظام المتباينات.

أتذكَّر

يجب تعويض الحَلِّ في جميع متباينات النظام؛ لكيلا يكون الحَلُّ غير صحيح، بحيث يُحقِّق إحدى المتباينات من دون الأُخريات.

الخطوة 3: أتحقَّق من صحة الحَلِّ.

أتحقَّق من صحة الحَلِّ باختيار زوج مُرتَّب يقع في منطقة حَلِّ النظام (المنطقة B)، مثل $(2, -1)$، ثم أُعوِّضه في متباينات النظام جميعها:

المتباينة الأولى

$$4x + 3y \le 12$$

بالتعويض

$$4(2) + 3(-1) \overset{?}{\le} 12$$

الناتج صحيح

$$5 \le 12 \quad ✓$$

المتباينة الثانية

$$y - 2x < 0$$

بالتعويض

$$-1 - 2(2) \overset{?}{<} 0$$

الناتج صحيح

$$-5 < 0 \quad ✓$$

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقَّق من صحة الحَلِّ:

$$2x - 4y \geq -5$$

$$x + 7y < 7$$

أتذكَّر

يُرمَز إلى المجموعة الخالية بالرمز { }، أو الرمز ∅ (تُقرَأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا يوجد فيها عناصر.

لا يكون لنظام المتباينات حَلٌّ أحيانًا؛ لعدم وجود منطقة مشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات المُكوِّنة له، عندئذٍ تكون مجموعة الحَلِّ هي المجموعة الخالية.

مثال 2

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

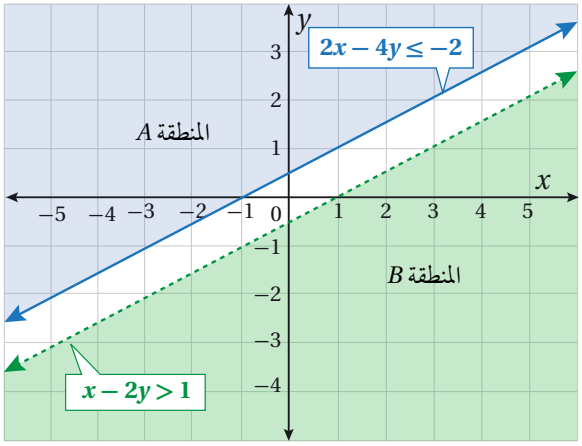
$$2x - 4y \leq -2$$

$$x - 2y > 1$$

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمين الحدوديين الآتيين في المستوى الإحداثي نفسه:

$$2x - 4y = -2$$

$$x - 2y = 1$$



وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحَلِّ كما في الشكل المجاور.

أتعلَّم

أُلاحِظ في المثال 2 عدم وجود منطقة حَلٍّ مشتركة؛ لأنَّ المستقيمين الحدوديين متوازيان.

أُلاحِظ أنَّ حَلَّ المتباينة: $2x - 4y \leq -2$ هو المنطقة A، وأنَّ حَلَّ المتباينة: $x - 2y > 1$ هو المنطقة B، وأنَّه لا يوجد تقاطع بين منطقتي حَلِّ المتباينتين. إذن، حَلُّ النظام هو المجموعة الخالية ∅.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$5x - 2y < 3$$

$$2.5x - y \geq 2$$

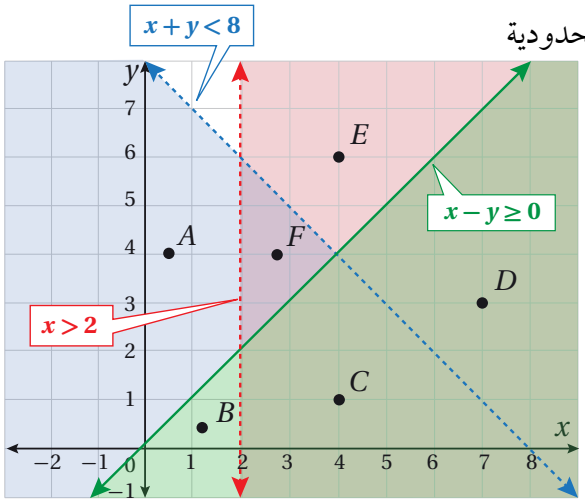
قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحَلِّ هي المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات جميعها.

مثال 3

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$x - y \geq 0$$
$$x + y < 8$$
$$x > 2$$

الخطوة 1: أُمثِّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية الآتيــة في المســتوى الإحداثي نفسه كما في الشكل المجاور:



$$x - y = 0$$
$$x + y = 8$$
$$x = 2$$

الخطوة 2: أُحدِّد منطقة الحَلِّ.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: A, B, C, F.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: B, C, D.

أُظلِّل منطقة حَلِّ المتباينة: $x > 2$ باللون الأحمر، وهي المناطق: C, D, E, F.

أُلاحِظ أنَّ المنطقة C هي المنطقة المشتركة بين مناطق حَلِّ المتباينات الثلاث. إذن، هي منطقة حَلِّ النظام.

أتحقَّق من فهمي

أُمثِّل بيانيًّا منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$
$$x - 5y > 6$$
$$2x - 5y < -3$$

تُستعمَل أنظمة المتباينات الخطية في عديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكِن بها تحديد القِيَم المُمكِنة للمتغيرات وَفق شروط مُحدَّدة.

أُقيمت أول بطولة لكأس العالم في كرة القدم بالأوروغواي عام 1930م.

مثال 4 : من الحياة

كرة قدم: **في دوري كرة القدم المدرسي، يحصل الفريق الفائز على 3 نقاط، ويحصل الفريق المتعادل على نقطة واحدة، ولا يحصل الفريق الخاسر على أيِّ نقطة.**

إذا فاز فريق مدرسة سلمان في x من المباريات، وتعادل في y من المباريات، وجمع منها 18 نقطة على الأكثر، وكان عدد مرّات فوزه أكثر من عدد مرّات تعادله، وتعادل مرَّتين على الأقل؛ فأجد العدد المُمكِن من المباريات التي فاز فيها الفريق، والعدد المُمكِن من المباريات التي تعادل فيها الفريق.

الخطوة 1 : أُعبِّر عن المسألة جبريًّا بنظام من المتباينات الخطية.

أفترض أنَّ عدد مرّات الفوز هو x، وأنَّ عدد مرّات التعادل هو y، ثم أكتب نظام المتباينات الخطية المرتبط بالشروط الواردة في نص المسألة:

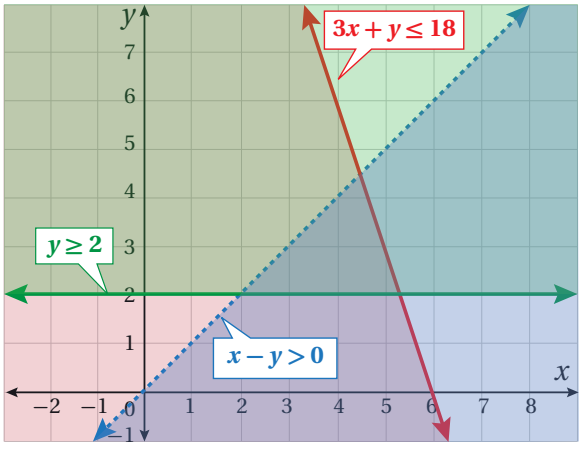
عدد نقاط الفوز والتعادل 18 على الأكثر	$3x + y \leq 18$
عدد مرّات الفوز أكثر من عدد مرّات التعادل	$x > y$
تعادل الفريق مرَّتين على الأقل	$y \geq 2$

الخطوة 2 : أُمثِّل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا.

أُمثِّل بيانيًّا المستقيمات الحدودية الآتية على المستوى الإحداثي نفسه:

$$3x + y = 18$$
$$x - y = 0$$
$$y = 2$$

ثم أُظلِّل منطقة الحَلِّ لكل متباينة كما في الشكل المجاور.



أُلاحِظ أنَّ مناطق الحَلِّ تتقاطع في منطقة على شكل مثلث، هي منطقة حَلِّ النظام، وأنَّه يُمكِن اختيار نقطة مثل (4, 3) ضمن هذه المنطقة، والتأكُّد أنَّها تُحقِّق المتباينات جميعها على النحو الآتي:

المتباينة الخطية الأولى	$3x + y \leq 18$
بالتعويض	$3(4) + 3 \stackrel{?}{\leq} 18$
ناتج صحيح ✓	$15 \leq 18$
المتباينة الخطية الثانية	$x - y > 0$
بالتعويض	$4 - 3 \stackrel{?}{>} 0$
ناتج صحيح ✓	$1 > 0$
المتباينة الخطية الثالثة	$y \geq 2$
بتعويض قيمة y، يكون الناتج صحيحًا ✓	$3 \geq 2$

الخطوة 3: أُحدِّد حَلَّ المسألة.

أيُّ نقطة تقع في منطقة الحَلِّ تُعَدُّ حَلًّا لنظام المتباينات الخطية. وفي هذه الحالة، ولأنَّ عدد المباريات يجب أنْ يكون صحيحًا؛ فإنَّ النقطة (4, 3) تُمثِّل أحد الحلول المُمكِنة؛ ما يعني أنَّ الفريق فاز بـ 4 مباريات، وتعادل في 3 مباريات، وجمع 15 نقطة.

أتحقَّق من فهمي

محميات: يوجد في محمية للحيوانات مجموعة من الغزلان والأيائل، وقد أفاد الموظف الذي يُشرِف على إطعامها والاعتناء بها أنَّ:

- **في المحمية 6 حيوانات على الأقل.**
- **عدد الحيوانات في المحمية لا يزيد على 12 حيوانًا.**
- **عدد الغزلان في المحمية أقل من عدد الأيائل.**
- **في المحمية اثنين من الغزلان على الأقل.**

a) ما أقل عدد مُمكِن من الأيائل؟

b) ما أكثر عدد مُمكِن من الغزلان؟

لغة الرياضيات

a على الأكثر تُكافِئ $x \leq a$، و b على الأقل تُكافِئ $x \geq b$.

أُفكِّر

أكتب قائمة تحوي جميع النقاط التي يُمكِن أنْ تكون حلولًا مُمكِنة لنظام المتباينات الخطية في المثال 4.

تُعَدُّ محمية الغزلان في دبين ضمن إحدى أكبر المحميات الطبيعية في الأردن.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أُمثِّل منطقة حَلِّ كلٍّ من أنظمة المتباينات الآتية:

1 $x + 3y > 1$
$5x - y \le 2$

2 $-3x - 12y > -9$
$x + 4y \ge 5$

3 $x - 11y < 6$
$-2x + 22y > -12$

4 $3x + 5y \le 1$
$3x + 5y \le 3$

5 $2x - 7y > 2$
$2x - 7y \le 2$

6 $13x - y < 11$
$x + y \ge 0$

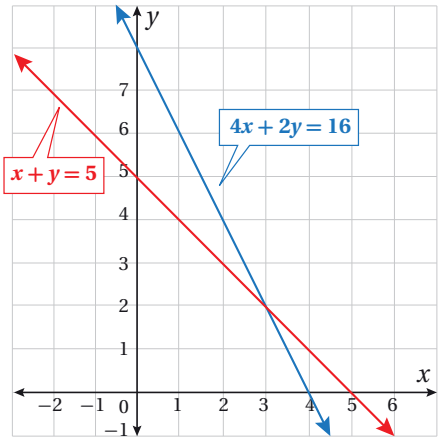
7 $9x - y < 2$
$x + 3y > -1$
$x - y > -3$

8 $5x - 5y < 2$
$2x - 2y > 1$
$x \ge y$

9 $x \le y$
$x - 5y < 6$
$10x - y > 3$

10 **سياحة:** تبلغ تكلفة تذكرة ركوب قارب سياحي دينارين للبالغين، ودينارًا واحدًا للأطفال، ويتَّسع القارب لـ 10 أشخاص على الأكثر. إذا كانت x تُمثِّل عدد البالغين، وy تُمثِّل عدد الأطفال، فكم شخصًا من البالغين والأطفال قد يوجد على متن القارب، علمًا بأنَّ رَيْع بيع التذاكر أقل من 12 دينارًا؟

11 **نقل جوي:** سعر تذكرة الدرجة السياحية للسفر بالطائرة بين مدينتي عمّان والعقبة 25 دينارًا، وسعر تذكرة الدرجة الخاصة 50 دينارًا. إذا كان رَيْع بيع التذاكر 1600 دينار على الأقل، وبيعت 50 تذكرة على الأكثر، فأجد عدد التذاكر المُمكِن لكل درجة.



12 أُظلِّل منطقة حَلِّ النظام الآتي من المتباينات في الشكل المجاور، ثم أكتب جميع حلول النظام المُمكِنة، علمًا بأنَّ y وx عددان صحيحان موجبان:

$$x + y \ge 5$$
$$4x + 2y \le 16$$

13 **جامعات:** أرادت سامية الالتحاق بجامعة تشترط عقد امتحاني قبول لذلك؛ أحدهما في مبحث الرياضيات، والآخر في مبحث اللغة الإنجليزية، وإحراز ما بين 900 نقطة و1200 نقطة في الامتحانين معًا؛ شـــرط ألّا يقل المجموع في امتحان الرياضيات عن 600 نقطة، وألّا يقل المجموع في امتحان اللغة الإنجليزية عن 200 نقطة.
أجد عدد النقاط من مضاعفات المئة، التي يتعيَّن على سامية إحرازها في كل امتحان لتُقبَل في الجامعة.

14 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

15 **تبرير:** أَصِف منطقة حَلِّ نظام المتباينات الآتي من دون تمثيلها بيانيًّا:

$$2x + y \leq 7$$

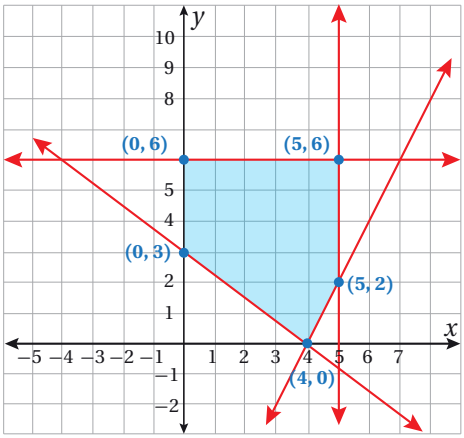
$$2x + y \geq 7$$

مسألة مفتوحة: أكتب نظامين يتكوَّن كلٌّ منهما من متباينتين خطيتين بمتغيرين، بحيث تكون مجموعة الحَلِّ:

16 مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

17 المجموعة الخالية.

18 **تحدٍّ:** أكتب نظام المتباينات الذي منطقة حَلِّه هي المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني الآتي:



معمل برمجية جيوجبرا

تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًّا

Graphing System of Linear Inequalities in Two Variables

يُمكِن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًّا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحَلِّ.

مثال 1

أُمثِّل بيانيًّا نظام المتباينات الخطية الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحَلِّ:

$$3x + 5y \leq 2$$

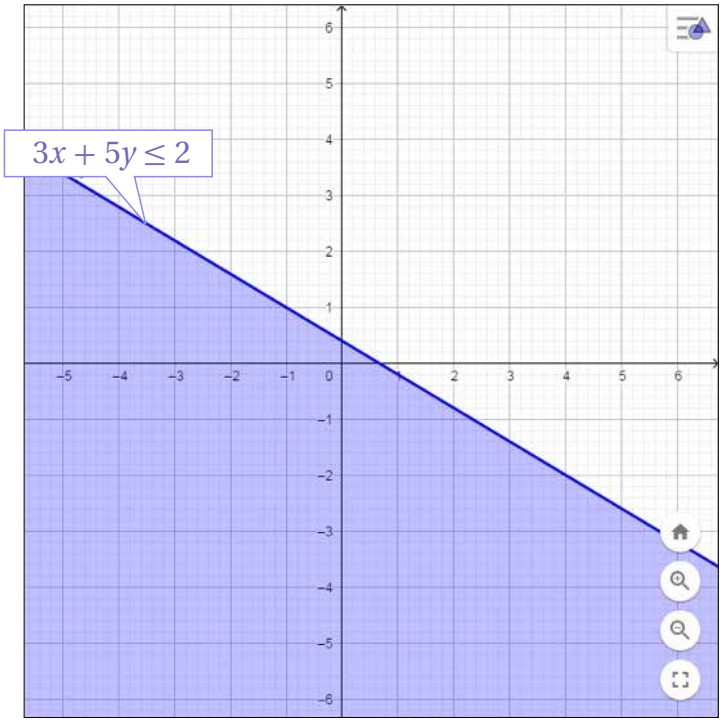
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: أُمثِّل المتباينة الأولى بيانيًّا.

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

3	x	+	5	y	≤	2

أُلاحِظ أنَّ برمجية جيوجبرا قد حدَّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟



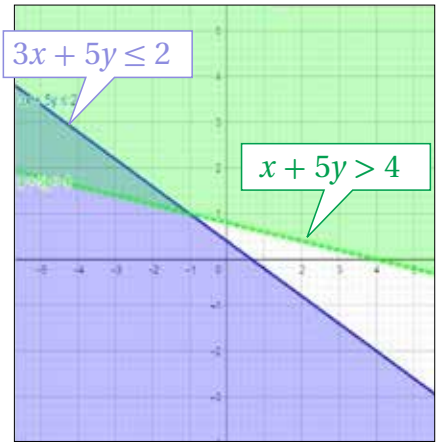
الخطوة 2 : أُمثِّل المتباينة الثانية بيانيًّا.

أكتب المتباينة الثانية في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

x	+	5	y	>	4

الخطوة 3 : أُغيِّر اللون.

أُلاحِظ أنَّ برمجية جيوجبرا قد حدَّدت منطقة حَلِّ كلٍّ من المتباينتين باللون الأزرق؛ لذا يجب تغيير لون منطقة الحَلِّ لإحدى المتباينتين، لتمييز منطقة حَلِّ كل متباينة بلون مختلف.



أنقر المتباينة المراد تغيير لونها على يسار الشاشة، ولتكن المتباينة الثانية، ثم أنقر الرمز ⋮ الذي بجانبها، وأختار (settings) ثم (color) من القائمة التي ظهرت يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا آخر مثل الأخضر.

الخطوة 4 : أُفسِّر المناطق الظاهرة.

أُلاحِظ وجود أربع مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانية باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونين معًا، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كل منطقة؟

أتدرَّب

أُمثِّل بيانيًّا كُلًّا من أنظمة المتباينات الخطية الآتية باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أُحدِّد منطقة الحَلِّ:

1. $-5x - 2y \geq 3$

   $x + y < -3$

2. $0.5x + 7y > -2$

   $x < y$

3. $x - y \geq 0$

   $x + y \leq 0$

4. $9x - 6y > 8$

   $27x - 18y < 1$

الدرس
3

البرمجة الخطية
Linear Programming

فكرة الدرس نمذجة مواقف حياتية بمسألة يُمكِن حَلُّها باستعمال طريقة البرمجة الخطية بيانيًّا.

المصطلحات القيود، البرمجة الخطية، منطقة الحلول المُمكِنة، الاقتران الهدف، الحَلُّ الأمثل.

مسألة اليوم دخلت سلمى محلًّا لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على 4 دنانير ثمنًا لـ 15 شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المُعلَّقة داخل المحلِّ معلومات عن النوعين. كم شتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كَمٍّ مُمكِن من البندورة؟

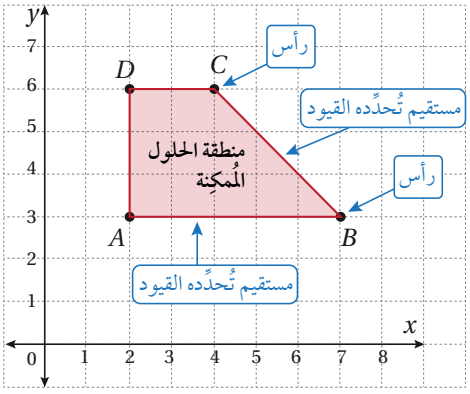
نوع شتلة البندورة	A	B
الثمن بالدينار	0.2	0.3
أقل إنتاج مُتوقَّع	4 kg	5 kg

البرمجة الخطية (linear programming) هي طريقة تعتمد التمثيل البياني في المستوى الإحداثي لإيجاد أكبر قيمة مُمكِنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة مُمكِنة (قيمة صغرى) لاقتران يُسمّى **الاقتران الهدف** (objective function)، ضمن مجموعة **قيود** (constraints)، يُمثِّل كلٌّ منها متباينة خطية. فبتمثيل المتباينات الخطية (القيود) تتحدَّد منطقة حَلٍّ مشتركة لها تُسمّى **منطقة الحلول المُمكِنة** (feasible region)، وفيها تتحقَّق أكبر قيمة مُمكِنة، أو أصغر قيمة مُمكِنة للاقتران الهدف عند رؤوس المُضلَّع الذي يُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة.

تُعرَّف البرمجة الخطية أيضًا بأنَّها طريقة البحث عن **الحَلِّ الأمثل** (optimal solution)، وتتكوَّن مسألتها ممّا يأتي:

1. **الاقتران الهدف:** يكون في صورة: $P = ax + by$، حيث:
   P: اسم الاقتران (مثل الربح).
   a, b: عددان حقيقيان. x, y: متغيران.

2. **القيود:** نظام من المتباينات الخطية، وهي تُكتَب بدلالة المتغيرين x, y، وتُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



مفهوم أساسي

إذا وُجِدت قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران الهدف، فإنَّها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

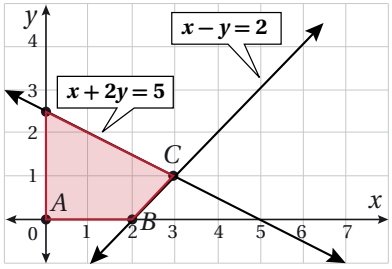
مثال 1

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $P = 2x + y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \le 5$$
$$x - y \le 2$$
$$x \ge 0 , y \ge 0$$

الخطوة 1: أُمثِّل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطية (القيود) بيانيًّا، ثم أُحدِّد منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2: أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُعيِّن إحداثيي كلٍّ من نقاط رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة، وهي: A, B, C, D، ثم أضعها في جدول أحسب فيه قيمة الاقتران الهدف عند كلٍّ منها.

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$P = 2x + y$
$A(0, 0)$	$P = 2(0) + 0 = 0$
$B(2, 0)$	$P = 2(2) + 0 = 4$
$C(3, 1)$	$P = 2(3) + 1 = 7$
$D(0, 2.5)$	$P = 2(0) + 2.5 = 2.5$

الخطوة 3: أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ أنَّ أكبر قيمة للاقتران P هي 7، وأنَّها تتحقَّق عندما $x = 3, y = 1$.

أتحقَّق من فهمي

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $Q = 50x + 40y$ أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$x + y \le 8$$
$$2x + y \le 10$$
$$x \ge 0 \ , \ y \ge 0$$

أتذكَّر

المستقيم $x = 0$ هو المحور y نفسه، والمستقيم $y = 0$ هو المحور x نفسه.

أتعلَّم

تُسمّى المتباينتان $x \ge 0 , y \ge 0$ قيود (أو شروط) عدم السالبية، وهما توجدان في مسائل البرمجة الخطية الحياتية بصورة ضمنية.

يُمكِن حَلُّ المسائل الحياتية التي تتضمَّن إيجاد أكبر ربح مُمكِن بطريقة البرمجة الخطية، واتباع خطوات تُشبِه الخطوات الواردة في المثال 1. ولكنْ يتعيَّن قبل ذلك تحديد متغيرين، مثل x, y، وكتابة نظام متباينات خطية بدلالة كلٍّ منهما لتمثيل قيود المسألة، وكتابة اقتران الربح بدلالتيهما أيضًا.

مثال 2 : من الحياة

يمتلك مُزارِع 50 دونمًا من الأرض، ويريد تهيئة التربة في جزء منها لزراعتها بالذرة، أو بالقمح، أو بكليهما كما في الجدول المجاور.

	الذرة	القمح
تكلفة تهيئة التربة لكل دونم	60 دينارًا	30 دينارًا
عدد أيام العمل في كل دونم	3 أيام	4 أيام
الربح المُتوقَّع من كل دونم	180 دينارًا	100 دينار

غير أنَّ المُزارِع لا يُمكِنه إنفاق أكثر من 1800 دينار على ذلك، ويتعيَّن عليه تهيئة التربة وزراعتها في 120 يومًا على الأكثر قبل بدء موسم الأمطار. كم دونمًا سيزرع من كل محصول لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

الخطوة 1 : أصوغ الفرضيات.

أفترض أنَّ عدد الدونمات التي ستُزرَع ذرةً هو x، وأنَّ عدد الدونمات التي ستُزرَع قمحًا هو y.

إذا افترضْتُ أنَّ المُزارِع سيبيع كل إنتاجه من المحصولين، فإنَّ الربح المُتوقَّع هو:

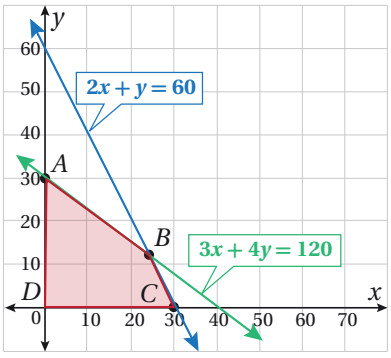
$$P = 180x + 100y$$

يريد المُزارِع أنْ يكون الربح أكبر ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$60x + 30y \le 1800\ ,\ 3x + 4y \le 120\ ,\ x \ge 0\ ,\ y \ge 0$$

الخطوة 2 : أُمثِّل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطية، ثم أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



أتذكَّر

لإيجاد إحداثيي النقطة B، أحُلُّ المعادلتين معًا بطريقة الحذف والتعويض، ويُمكِنني أيضًا استعمال برمجية جيوجبرا لإيجاد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.

الخطوة 3 : أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُحدِّد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D، ثم أجد قيمة الربح P عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$\mathbf{P = 180x + 100y}$
$A(0, 30)$	$P = 180(0) + 100(30) = 3000$
$B(24, 12)$	$P = 180(24) + 100(12) = 5520$
$C(30, 0)$	$P = 180(30) + 100(0) = 5400$
$D(0, 0)$	$P = 180(0) + 100(0) = 0$

الخطوة 4 : أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ من الجدول أنَّ أكبر ربح مُمكِن هو 5520 دينارًا، وأنَّه يتحقَّق عند زراعة 24 دونمًا بالذرة، و12 دونمًا بالقمح.

أتحقَّق من فهمي

يُنتِج مشغل للصناعات اليدوية معاطف وحقائب جلدية، ويتوافر لديه أسبوعيًّا $40\ m^2$ على الأكثر من الجلد الخام. يتطلَّب صنع المعطف الواحد استعمال $2\ m^2$ من الجلد الخام، ويستغرق ذلك ساعتي عمل، ويُحقِّق ربحًا مقداره 5 دنانير، ويتطلَّب صنع الحقيبة الواحدة استعمال $1\ m^2$ من الجلد الخام، ويستغرق ذلك 3 ساعات عمل، ويُحقِّق ربحًا مقداره 4 دنانير.

إذا كان عدد ساعات العمل في المشغل لا يزيد على 60 ساعة أسبوعيًّا، فما عدد كلٍّ من المعاطف والحقائب التي يتعيَّن صنعها أسبوعيًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟ (أفترض أنَّ المشغل يبيع إنتاجه كاملًا).

يُعَدُّ مناخ الأردن مناسبًا لزراعة القمح، لكنَّ الزحف العمراني نحو الأراضي الزراعية قلَّص مساحات كثير من السهول ذات التربة الخصبة.

أُلاحِظ من المثالين السابقين أنَّ منطقة الحلول المُمكِنة التي تُحدِّدها القيود كانت مغلقة؛ لأنَّ هذه القيود فرضت ذلك، ولكنَّ بعض المسائل الحياتية تتضمَّن إيجاد أقل تكلفة مُمكِنة، أو أقل كمية مُستهلَكة، وغير ذلك، فتكون منطقة الحلول عندئذٍ مفتوحة؛ لأنَّ قيودها تفرض ذلك.

مثال 3 : من الحياة

يعتمد تسمين الماشية على تغذيتها بخليط مُعَدٍّ بنسب مُحدَّدة من الحبوب (مثل: الذرة الصفراء، والشعير)، والتبن، وقشور الفول، وملح الطعام، والفيتامينات.

يخلط بعض مُربّي الماشية نوعين من العلف للحصول على مزيج ذي تكلفة أقل. ويُبيِّن الجدول المجاور تكلفة الكيس الواحد من كل نوع، وعدد الوحدات التي يحويها من البروتينات والمعادن والفيتامينات. إذا احتاجت الماشية يوميًّا إلى 150 وحدة من البروتينات، و90 وحدة من المعادن، و60 وحدة من الفيتامينات على الأقل، فكم كيسًا من النوع A والنوع B معًا يُمكِن أنْ تستهلكه الماشية بأقل تكلفة مُمكِنة؟

	النوع B	النوع A
تكلفة الكيس الواحد	JD 12	JD 10
عدد وحدات البروتينات	30	40
عدد وحدات المعادن	20	20
عدد وحدات الفيتامينات	30	10

الخطوة 1 : أصوغ الفرضيات.

أفترض أنَّ عدد الأكياس من النوع A هو x، وأنَّ عدد الأكياس من النوع B هو y.

إذا افترضْتُ أنَّ هذه الماشية تستهلك كل ما يُقدَّم لها من النوعين يوميًّا، فإنَّ التكلفة C هي:

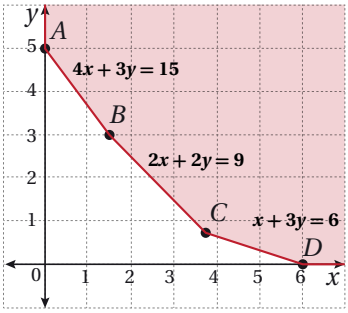
$$T = 10\,x + 12\,y$$

المطلوب أنْ تكون التكلفة أقل ما يُمكِن ضمن القيود الآتية:

$$40x + 30y \geq 150\ ,\ 20x + 20y \geq 90\ ,\ 10x + 30y \geq 60\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

الخطوة 2 : أُمثِّل القيود بيانيًّا.

أُمثِّل نظام المتباينات الخطية، ثم أُظلِّل منطقة الحلول المُمكِنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 3 : أُحدِّد رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة.

أُحدِّد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D، ثم أجد قيمة التكلفة T عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكِنة	$T = 10x + 12y$
$A(0, 5)$	$T = 10(0) + 12(5) = 60$
$B(1.5, 3)$	$T = 10(1.5) + 12(3) = 51$
$C(3.75, 0.75)$	$T = 10(3.75) + 12(0.75) = 46.5$
$D(6, 0)$	$T = 10(6) + 12(0) = 60$

الخطوة 4 : أُحدِّد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أُلاحِظ من الجدول أنَّ أقل تكلفة مُمكِنة هي 46.5 دينارًا، وأنَّ الماشية تستهلك وقتئذٍ 3.75 أكياس من العلف A، و0.75 كيس من العلف B، لتلبية الحد الأدنى الذي يَلزمها من البروتينات والمعادن والفيتامينات.

أتحقَّق من فهمي

حمية غذائية: يشترط نظام للحمية الغذائية توافر ما لا يقل عن **300** سعرة حرارية، و**36** وحدة من فيتامين A، و**90** وحدة من فيتامين C، ضمن الجزء السائل من الوجبة الغذائية. يُبيِّن الجدول أعلاه تكلفة العلبة الواحدة من نوعين مختلفين من الألبان، وعدد السعرات الحرارية، ووحدات فيتامين A وفيتامين C التي تحويها العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يُمكِن أنْ يستهلكها يوميًّا شخص يتَّبع نظام الحمية الغذائية، ويريد تحقيق شروطها بأقل تكلفة مالية مُمكِنة؟

	النوع 2	النوع 1
سعر العلبة الواحدة	JD 0.3	JD 0.25
عدد السعرات الحرارية	60	60
عدد وحدات فيتامين A	6	12
عدد وحدات فيتامين C	30	10

أفادت بعض الدراسات أنَّ جسم الإنسان يحتاج إلى نحو 2000 سعر حراري يوميًّا، وأنَّ ذلك يختلف من شخص إلى آخر تبعًا لعمر الشخص، وكتلته، ونوع الأنشطة والتمارين التي يمارسها.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكِن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $P = 4x + 3y$
$x + 2y \le 4$
$x - y \le 1$
$x \ge 0 , y \ge 0$

2 $R = 10x + 7y$
$0 \le x \le 60$
$0 \le y \le 60$
$5x + 6y \le 420$

3 $Z = 1.5x + y$
$x + 3y \le 15$
$4x + y \le 16$
$x \ge 0 , y \ge 0$

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يُمكِن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

4 $Q = 4x + 5y$
$x + y \ge 8$
$3x + 5y \ge 30$
$x \ge 0 , y \ge 0$

5 $C = 8x + 4y$
$x + 2y \ge 4$
$3x + y \ge 7$
$2y - x \ge 7$
$x \ge 0 , y \ge 0$

6 $K = 25x + 35y$
$8x + 9y \le 7200$
$8x + 9y \ge 3600$
$x \ge 0 , y \ge 0$

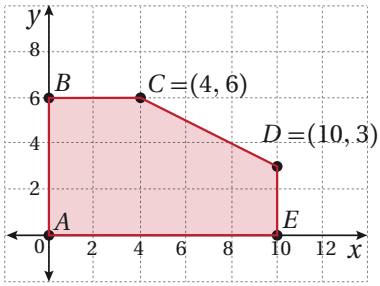
7 **صناعات:** يُنتِج أحد المصانع شوكولاتة مُغطّاة بالفستق، ويجني ربحًا مقداره JD 1.5 عن كل علبة مَبيعة، ويُنتِج نوعًا آخر منها مُغطّى بالبندق، ويجني ربحًا مقداره JD 2 عن كل علبة مَبيعة. وقد بيَّنت دراسة أجراها قسم التسويق في المصنع بهدف زيادة الربح أنَّ إنتاج كلا النوعين من الشوكولاتة يجب ألّا يزيد على 1200 علبة شهريًّا، وأنَّ الطلب على علب الشوكولاتة المُغطّاة بالبندق لا يزيد على نصف الطلب على علب الشوكولاتة المُغطّاة بالفستق، وأنَّ عدد علب الشوكولاتة المُغطّاة بالفستق يجب أنْ يكون أقل من (أو يساوي) 600 علبة، مضافًا إليها ثلاثة أمثال عدد علب الشوكولاتة المُغطّاة بالبندق شهريًّا. كم علبة شوكولاتة من كل نوع يجب أنْ يُنتِج المصنع شهريًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن، مُفترِضًا بيع الإنتاج كاملًا كل شهر؟

8 **دعاية:** أراد صلاح طباعة كُتَيِّبات ونشرات دعائية لتسويق مُنتَجات مزرعته من العسل الطبيعي، بحيث يحوي الكُتَيِّب الواحد 3 صفحات، وتحوي النشرة الواحدة صفحتين. تبلغ تكلفة طباعة الكُتَيِّب الواحد 0.2 من الدينار، وتكلفة طباعة النشرة الواحدة 0.1 من الدينار. وقد قرَّر صلاح أنَّه بحاجة إلى طباعة ما لا يزيد على 600 صفحة، مُمثَّلةً في 50 كُتَيِّبًا على الأقل، و150 نشرة على الأقل. كم كُتَيِّبًا ونشرةً يجب طباعتها بحيث تكون التكلفة أقل ما يُمكِن؟

9 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

10 **تبرير:** يتحقَّق أحيانًا أكبر ربح مُمكِن عند نقطتين من رؤوس منطقة الحَلِّ. وفي هذه الحالة يُمكِن إيجاد نقاط أُخرى لتحقيق أكبر ربح عندها، بالرغم من أنَّ قيمة الربح وحيدة. أجد أكبر قيمة مُمكِنة للربح $P = x + 2y$ ضمن منطقة الحلول المُمكِنة المُمثَّلة في الشكل المجاور، مُبرِّرًا إجابتي، ثم أجد نقاطًا أُخرى ضمن منطقة الحَلِّ يتحقَّق عندها أكبر قيمة مُمكِنة للربح.



11 **تحدٍّ:** أجد الاقتران الهدف الذي صورته: $G = ax + by$، حيث a, b عددان حقيقيان، وله أكبر قيمة عند النقطة (2, 3)، وهي 18، ضمن القيود المجاورة:

$$x + 2y \le 8$$
$$x + y \le 5$$
$$x \ge 0\ ,\ y \ge 0$$

12 **تحدٍّ:** أجد مجموعة قِيَم n (حيث n عدد صحيح موجب) التي تجعل للاقتران الهدف:

$$D = 3x + ny$$

أكبر قيمة مُمكِنة عند النقطة (3, 4)، ضمن القيود المجاورة:

$$x + 3y \le 15$$
$$4x + y \le 16$$
$$x \ge 0\ ,\ y \ge 0$$

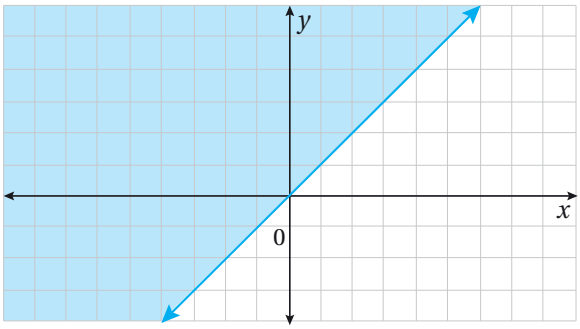
أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 الزوج الذي يُمثِّل حَلًّا للمتباينة: $7y-8x>-10$ هو:

a) $(3, 2)$ b) $(3, 1)$

c) $(-4, -7)$ d) $(2, 5)$

2 المتباينة التي لها التمثيل البياني الآتي هي:



a) $x - y \le 0$ b) $x - y \ge 0$

c) $x + y \le 0$ d) $x + y \ge 0$

3 المتباينة التي يكون الزوج المُرتَّب $(1, 2)$ حَلًّا لها هي:

a) $2x + 7y < 2$ b) $x - 11y \ge -2$

c) $y-13x \le -6$ d) $2y - x > 9$

4 الزوج الذي يُمثِّل حَلًّا لنظام المتباينات الآتي هو:

$$y + 5x < 7$$
$$2x - y \ge -3$$

a) $(3, 2)$ b) $(0, 0)$

c) $(-4, -2)$ d) $(2, 8)$

أحُلُّ كُلًّا من أنظمة المتباينات الخطية الآتية:

5 $x - 8y \le 9$
$4x + 7y > 3$

6 $12x + 10y > 1$
$-5x - 8y < 2$
$3x + y \ge -6$

تعليم: يعقد مصنع دورة تدريبية لطلبة الهندسة في إحدى الجامعات، بحيث يكون عدد الطالبات المُتدرِّبات x، وعدد الطلاب المُتدرِّبين y، ولا يقل العدد الإجمالي للطالبات والطلاب عن 5، ولا يزيد على 15، ولا يقل عدد الطلاب عن نصف عدد الطالبات:

7 أشرح بالكلمات معنى: $2y \ge x$.

8 إذا كان عدد الطالبات المُتدرِّبات 6، فما العدد المُمكِن للطلاب المُتدرِّبين؟

9 أجد جميع الحلول المُمكِنة لنظام المتباينات الآتي، حيث m و n عددان صحيحان موجبان:

$$m + n > 4$$
$$3m + 7n \le 21$$

10 أجد أكبر قيمة للاقتران: $P = 4x + y$، ضمن القيود الآتية:

$$x + y \le 50$$
$$3x + y \le 90$$
$$x \ge 0\ ,\ y \ge 0$$

11 أجد أصغر قيمة للاقتران: $C = 200x + 500y$، ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \ge 10$$
$$3x + 4y \le 24$$
$$x \ge 0\ ,\ y \ge 0$$

12 يُنتِج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآلتين A و B معًا. ويُبيِّن الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كلٍّ من الآلتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كل نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على 10 h، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على 6 h، فكم قطعة من كل نوع يجب أنْ يُنتِج المصنع يوميًّا لتحقيق أكبر ربح مُمكِن؟

	القطعة الثانية	القطعة الأولى
زمن المعالجة في الآلة A	1 h	2 h
زمن المعالجة في الآلة B	1 h	1 h
مقدار الربح	JD 15	JD 10

13 أراد خبير تغذية إعداد خليط غذائي باستعمال الطحين العادي وطحين الشوفان، بحيث يحتوي الخليط على 12 وحدة على الأقل من فيتامين A، و10 وحدات على الأقل من فيتامين B، و6 وحدات على الأقل من فيتامين C.

يُبيِّن الجدول الآتي وحدات الفيتامين في نوعي الطحين، وسعر كل نوع:

	الطحين العادي	طحين الشوفان
السعر	JD 0.5 / kg	JD 0.8 / kg
فيتامين A	3 وحدات لكل كيلوغرام.	4 وحدات لكل كيلوغرام.
فيتامين B	5 وحدات لكل كيلوغرام.	وحدتان لكل كيلوغرام.
فيتامين C	وحدة لكل كيلوغرام.	3 وحدات لكل كيلوغرام.

كم كيلوغرامًا من نوعي الطحين يتعيَّن على خبير التغذية خلطه بحيث يحوي الخليط الحد الأدنى المطلوب من كل فيتامين وبأقل تكلفة؟

تدريب على الاختبارات الدولية

14 إذا كان $y > 4$، فأيٌّ ممّا يأتي يجب وضعه في المربع لتكون $\frac{3y+2}{5} \square y$ صحيحة:

a) $>$ b) $<$

c) $\leq$ d) $\geq$

15 إذا كان $x < y < 0$، فأيٌّ ممّا يأتي صحيحة دائمًا:

a) $xy^2 < x$ b) $xy < y^2$

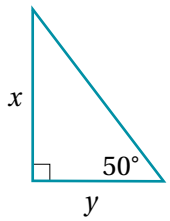
c) $xy < x^2$ d) $y - 1 < x$

16 إذا كان $a < b < c$ ثلاثة أعداد فردية صحيحة متتالية، وكان $x = a + b + 1$، وكان $y = b + c - 1$، فإنَّ:

a) $x > y$ b) $x < y$

c) $x = y$ d) $2x = y$

17 أيٌّ ممّا يأتي صحيح اعتمادًا على المثلث المجاور:



a) $x > y$ b) $x < y$

c) $x = y$ d) $2x = y$

18 إذا كان $k < n < 0$ ، فأيٌّ ممّا يأتي ناتجه عدد موجب:

a) $k - n$ b) kn

c) $k^2 n$ d) $k^2 n + kn^2$

الوحدة 2

مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق
Counting Principle, Permutations and Combinations

ما أهمية هذه الوحدة؟

يُسهِم العَدُّ بدور رئيس في كثير من العلوم، مثل: الإحصاء، والاحتمال، والحاسوب، ويتطلَّب أحيانًا استعمال طرائق مُتطوِّرة لإجرائه، ويُعَدُّ مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق إحدى أهمِّ الطرائق التي تُسهِّل عملية العَدِّ عند دراسة الاحتمال. سأتعرَّف في هذه الوحدة بعض استعمالات طرائق العَدِّ في المواقف الحياتية، مثل تنظيم مواعيد إقلاع الطائرات وهبوطها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ استعمال مخطط الشجرة للعَدِّ.
- ✓ استعمال الجدول للعَدِّ.
- ✓ استعمال القوائم المنظمة للعَدِّ.
- ✓ حَلَّ مسائل حياتية عن طرائق العَدِّ.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ ماهية مبدأ العَدِّ الأساسي، واستعماله في حَلِّ المسائل.
- ◄ ماهية مضروب العدد، واستعماله في حَلِّ المسائل.
- ◄ ماهية التباديل، واستعمالها في حَلِّ المسائل.
- ◄ ماهية التوافيق، واستعمالها في حَلِّ المسائل.

الدرس 1

مبدأ العَدِّ الأساسي
Fundamental Counting Principle

فكرة الدرس تعرُّف مبدأ العَدِّ الأساسي، واستعماله في حَلِّ المسائل.

المصطلحات مبدأ العَدِّ الأساسي.

مسألة اليوم بكم طريقة يُمكِن لرولا اختيار قطعة شوكولاتة من بين 3 أنواع، وقطعة بسكويت من بين 6 أنواع؟

يُمكِن بسهولة تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب عناصر مجموعة صغيرة. فمثلًا، توجد طريقتان فقط لترتيب عناصر المجموعة $\{a, b\}$، هما: ab و ba. ولكنْ إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيرًا، فإنَّ حصر جميع الطرائق المُمكِنة وعَدَّها يصبح أمرًا صعبًا.

تعلَّمْتُ سابقًا بعض طرائق تحديد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل: مخطط الشجرة، والجداول، والقوائم المنظمة؛ لذا يُمكِن الاستفادة منها في تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة ما.

مثال 1

أجد باستعمال كلٍّ من الطرائق الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم سري من منزلتين باستعمال الأرقام: 1, 2, 3، علمًا بأنَّه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

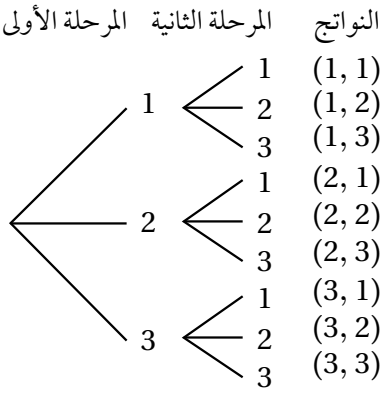
أتعلَّم

تُمثِّل الأرقام السرية التسعة الناتجة عناصر الفضاء العيني لتجربة تكوين رقم ذي منزلتين من الأرقام: 1, 2, 3

1 مخطط الشجرة:

أرسم شكل شجرة مُكوَّنة من مرحلتين؛ الأولى تُمثِّل خيارات رقم منزلة العشرات، والثانية تُمثِّل خيارات رقم منزلة الآحاد كما في الشكل المجاور.

بعد عَدِّ النواتج، أُلاحِظ أنَّه يُمكِن تكوين رقم سري من منزلتين بـ 9 طرائق مختلفة.



أُفكِّر

هل يُمكِن استعمال الجدول في المسائل التي تحوي أكثر من مرحلتين؟

2 الجدول:

أَعُدُّ الطرائق المُمكِنة لذلك بتنظيم الأرقام السرية التي يُمكِن تكوينها باستعمال جدول على النحو الآتي:

	1	2	3
1	1, 1	1, 2	1, 3
2	2, 1	2, 2	2, 3
3	3, 1	3, 2	3, 3

3 القائمة المنظمة:

أَعُدُّ الطرائق المُمكِنة لذلك بكتابة قائمة منظمة، يقترن فيها كل رقم من منزلة العشرات بجميع الأرقام المُمكِنة لمنزلة الآحاد في الرقم السري على النحو الآتي:

1, 1 1, 2 1, 3

2, 1 2, 2 2, 3

3, 1 3, 2 3, 3

أتحقَّق من فهمي

أجد باستعمال كلٍّ من الطرائق الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم سري من منزلتين باستعمال الأرقام: 9, 7, 5, 3، علمًا بأنَّه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

a) مخطط الشجرة.

b) الجدول.

c) القائمة المنظمة.

في كثير من الحالات يكون الاهتمام مُنحصِرًا في معرفة عدد الطرائق التي يُمكِن بها إجراء تجربة عشوائية مُكوَّنة من مراحل عِدَّة، من دون اهتمام بمعرفة النواتج نفسها، فيُستعمَل **مبدأ العَدِّ الأساسي** (fundamental counting principle) لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء التجربة؛ بضرب عدد الطرائق المُمكِنة في كل مرحلة من مراحلها بعضها في بعض.

أتعلَّم

يُطلَق أيضًا على مبدأ العَدِّ الأساسي مصطلح قاعدة الضرب.

مفهوم أساسي

للتجربة العشوائية التي يُمكِن تنفيذها في n مرحلة، إذا كان عدد الطرائق المُمكِنة في المرحلة الأولى هو K_1 ، وعدد الطرائق المُمكِنة في المرحلة الثانية هو K_2 ، ... ، وعدد الطرائق المُمكِنة في المرحلة الأخيرة هو K_n، فإنَّ العدد الكلي للطرائق التي يُمكِن تنفيذ التجربة بها هو $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$.

مثال 2 : من الحياة

يحتوي جدول الحصص الأسبوعي لمنال على 7 مواد دراسية يوم الثلاثاء. أجد عدد التراتيب المُمكِنة لأول 3 حصص، علمًا بأنَّه لا توجد حصص مُكرَّرة لأيِّ مادة دراسية في هذا اليوم.

يوجد للحصة (المرحلة) الأولى 7 خيارات (مواد دراسية)، في حين يوجد للحصة الثانية 6 خيارات؛ لأنَّ منال لن تعيد دراسة مادة الحصة الأولى، أمّا الحصة الثالثة فلها 5 خيارات.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

عدد طرائق اختيار مادة الحصة الأولى		عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثانية		عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثالثة		
7	×	6	×	5	=	210

إذن، توجد 210 طرائق لترتيب المواد الدراسية في الحصص الثلاث الأولى من جدول منال ليوم الثلاثاء، ويصعب كتابة هذه الطرائق لأنَّ عددها كبير.

أتحقَّق من فهمي

طعام: بكم طريقة مختلفة يُمكِن لشخص اختيار وجبة غدائه المُكوَّنة من طبق رئيس واحد، وطبق مقبلات واحد، وطبق حساء واحد، من قائمة وجبة اليوم التي يُقدِّمها أحد المطاعم؟

يتأثَّر العدد الكلي للنواتج المُمكِنة للتجربة العشوائية بالشروط المُحدِّدة لكيفية تنفيذ مراحلها، مثل: السماح بتكرار اختيار العناصر أو عدم السماح بذلك، وتثبيت بعض العناصر في مواضع مُعيَّنة.

مثال 3

أجد في كلٍّ من الحالات الآتية عدد الطرائق المُمكِنة لتكوين كلمة (ليس بالضرورة لها معنى) من 3 أحرف، مُستعمِلًا الأحرف: أ، ب، جـ، د، هـ:

1 إذا سُمِح بتكرار الأحرف في الكلمة.

أُلاحِظ أنَّه يُمكِن اختيار أيٍّ من الأحرف الخمسة في كل مرحلة.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		
5	×	5	×	5	=	125

إذن، يُمكِن تكوين 125 كلمة.

أُفكِّر

لماذا نقص عدد الكلمات عند إضافة شرط (عدم السماح بالتكرار)؟

2 إذا لم يُسمَح بتكرار الأحرف في الكلمة.

أُلاحِظ أنَّ الحرف المُستعمَل في الخيار الأول لا يجوز تكراره في الخيار الثاني، وأنَّ الحرفين المُستعمَلين في الخيارين الأول والثاني لا يجوز استعمالهما في الخيار الثالث.

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		
5	×	4	×	3	=	60

إذن، يُمكِن تكوين 60 كلمة.

3 **إذا كان الحرف الأول من هذه الكلمات هو (جـ)، ولا يُسمَح بتكرار الأحرف.**

أُلاحِظ أنَّه توجد طريقة واحدة لاختيار الحرف الأول (جـ).

باستعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، فإنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول		عدد طرائق اختيار الحرف الثاني		عدد طرائق اختيار الحرف الثالث		
1	×	4	×	3	=	12

إذن، يُمكِن تكوين 12 كلمة.

أتحقَّق من فهمي

أجد في كلٍّ من الحالات الآتية عـــدد الطرائق المُمكِنة لتكوين رقم مركبة مُكوَّن من 5 منازل، مُستعمِلًا الأرقام: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1:

a) إذا سُمِح بالتكرار.

b) إذا لم يُسمَح بالتكرار.

c) إذا سُمِح بالتكرار؛ شرط وضع الرقم 9 في أول منزلة من اليسار.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

شـــراء: ترغب حنين في شـــراء هاتف محمول، فذهبت إلى أحـــد محالِّ بيع الهواتف، ووجدت فيـــه 4 أنواع مختلفة من الهواتف: *H, I, S, N*، لكل نوع منها ثلاثة ألوان: أحمر: R، وأسود: B، وأبيض: W.

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لشراء حنين هاتفًا محمولًا باستعمال:

1 مخطط الشجرة. **2** الجدول. **3** القائمة المنظمة.

4 **طعـــام:** يُعِدُّ مطعـــمٌ البيتزا باســـتعمال نوعين من العجيـــن، و8 خلطات مختلفة. إذا كان لهذه البيتزا 3 حجوم، فكم عدد الخيارات المُمكِنة لشراء بيتزا واحدة منها؟

5 يشــترط موقع تعليمي في شبكة الإنترنت إنشاء المُستخدِم حسابًا محميًّا بكلمة مرور تحوي 4 أحرف إنجليزية (من دون اهتمام بحجم الخط) متبوعة بعدد مُكوَّن من رقم واحد. ما عدد كلمات المرور المختلفة التي يُمكِن إنشاؤها؟

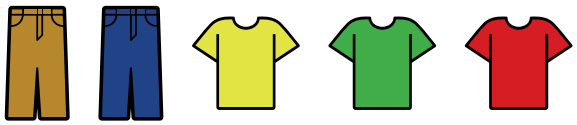
كــرات: **يحتوي صندوق على كــرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة بيضاء. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لســحب كرتين على التوالي في الحالتين الآتيتين:**

6 إذا سُمِح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى.

7 إذا لم يُسمَح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى.

8 مختبر: تريد شــيماء اختيار زميلتين لتكوين مجموعة ثلاثية تُنفِّذ تجربة في مختبر العلوم. بكم طريقة مختلفة يُمكِنها تكوين مجموعتها، علمًا بأنَّ عدد طالبات الصف 21 طالبة؟

9 لدى حاتم ثلاثة قمصان مختلفة الألــوان، وبنطالان مختلفا اللون. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار حاتم قميصًا وبنطالًا؟



10 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

11 تحدٍّ: يســتطيع بشــير اســتعمال 480 طريقة مختلفة لاختيــار وجبة غدائه مــن بين المقبــلات، والطبق الرئيس، والحلويات. إذا كان للمقبلات 6 خيارات، وللطبق الرئيــس 10 خيارات، فما عدد الخيارات المُمكِنة للحلويات، علمًا بأنَّه اختار طبقًا واحدًا من كل صنف؟

12 تبرير: كم عددًا من 4 منازل يقبل القسمة على 5، ويُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام: 5, 4, 3, 2, 1، إذا سُمِح بالتكرار، مُبرِّرًا إجابتي؟

13 تحدٍّ: كم عددًا فرديًّا من 3 منازل يُمكِن تكوينه باستعمال الأرقام (0–9)، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار؟

14 أكتب: كيف يستفاد من مبدأ العَدِّ الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المختلفة لإجراء تجربة عشوائية مُتعدِّدة المراحل؟

الدرس
2

مضروب العدد
Factorial

فكرة الدرس تعرُّف مضروب العدد الصحيح غير السالب، واستعماله في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات مضروب العدد.

مسألة اليوم شاركت داليا في معرض فني بـ 5 لوحات، خُصِّص لعرضها مساحة على الحائط. بكم طريقة مختلفة يُمكِنها ترتيب لوحاتها على الحائط في صفٍّ واحد بجانب بعضها؟

يُمكِن التعبير عن $3 \times 2 \times 1$ باستعمال الرمز $3!$ الذي يُقرَأ: مضروب (factorial) العدد ثلاثة.

مضروب العدد

مفهوم أساسي

بالكلمات: مضروب العدد الصحيح الموجب n هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من (أو تساوي) n.

بالرموز: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$

أتعلَّم

بالتعريف، فإنَّ:

$0! = 1$

$1! = 1$

مثال 1

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

1 $6!$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف المضروب

$= 720$ الناتج

2 $(7-3)!$

$(7-3)! = 4!$ بإيجاد ناتج الطرح

$= 4 \times 3 \times 2 \times 1$ تعريف المضروب

$= 24$ الناتج

أُفكِّر

هل العبارة الآتية صحيحة:

$(7-3)! = 7! - 3!$؟

3 $\frac{8!}{5!}$

$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}^{1}}{\cancel{5!}}$ تعريف المضروب

$= 8 \times 7 \times 6$ باختصار $5!$ من البسط والمقام

$= 336$ الناتج

أتحقَّق من فهمي

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي:

a) $7!$ **b)** $(4+1)!$ **c)** $4! + 1!$ **d)** $\frac{12!}{7!}$

أتعلَّم

$5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$

بوجه عام، فإنَّ:

$n! = n(n-1)!$

يُمكِن استعمال مضروب العدد لحَلِّ المسائل بدلًا من استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي الذي درسْتُه سابقًا.

مثال 2

تُخطِّط ماريا لزيارة بيت جدِّها، وبيت خالها، وبيت عمِّها أول أيام عيد الأضحى المبارك. بكم طريقة يُمكِنها ترتيب مواعيد زيارتها؟

يُمكِن تحديد عدد هذه الطرائق باستعمال مضروب العدد 3؛ لأنَّ ماريا تريد تنظيم 3 زيارات، لكلٍّ منها عدد من البدائل من دون تكرار، فيكون عدد الطرائق مساويًا لمضروب العدد 3:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

أتحقَّق من فهمي

شارك 7 طلبة في سباق، وارتدى كلٌّ منهم قميصًا مُرقَّمًا من 1 إلى 7، أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب وصول الطلبة إلى خط النهاية.

يُمكِن أيضًا استعمال المضروب لإيجاد عدد طرائق ترتيب عناصر مجموعة؛ سواء أكانت بعض العناصر مُكرَّرة أم لا.

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب العدد. فمثلًا، لإيجاد مضروب العدد 6، أضغط على الأزرار الآتية من اليسار إلى اليمين:

6 | ! | =

أتذكَّر

- عـدد حـروف اللغـة العربية 28 حرفًا.
- عـدد حـروف اللغـة الإنجليزية 26 حرفًا.

مثال 3

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

1 JORDAN

أُلاحِظ أنَّ كلمة (JORDAN) تحوي 6 أحرف مختلفة غير مُكرَّرة، وأنَّ عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب هذه الأحرف يساوي مضروب العدد 6:

$$6! = 720$$

إذن، يوجد 720 كلمة يُمكِن تكوينها من تراتيب مختلفة للأحرف الستة.

2 MOHAMMAD

أُلاحِـظ أنَّ كلمة (MOHAMMAD) تحوي 8 أحرف، وأنَّ الحرف (M) تكرَّر ثلاث مرّات، وأنَّ الحرف (A) تكرَّر مرَّتين.

لا يُؤثِّر في الحَلِّ ترتيب الأحرف المُكرَّرة والمتشـابهة؛ لذا تسـتثنى طرائق ترتيب الأحرف المُكرَّرة عند عَـدِّ الطرائق الكلية المُمكِنة لتراتيب أحرف الكلمة، وذلك بالقسـمة على عدد طرائق ترتيب الأحرف المُكرَّرة فيها:

عدد طرائق ترتيب 8 أحرف مختلفة $8! = 40320$

عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرَّر M $3! = 6$

عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرَّر A $2! = 2$

باختصار عدد طرائق ترتيب الحرفين المُكرَّرين

$$\frac{8!}{(3!)\,(2!)} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3!)\,(2!)}$$
$$= 3360$$

إذن، توجد 3360 طريقة لترتيب أحرف كلمة (MOHAMMAD).

أتحقَّق من فهمي

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

a) PETRA **b)** AMMAN

البترا (PETRA) مدينة نحتها الأنبـاط بالصخر منـذ أكثر مـن 2000 عـام، ولا يُمكِن للزائر دخولها إلّا بالسـير في السيق؛ وهو شق بين الجبال الصخرية، طولـه 1200 m تقريبًا.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $5!$

2 $(18-13)!$

3 $(4+3)!$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4 $\frac{17!}{11!}$

5 $\frac{10!}{4! \times 6!}$

6 $\frac{13!}{(6!)(13-6)!}$

7 **سياحة:** يريد سائح زيارة المعالم الأثرية الآتية:

جرش، أم قيس، البحر الميت، المُدرَّج الروماني، قلعة عجلون. بكم طريقة يُمكِنه ترتيب زيارة هذه المواقع الأثرية؟

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

8 PALESTINE

9 AJLOUN

10 **زراعة:** يريد مروان زراعة 4 أشجار لوزيات من أنواع مختلفة في صفٍّ واحد بحديقة منزله. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لتنظيم زراعة هذه الأشجار.

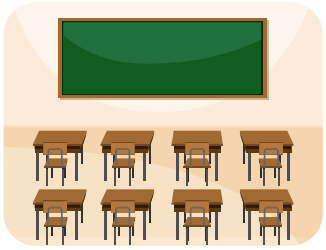
11 **مدرسة:** تريد منال حَلَّ الواجبات المدرسية للمواد الآتية:

الرياضيات، اللغة العربية، اللغة الإنجليزية، الثقافة العامة، الجغرافيا.

بكم طريقة يُمكِنها ترتيب حَلِّ هذه الواجبات؟

12 **مطالعة:** تريد داليا قراءة 5 كتب لديها. بكم طريقة يُمكِنها ترتيب قراءة هذه الكتب؟

مهارات التفكير العليا



تحدٍّ: يوجد في صفٍّ 8 طالبات، يتعيَّن عليهنَّ الجلوس في صفين كما في الشكل المجاور:

13 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس هؤلاء الطالبات.

14 إذا تعيَّن على نور وشمس الجلوس على مقعد إحدى الزوايا الأربع، فبكم طريقة يُمكِن أنْ تجلس طالبات الصف؟

15 إذا قسَّمَتِ المعلِّمة طالبات الصف إلى مجموعتين، في كلٍّ منهما 4 طالبات، فبكم طريقة يُمكِن أنْ تجلس طالبات الصف؛ شرط أنْ تكون المقاعد الأربعة في الصف الأول للمجموعة الأولى، والمقاعد الأربعة في الصف الثاني للمجموعة الثانية؟

الدرس
3

التباديل
Permutations

فكرة الدرس تعرُّف التباديل، واستعمالها في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات التباديل.

مسألة اليوم بكم طريقة يُمكِن لثلاث أخوات من بين خمسٍ الوقوف بجانب بعضهنَّ لتلتقط سميرة صورة لهنَّ؟

التباديل (permutations) هي عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار مجموعة من الأشياء، ومراعاة ترتيب اختيار هذه الأشياء.

عدد تباديل الحرف (A) : 1 — A — توجد طريقة واحدة لترتيب اختيار الحرف (A).

عدد تباديل الحرفين (A, B): 2 $(2 \times 1 = 2)$ — AB BA — يُمكن اختيار الحرف (B) قبل الحرف (A)، أو بعده.

عدد تباديل الأحرف (A, B, C): 6 $(3 \times 2 \times 1 = 6)$ — ABC ACB BCA CAB CBA — يُمكن اختيار الحرف (C) أولًا، أو ثانيًا، أو ثالثًا.

قد لا يَلزم أحيانًا إيجاد عدد طرائق الاختيار لعناصر المجموعة كلها. فمثلًا، إذا أردْتُ تحديد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار لجنة مُكوَّنة من 3 أشخاص (رئيس، ومساعد، وعضو)، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص، فإنَّني أستعمل مبدأ العَدِّ الأساسي كما يأتي:

عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة		عدد طرائق اختيار مساعد اللجنة		عدد طرائق اختيار عضو اللجنة		
7	×	6	×	5	=	210

إذن، يُمكِنني اختيار 3 أشخاص، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص باستعمال 210 طرائق، مُراعِيًا المُسمّى الوظيفي لكل شخص.

يُمكِنني أيضًا استعمال المضروب لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الثلاثة، وذلك بإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص السبعة جميعًا وترتيبهم، ثم اختصار عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الأشخاص الأربعة الباقين باستعمال القسمة كما يأتي:

$$\frac{\text{طرائق اختيار 7 أشخاص}}{\text{طرائق اختيار 4 أشخاص}} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

يُمكِن تعميم هذه النتيجة في صورة قانون.

التباديل

مفهوم أساسي

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \le n$.

فمثلاً، عدد تباديل 5 عناصر، أُخِذ منها 3 عناصر كل مرَّة، هو:

$$_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

رموز رياضية

يُمكِن استعمال أيٍّ من الرموز الآتيين للتعبير عن تباديل n من العناصر التي أُخِذ منها r كل مرَّة:

nPr , $P(n,r)$

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $_{10}P_4$

$$_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} \quad \text{تعريف التباديل}$$

$$= \frac{(10)\,(9)\,(8)\,(7)\,(\cancel{6!}^{1})}{\cancel{6!}} \quad \text{باختصار } 6! \text{ من البسط والمقام}$$

$$= 5040 \quad \text{بالضرب}$$

أتعلَّم

أُلاحِظ أنَّ:

$_{10}P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$؛ أيْ إنَّ الضرب يبدأ من 10 نزولًا 4 مرّات.

بوجه عام، فإنَّ:

$nPr = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

2 $\frac{{}_{12}P_7}{{}_9P_4}$

تعريف التباديل

$$\frac{{}_{12}P_7}{{}_9P_4} = \frac{12!}{(12-7)!} \times \frac{(9-4)!}{9!}$$

بإيجاد ناتج الطرح

$$= \frac{12!}{5!} \times \frac{5!}{9!}$$

باختصار $9!$ من البسط والمقام

$$= \frac{(12)(11)(10)(\cancel{9!})^{1}}{\cancel{9!}}$$

الناتج

$$= 1320$$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) ${}_5P_5$

b) $\frac{{}_{13}P_3}{{}_{13}P_1}$

أتعلَّم

$nPn = n!$

$nP1 = n$

$nP0 = 1$

يُمكِن إيجاد عدد طرائق الاختيار باستعمال التباديل في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب مهمًّا، مثل عدد طرائق ترتيب الجلوس على مقاعد لعدد من الأشخاص، أو عدد طرائق ترتيب مجموعة من الكتب المختلفة على رفٍّ.

يُعَدُّ استعمال التباديل طريقة سهلة، مقارنةً بالطرائق التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل: مبدأ العَدِّ الأساسي، ومخطط الشجرة، والجدول، والقوائم المنظمة.

مثال 2

أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار طالبينِ عشوائيًّا من الطلاب:
محمود، وعلي، وحسن، ومعتز، وتعيين الأول مسؤولًا عن الإذاعة المدرسية، وتعيين الثاني رئيسًا لمجلس الطلبة.

أستعمل الجدول لحصر الخيارات المُمكِنة جميعها على النحو الآتي:

مسؤول الإذاعة المدرسية / رئيس مجلس الطلبة	معتز	حسن	علي	محمود
محمود	(محمود، معتز)	(محمود، حسن)	(محمود، علي)	
علي	(علي، معتز)	(علي، حسن)		(علي، محمود)
حسن	(حسن، معتز)		(حسن، علي)	(حسن، محمود)
معتز		(معتز، حسن)	(معتز، علي)	(معتز، محمود)

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة؛ فالاختيار (علي، حسن) يعني أنَّ عليًّا هو مسؤول الإذاعة، وأنَّ حسنًا هو رئيس مجلس الطلبة. أمّا الاختيار (حسن، علي) فيعني أنَّ حسنًا هو مسؤول الإذاعة، وأنَّ عليًّا هو رئيس مجلس الطلبة.

بناءً على الجدول، يُمكِنني عَدُّ الخيارات المختلفة لتحديد عدد طرائق الاختيار، وهو 12

يُمكِنني أيضًا استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي لإيجاد عدد طرائق الاختيار، حيث:

عدد طرائق اختيار مسؤول الإذاعة المدرسية		عدد طرائق اختيار رئيس مجلس الطلبة		
4	×	3	=	12

أو استعمال التباديل لإيجاد عدد طرائق الاختيار.

أريد اختيار عنصرين من بين 4 عناصر، مُراعِيًا الترتيب:

قانون التباديل

$$_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!}$$

الناتج

$$=12$$

أتحقَّق من فهمي

بكم طريقة يُمكِن أنْ تختار سلمى وروان ورزان 3 عيِّنات عشوائيًّا من بين 5 عيِّنات مختلفة متوافرة في مختبر العلوم لفحصها بالمجهر الضوئي؟

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التباديل. فمثلًا، لإيجاد ناتج $_4P_2$، أضغط على الأزرار الآتية:

4 nPr 2 =

أُفكِّر

هل الترتيب مهم في مسألة (أتحقَّق من فهمي) المجاورة؟ لماذا؟

يُمكِن استعمال التباديل أيضًا في التجارب التي تتطلَّب عدم تكرار العناصر المختارة عشوائيًّا من بين مجموعة عناصر؛ لأنَّ ذلك يمنح كل عنصر أهمية في الترتيب.

مثال 3

أجــد عدد الكلمات الثلاثية (ليس بالضرورة لها معنى) التــي يُمكِن تكوينها من حروف اللغة العربية، بحيث لا تحوي أيُّ كلمةٍ أحرفًا مُكرَّرةً.

عدد حروف اللغة العربية 28 حرفًا. ولأنَّ التكرار غير مسموح به؛ فإنَّ ترتيب الحروف مهم.

إذن، يُمكِن استعمال التباديل لتحديد عدد طرائق اختيار 3 أحرف من بين 28 حرفًا:

قانون التباديل

$$_{28}P_3 = \frac{28!}{(28-3)!}$$

الناتج باستعمال الآلة الحاسبة

$$= 19656$$

أيْ يُمكِن تكوين 19656 كلمة تتألَّف كلٌّ منها من 3 أحرف.

معظم مفــردات اللغة العربيــة أصلها ثلاثي، فرباعي، فخماسي.

أتحقَّق من فهمي

أجد عدد الكلمات الخماســية (ليس بالضرورة لها معنى) التي يُمكِن تكوينها من حروف اللغة الإنجليزية، علمًا بأنَّه لا يُسمَح بالتكرار.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1. $_9P_5$
2. $_7P_0$
3. $_{99}P_2$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4. $\frac{_{10}P_3}{_8P_2}$
5. $(_{13}P_9) - (_7P_4)$
6. $(_7P_3) \times (_4P_3)$

7. **مقاعد:** أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس شخصين على 5 مقاعد موضوعة في صفٍّ واحد.

8 **محاضرات:** اعتمدت فيحاء جدولها الدراسي للفصل الأول في الجامعة، بحيث اختارت 4 مواد من بين 12 مادة مختلفة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب فيحاء مواد جدولها الدراسي.

9 **سياحة:** أعلنت شركة سياحية عن وجود رحلات إلى 8 مدن مختلفة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار شخص رحلتين إلى مدينتين مختلفتين، بحيث يسافر إلى الأولى للتجارة، ويسافر إلى الثانية للاستجمام.

10 **رياضة:** أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاصطفاف 5 طلبة بجانب بعضهم قبيل انطلاقهم في مسابقة الجري.

11 **ترقيم:** أجد عدد المنازل التي يُمكِن ترقيمها باستعمال رموز تحوي 3 أرقام من 1 إلى 9؛ شرط ألّا يحتوي رمز أيِّ منزل على رقم مُكرَّر.

12 **مقاعد:** أجد عدد الطرائق المُمكِنة لجلوس 6 طلبة على 6 مقاعد رُتِّبت في صفٍّ واحد.

13 **كتب:** لدى طلال 4 كتب رياضيات (M)، و3 كتب لغة إنجليزية (E). أجد عدد الطرائق المُمكِنة لترتيب الكتب السبعة على الشكل:

$M\ E\ M\ E\ M\ E\ M$

14 **مركبات:** تقف سبع سيّارات في انتظار دورها للفحص أمام مركز مُتخصِّص لصيانة السيّارات، بما في ذلك سيّارتا فؤاد وغيث. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاصطفاف سيّارتي فؤاد وغيث في الدور.

مهارات التفكير العليا

15 **تحدٍّ:** أجد قيمة r إذا كان $_{10}P_r = 5040$.

16 **تحدٍّ:** أُثبِت أنَّ $_nP_n = n!$.

الدرس
4

التوافيق
Combinations

فكرة الدرس تعرُّف التوافيق، واستعمالها في حَلِّ مسائل حياتية.

المصطلحات التوافيق.

مسألة اليوم نظَّمت الملكية الأردنية 12 رحلة إلى بعض الدول العربية في يوم واحد من مطار الملكة علياء وإليه. بكم طريقة يُمكِن اختيار 3 رحلات منها عشوائيًّا من دون اهتمام بترتيب عملية انطلاقها؟

قد لا يكون مهمًّا ترتيب العناصر المختارة عشوائيًّا في بعض المواقف. فمثلًا، اختيار شخصين a وb لتشكيل لجنة من مجموعة فيها n من الأشخاص، لا يتطلَّب اهتمامًا بالترتيب؛ لأنَّ الترتيب ab هو نفسه الترتيب ba ضمن اللجنة.

لكي أجد عدد طرائق الاختيار المُمكِنة في هذه الحالة؛ أَقسِم ${}_nP_2$ على $2!$، مُهمِلًا التكرار، في ما يُعرَف **بالتوافيق** (combinations).

التوافيق

مفهوم أساسي

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر، أُخِذ منها r كل مرَّة، هو:

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

حيث: n, r عددان صحيحان موجبان، و $r \le n$.

مثال: عدد توافيق 7 عناصر، أُخِذ منها 3 عناصر كل مرَّة، هو:

$$ {}_7C_3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35 $$

أتعلَّم

في **التباديل** يكون الترتيب abc مختلفًا عن الترتيب bac، وعن الترتيب cba. أمّا في **التوافيق** فإنَّ هذه التراتيب جميعها تكون مُتكافِئة.

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $({}_{10}C_7) - ({}_8C_3)$

تعريف التوافيق: $({}_{10}C_7) - ({}_8C_3) = \frac{10!}{7!(10-7)!} - \frac{8!}{3!(8-3)!}$

بحساب التوافيق: $= 120 - 56$

الناتج: $= 64$

2 $({}_9C_6) \times ({}_6C_2)$

تعريف التوافيق: $({}_9C_6) \times ({}_6C_2) = \frac{9!}{6!(9-6)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!}$

بحساب التوافيق: $= (84)(15)$

الناتج: $= 1260$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $({}_{13}C_5) - ({}_8C_8)$

b) $({}_7C_0) \times ({}_7C_7)$

أتعلَّم

يُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التوافيق. فمثلًا، لإيجاد ناتج ${}_{10}C_7$، أضغط على الأزرار الآتية:

10 nCr 7 =

أتعلَّم

$nCo = 1$

$nC1 = n$

$nCn = 1$

إذا لم يكن مهمًّا ترتيب العناصر المختارة في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال التوافيق لإيجاد عدد الطرائق التي تُختار بها تلك العناصر.

مثال 2

أجد عدد الطرائق التي يُمكِن بها اختيار طالبينِ من بين 4 طلاب مُترشِّحين (علاء، فريد، يونس، ربيع) للعب في فريق كرة القدم الذي يُمثِّل المدرسة.

يُمكِنني استعمال القائمة المنظمة لإيجاد عدد طرائق اختيار الطالبينِ على النحو الآتي:

(علاء، فريد)، (علاء، يونس)، (علاء، ربيع)، (فريد، يونس)، (فريد، ربيع)، (يونس، ربيع).

إذن، توجد 6 طرائق لاختيار طالبينِ من بين المُترشِّحين الأربعة.

نظرًا إلى عدم أهمية الترتيب في هذه المسألة، وعدم وجود فرق في الاختيار بين (علاء، فريد) و(فريد، علاء)؛ أستعمل التوافيق لإيجاد عدد طرائق اختيار طالبينِ من بين المُترشِّحين الأربعة على النحو الآتي:

تعريف التوافيق $${}_4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!}$$

الناتج $$= 6$$

أتحقَّق من فهمي

أجد عدد طرائق اختيار لجنةٍ تُنظِّم عملية دخول طالبات مدرسة، وتضم 3 طالبات من بين 10 طالبات تطوَّعْنَ لأداء هذه المهمة.

يُمكِن استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي، والتباديل، والتوافيق في المواقف التي تتطلَّب إيجاد عدد العناصر المُمكِنة للفضاء العيني لتجربة عشوائية، أو إيجاد عدد العناصر التي يتكوَّن منها حادث مُعيَّن في تلك التجربة، حيث يكون عدد العناصر هو عدد طرائق الاختيار ضمن شروط مُحدَّدة.

مثال 3

يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء مُرقَّمة من (1 - 5)، و4 كرات زرقاء مُرقَّمة من (1 - 4)، علمًا بأنَّ جميع الكرات مُتماثِلة:

1 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب 3 كرات حمراء عشوائيًّا من الصندوق إذا سُحِبت الكرات دفعةً واحدةً.

أفترض أنَّ $n(A)$ هو عدد الطرائق التي يُمكِن بها سحب 3 كرات حمراء، علمًا بأنَّ العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5 كرات، وترتيب سحب الكرات ليس مهمًّا:

عدد طرائق سحب 3 عناصر من بين 5 عناصر $$n(A) = {}_5C_3$$

بالتعويض في قانون التوافيق $$= \frac{5!}{3! \times (5-3)!}$$

بإيجاد ناتج الطرح $$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!}$$

الناتج $$= 10$$

أتعلَّم

إذا رمزْتُ إلى الكرة الحمراء بالحرف R، فإنَّ النواتج المُمكِنة لتجربة سحب 3 كرات حمراء هي:

$(R1,R2,R3),(R1,R2,R4)$

$(R1,R2,R5),(R1,R3,R4)$

$(R1,R3,R5),(R1,R4,R5)$

$(R2,R3,R4),(R2,R3,R5)$

$(R2,R4,R5),(R3,R4,R5)$

2 **أجد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء عشوائيًّا من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع.**

أفترض أنَّ $n(B)$ هو عدد الطرائق التي يُمكِن بها سحب كرتين حمراوين وكرة زرقاء.

أُلاحِظ أنَّ الترتيب مهم في هذه المسألة. فمثلًا، سحب الكرات (حمراء 1، حمراء 2، زرقاء 3) يختلف عن سحب الكرات (حمراء 1، زرقاء 3، حمراء 2)، (زرقاء 3، حمراء 1، حمراء 2)، (حمراء 2، حمراء 1، زرقاء3)، (حمراء 2، زرقاء 3، حمراء 1)، (زرقاء 3، حمراء 2، حمراء 1). أُلاحِظ أيضًا أنَّ العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5 كرات، وأنَّ العدد الكلي للكرات الزرقاء في الصندوق 4 كرات:

اختيار عنصرين من بين 5 عناصر، واختيار عنصر واحد من بين 4 عناصر

$$n(B) = {}_5P_2 \times {}_4P_1$$

بالتعويض في قانون التباديل

$$= \frac{5!}{(5-2)!} \times \frac{4!}{(4-1)!}$$

بالتبسيط

$$= 20 \times 4$$

الناتج

$$= 80$$

أتعلَّم

أستعمل مبدأ العَدِّ الأساسي لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء، وذلك بضرب ${}_5P_2$ في ${}_4P_1$

أتحقَّق من فهمي

مُعتمِدًا المثال 3، أجد ما يأتي:

a) عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين زرقاوين عشوائيًّا من الصندوق إذا سُحِبتا معًا.

b) عدد الطرائق المُمكِنة لسحب كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء عشوائيًّا من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 $_{10}C_7$

2 $_9C_0$

3 $_7C_1 + {}_6C_3$

أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4 $(_{12}C_5) \times (_5C_3)$

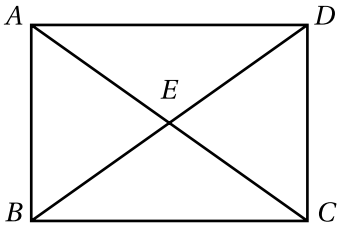
5 $\frac{_{10}C_6}{_8C_5}$

6 $\frac{_9C_5}{(_8C_5) \times (_3C_2)}$

7 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار نوعي فاكهة من 7 أنواع مختلفة متوافرة في محل لبيع الفواكه.

8 لـــدى قيس 8 كتب مختلفة، أراد إهداء 3 كتب منها إلى مكتبة المدرســـة. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار الكتب التي يرغب قيس في إهدائها.

9 **هندسة:** أجد عدد المثلثات التي يُمكِن تكوينها من أضلاع الشكل المجاور.



رياضة: يريد معلِّم التربية الرياضية اختيار طالبينِ من بين 15 طالبًا للمشاركة في المباريات المدرسية:

10 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هذين الطالبينِ.

11 أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هذين الطالبينِ للمشـــاركة في المباريات، علمًا بأنَّ الأول سيشارك في مباراة كرة القدم، والثاني سيشارك في مباراة كرة السلَّة.

12 **هدايا:** تريد إيمان شـــراء باقة ورد لأمها من أحد محالِّ بيع الورد. بكم طريقة يُمكِن لإيمان شـــراء باقة فيها 5 وردات من بين 9 وردات ألوانها مختلفة؟

13 أجد عدد الطرائق المُمكِنة التي يريد بها سمير شراء 4 أقلام من بين 10 أقلام مختلفة.

مهارات التفكير العليا

14 **أكتشـــف الخطأ:** وجد كلٌّ من ســـعيد وهمام عدد الطرائق المُمكِنـــة لاختيار 3 طلبة في الصف مـــن بين 11 طالبًا للمشاركة في مشروع تصميم مُخطَّط هندسي لمدرستهم. أيُّهما إجابته صحيحة؟

سعيد
$_{11}C_3$

همام
$_{11}P_3$

15 **تبرير:** هل يُمكِن أنْ يكون $nPr = nCr$، حيث: n,r عددان صحيحان موجبان، و $r \leq n$؟ أُبرِّر إجابتي.

16 **تحدٍّ:** إذا كان $_{10}C_7 = {}_{10}C_3$، فأجد صيغة عامة لهذه العلاقة.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 ناتج ${}_7C_6$ هو:

a) 1 b) 6 c) 7 d) 42

2 ناتج ${}_9P_1$ هو:

a) 1 b) 9 c) 18 d) 27

3 ناتج ${}_nC_n$، حيث n عدد صحيح موجب، هو:

a) 1 b) n c) $2n$ d) n^2

4 ناتج ${}_nP_1$، حيث n عدد صحيح موجب، هو:

a) 1 b) n

c) $2n$ d) n^2

5 **زراعة:** في محل أشتال 6 ألوان مختلفة من الورد الجوري، و4 ألوان مختلفة من ورد القرنفل. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لشراء شتلة واحدة من الورد الجوري، وشتلة واحدة من ورد القرنفل.

6 **بناء:** في محل 25 نوعًا مختلفًا من بلاط الأرضيات، و36 نوعًا من بلاط الجدران. بكم طريقة يُمكِن لمصطفى اختيار بلاط الأرضيات والجدران لمطبخ منزله؟

7 **مدرسة:** يراد اختيار طالبينِ من بين 5 طلاب من المرحلة الأساسية، و4 طلاب من بين 6 طلاب من المرحلة الثانوية؛ للمشاركة في نشاط مدرسي. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار هؤلاء الطلبة.

8 **تمريض:** يراد اختيار فريق تمريض يتألَّف من 3 مُمرِّضين من بين 7 مُمرِّضين، و 5 مُمرِّضات من بين 10 مُمرِّضات. أجد عدد الطرائق المُمكِنة لاختيار أفراد هذا الفريق.

تدريب على الاختبارات الدولية

9 رُسِمت 8 نقاط على دائرة. عدد المثلثات التي يُمكِن تكوينها من النقاط، بحيث تُمثِّل كل 3 نقاط رؤوس المثلث، هو:

a) 40320 b) 336

c) 56 d) 8

10 يراد تكوين رقم سري من 3 منازل باستعمال الأرقام (0 – 9). عدد الأرقام التي يُمكِن تكوينها من دون تكرار هو:

a) 720 b) 120

c) 3628800 d) 648

11 لقوس قزح 7 ألوان. عدد الطرائق التي يُمكِن أنْ يظهر فيها ترتيب ألوان قوس قزح، بافتراض أنَّه يُمكِن إعادة ترتيب الألوان، هو:

a) 1 b) 7

c) 49 d) 5040

الاحتمالات
Probability

ما أهمية هذه الوحدة؟

صحيح أنَّ الحوادث التي تقع مستقبلًا هي من علم الغيب، ولكنَّ علماء الإحصاء والاحتمال وضعوا نظريات يُمكِن تطبيقها لتقدير احتمالية وقوع بعض الحوادث ضمن مواقف حياتية. فمثلًا، شركات التأمين تعتمد الاحتمالات المحسوبة من طلبات التعويض عن الأضرار السابقة أساسًا للتنبُّؤ باستحقاقات التعويض المستقبلية.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ استعمال مبدأ العَدِّ الأساسي لإيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية من مراحل عِدَّة.
- ✓ استعمال التباديل لإيجاد عدد الطرائق عندما يكون الترتيب مهمًّا.
- ✓ استعمال التوافيق لإيجاد عدد الطرائق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.
- ✓ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لنمذجة مواقف حياتية، وحَلِّ مسائل عملية.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◄ استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لحساب الاحتمالات.
- ◄ تعرُّف المتغير العشوائي لنواتج تجربة عشوائية، وتحديد قِيَم هذا المتغير.
- ◄ حساب الاحتمال لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.
- ◄ إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

الدرس 1

الاحتمال بالتباديل والتوافيق
Probability with Permutations and Combinations

فكرة الدرس استعمال مبدأ العَدِّ والتباديل والتوافيق لحساب احتمالات الحوادث في تجربة عشوائية.

مسألة اليوم أراد خالد التقاط صورة لعائلته، فوقف الأب والأم والابن والابنة في صف واحد أمام الكاميرا. ما احتمال وقوف الابن والابنة بين الأبوين؟

تعلَّمْتُ في الوحدة السابقة كيفية إيجاد عدد الطرائق المُمكِنة لإجراء تجربة عشوائية باستعمال مبدأ العَدِّ، ويُمكِنني الآن الاستفادة من ذلك في حساب احتمال وقوع حادث مُعيَّن ضمن تلك التجربة العشوائية.

مثال 1

رُتِّبت البطاقات الآتية عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يظهر الرقمان 3 و 4 متجاورين؟

2	4	5	1	3

الخطوة 1: أفترض أنَّ الحادث A يعني ظهور الرقمين 3 و4 متجاورين.

الخطوة 2: أحسب عدد عناصر Ω؛ أيْ عدد طرائق ترتيب 5 عناصر (بطاقات) في صف واحد.

$$n(\Omega) = 5! \quad \text{مبدأ العَدِّ الأساسي}$$
$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{تعريف مضروب العدد}$$
$$= 120 \quad \text{بالتبسيط}$$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A.

أُظهِر الرقمين 3 و4 متجاورين في إحدى صورتين: 43، أو 34، وأُعامِل كُلًّا منهما كأنَّها عنصر واحد، ثم أجد عدد طرائق ترتيب 4 عناصر:

$$n(A) = 2 \times 4! \quad \text{مبدأ العَدِّ الأساسي}$$
$$= 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{تعريف مضروب العدد}$$
$$= 48 \quad \text{بالتبسيط}$$

أتذكَّر

الرمز Ω يُقرَأ: أوميغا، ويدل على الفضاء العيني للتجربة العشوائية.

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال $\quad p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{120}$

بالتبسيط $\quad = \frac{2}{5}$

إذن، احتمال ظهور الرقمين 3 و4 متجاورين هو $\frac{2}{5}$

أتحقَّق من فهمي

كُتِبت أحرف كلمة (تباديل) على 6 بطاقات مُتماثِلة، ثم رُتِّبت البطاقات عشوائيًّا في صف واحد. ما احتمال أنْ يظهر الحرفان (ت) و(ي) متجاورين؟

عندما **يكون الترتيب مهمًّا** في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال **التباديل** لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

مثال 2

يتكوَّن مجلس الإدارة في إحدى الشركات من 7 أعضاء، بينهم سارة وحمزة. ما احتمال اختيار سارة رئيسًا لمجلس الإدارة، وحمزة نائبًا للرئيس إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1 : أفترض أنَّ A يعني اختيار سارة رئيسًا، وحمزة نائبًا للرئيس.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب مهم في هذه الحالة؛ لذا فإنَّ:

عدد طرائق اختيار عنصرين (ترتيبهما مهم) من بين 7 عناصر $\quad n(\Omega) = {}_7P_2$

بالتعويض في قانون التباديل $\quad = \frac{7!}{(7-2)!}$

مضروب العدد $\quad = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!}$

بالتبسيط $\quad = 42$

أتعلَّم

يُمكِن تسهيل الاختصار على النحو الآتي:

$$p(A) = \frac{2 \times 4!}{5 \times 4!} = \frac{2}{5}$$

أتذكَّر

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان.

$0 \le r \le n$.

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة تكون فيها سارة رئيسًا، وحمزة نائبًا للرئيس؛ لذا فإنَّ:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{42}$$ بالتعويض في صيغة الاحتمال

إذن، احتمال اختيار سارة رئيسًا لمجلس الإدارة، وحمزة نائبًا للرئيس هو $\frac{1}{42}$

أتحقَّق من فهمي

فؤاد ومصطفى اثنان من 10 طلبة مشاركين في مسابقة الحساب الذهني. إذا كانت لجنة التحكيم تستدعي عشوائيًّا الطلبة المشاركين الواحد تلو الآخر لخوض المسابقة، فما احتمال استدعاء فؤاد أولًا ومصطفى ثانيًا؟

عندما **لا يكون الترتيب مهمًّا** في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنَّه يُمكِن استعمال **التوافيق** لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

مثال 3

يوجد في قسم التطوير بإحدى الشركات الزراعية 7 مهندسين زراعيين، منهم سعاد وحامد. ما احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور ندوة عن المُنتَجات المعالجة وراثيًّا إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1 : أفترض أنَّ A يعني اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب بين سعاد وحامد غير مهم في هذه الحالة؛ لذا أستعمل التوافيق:

$$n(\Omega) = {}_7C_2$$ عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 7 عناصر

$$= \frac{7!}{2! \times (7-2)!}$$ بالتعويض في قانون التوافيق

$$= \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!}$$ مضروب العدد

$$= 21$$ بالتبسيط

أتعلَّم

أُلاحِظ الفرق بين الموقف الذي يكون فيه الترتيب مهمًّا والموقف الذي لا يكون فيه الترتيب مهمًّا، بمقارنة المثال 2 بالمثال 3.

أتذكَّر

$$nCr = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان. $0 \le r \le n$.

النباتات المعالجة وراثيًّا هي نباتات غُيِّرت خصائصها الوراثية عن طريق نقل الجينات من صنف إلى آخر؛ بُغْيَةَ زيادة الإنتاج، أو إنتاج محاصيل غريبة، وقد أثبتت كثير من الأبحاث خطورة هذه المحاصيل على صحة الإنسان.

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة لاختيار سعاد وحامد لحضور الندوة؛ لذا فإنَّ:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$p(\text{A}) = \frac{n(\text{A})}{n(\Omega)} = \frac{1}{21}$$

إذن، احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة هو $\frac{1}{21}$

أتحقَّق من فهمي

صندوق فيه 16 كرة مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من بين الأعداد 0 إلى 15. إذا اختيرت ثلاث كرات عشوائيًّا دفعةً واحدةً، فما احتمال أنْ تحمل الكرات المختارة أعدادًا زوجيةً؟

تتطلَّب بعض المواقف اختيار r_1 من بين n_1 من العناصر عشوائيًّا في مرحلة أولى، و r_2 من بين n_2 من العناصر عشوائيًّا في مرحلة ثانية، وتُمثِّل $n_2 + n_1$ عدد العناصر الكلية، ويُمكِن اختيار r_1 أو r_2 مع مراعاة الترتيب (تباديل)، أو من دون مراعاة الترتيب (توافيق).

مثال 4

شارك 14 طالبًا و16 طالبةً من إحدى المديريات في مسابقة شعرية، وقد اختير منهم 5 طلبة عشوائيًّا لتمثيل لجنة تنظيمية. أجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 **احتمال اختيار 3 طلاب وطالبتين.**

الخطوة 1 : أفترض أنَّ A يعني اختيار لجنة من 3 طلاب وطالبتين.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب في هذه الحالة غير مهم؛ لذا أستعمل التوافيق لحساب عدد طرائق اختيار 5 طلبة من بين 30 طالبًا وطالبةً:

عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 30 عنصرًا

$$n(\Omega) = {}_{30}\text{C}_5$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$= 142506$$

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث A.

أجد عـــدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالبًا مضروبًا في عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبةً.

الترتيب غير مهم في كلتا الحالتين. وبحسب مبدأ العَدِّ، فإنَّ:

مبدأ العَدِّ الأساسي $n(A) = {}_{14}C_3 \times {}_{16}C_2$

باستعمال الآلة الحاسبة $= 43680$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال $p(\mathrm{A}) = \dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{43680}{142506}$

بالتبسيط ≈ 0.31

2 احتمال أنْ يكون رئيس اللجنة ونائبه من الطالبات، والأعضاء الثلاثة الآخرون من الطلاب.

الخطوة 1 : أفترض أنَّ B يعني اختيـــار رئيس اللجنة ونائبه من الطالبـــات، واختيار الأعضاء الثلاثة الآخرين من الطلاب.

الخطوة 2 : أجد عدد عناصر Ω.

الترتيب غير مهم لاختيار لجنة فيها 5 طلبة من بين 30 طالبًا وطالبةً؛ لذا فإنَّ:

عدد طرائق اختيار 5 من بين 30 $n(\Omega) = {}_{30}C_5$

باستعمال الآلة الحاسبة $= 142506$

الخطوة 3 : أجد عدد عناصر الحادث B.

أجـــد عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبةً (الترتيـــب مهم في هذه الحالة؛ لأنَّ إحدى الطالبتين رئيس، والأُخرى نائب للرئيس) مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالبًـــا (الترتيـــب غير مهم فـــي هـــذه الحالـــة؛ لأنَّ جميع الطـــلاب أعضاء فـــي اللجنة):

مبدأ العَدِّ الأساسي $n(B) = {}_{16}P_2 \times {}_{14}C_3$

باستعمال الآلة الحاسبة $= 87360$

رموز الرياضيات

الرمزان الآتيان مُتكافِئان:

$P(n,r) \cong {}_nP_r$

$\binom{n}{r} \cong {}_nC_r$

الخطوة 4 : أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال $p(\mathrm{B}) = \frac{n(\mathrm{B})}{n(\Omega)} = \frac{87360}{142506}$

بالتبسيط ≈ 0.61

أتحقَّق من فهمي

عائلة تضم 6 أولاد و3 بنات، أرادت الأم اختيار 4 منهم لتحضير وجبة العشـــاء. أجد احتمال كلٍّ ممّا يأتي:

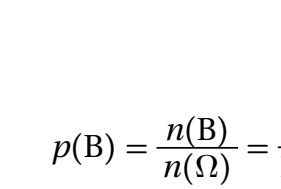
a) اختيار 2 من الأولاد، و2 من البنات.

b) اختيار ولد لإعداد الشـــاي، وولد لطهـــي الطعام، وبنتين لتجهيز المائدة.

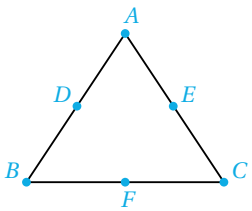
أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

1 **مسرح:** أرادت منار وحليمة حضور مسرحية، فاختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف الأمامي الذي يحوي 12 مقعدًا. ما احتمال أنْ تجلسا على مقعدين متجاورين؟

2 **لوحة مركبـــة:** تتألَّف لوحـــة المركبة فـــي الأردن من رمز خاص بـــإدارة ترخيص المركبات، مُكوَّن من رقمين يُكتَبان أعلى اللوحة، ويُمثِّلان رمزًا مشـــتركًا لمركبات عِدَّة، ومن 5 أرقـــام من بين الأرقام 0 إلى 9 خاصة بـــكل مركبة. إذا اختيرت مركبة عشوائيًّا رمزها المشـــترك 24، فما احتمال أنْ يكون رقمها 45779؟ (إرشاد: لا يجوز أنْ تكون خانات اللوحة كلها أصفارًا).



3 **هندســـة:** في الشكل المجاور، إذا اختيرت ثلاث نقاط عشـــوائيًّا، فما احتمال أنْ تكون هذه النقاط على استقامة واحدة؟



4 علبة أقلام فيها 6 أقلام حبر أزرق، و4 أقلام حبر أحمر. إذا اختير من العلبة 4 أقلام الواحد تلو الآخر عشـوائيًّا، فما احتمال اختيار قلمي حبر أزرق وقلمي حبر أحمر؟

5 **رياضة:** يدير أحد الاتحادات الرياضية مجلسًا مُكوَّنًا من 14 سيدة و 10 رجال. قرَّر الاتحاد اختيار لجنة مُصغَّرة من المجلس تضمُّ 4 أعضاء بصورة عشوائية، ويُنتخَب منها رئيس للجنة، وأمين للسر، وأمينان للصندوق. ما احتمال أنْ تتألَّف اللجنة من 3 سيدات، تتولّى إحداهن رئاسة اللجنة، ورجل واحد هو أمين سر اللجنة؟

6 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

ورد: أرادت وفاء تزيين حديقة بيتها، فاختارت عشوائيًّا 4 شتلات ورد مرة واحدة من بين 10 شتلات ورد جوري، و7 شتلات ورد قرنفل، و13 شتلة ورد فُلٍّ. ما احتمال أنْ تكون وفاء قد اختارت:

7 شتلات ورد جوري فقط؟

8 شتلات ليس من بينها ورد جوري؟

9 شتلة واحدة على الأقل من كل نوع؟

10 وعـاء فيه 4 كرات حمراء، وكرتان خضراوان، جميعها مُتماثِلة. إذا سُـحِبت منه 3 كرات عشـوائيًّا على التوالي مع الإرجاع، فما احتمال سحب كرتين خضراوين، وكرة واحدة حمراء؟

مهارات التفكير العليا

11 **مسألة مفتوحة:** أكتب سؤالًا لتجربة عشوائية يكون فيه الاحتمال $\frac{1}{{}_5C_2}$

12 **تبرير:** بلال وصالح لاعبان في فريق كرة القدم للصف الحادي عشر الذي يضم 14 لاعبًا. أراد معلِّم التربية الرياضية أنْ يُوزِّع عشـوائيًّا على كل لاعب قميصًا رياضيًّا من القمصان المُرقَّمة من 1 إلى 14. ما احتمال حصول صالح على القميص رقم 9، وحصول بلال على القميص رقم 10؟ أبرر إجابتي.

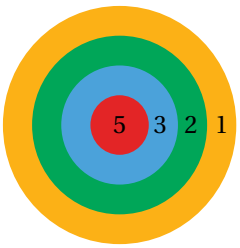
الدرس 2

المتغيرات العشوائية
Random Variables

فكرة الدرس إيجاد قِيَم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات المتغير العشوائي.

مسألة اليوم في لعبة رمي السهام، رمى كلٌّ من إبراهيم ويوسف سهمين على لوحة السهام المجاورة. كم مجموعًا مختلفًا يُمكِن أنْ يُسجِّله إبراهيم أو يوسف؟



يُطلَق على المتغير الذي يُتوصَّل إلى قِيَمه من نواتج تجربة عشوائية اسم **المتغير العشوائي** (random variable). ففي تجربة سحب كرة عشوائيًّا من كيس يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، إذا كان المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الكرات الحمراء في السحبة، فإنَّ قيمة المتغير العشوائي X قد تكون 0 في حالة سحب كرة صفراء، أو 1 في حالة سحب كرة حمراء.

أتعلَّم

إذا كانت مجموعة قِيَم المتغير العشوائي معدودة ومنتهية، فإنَّه يُسمّى متغيرًا عشوائيًّا منفصلًا. أمّا إذا كانت مجموعة قِيَم المتغير العشوائي غير معدودة وغير منتهية، فإنَّه يُسمّى متغيرًا عشوائيًّا متصلًا.

مثال 1

في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائيًّا، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فأجد مجموعة قِيَم X.

أفترض أنَّ H يعني صورة، وأنَّ T يعني كتابة. وبذلك، فإنَّ:

عناصر الفضاء العيني للتجربة: $\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$

عدد الصور المرتبط بكل عنصر: $X = \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 2$

إذن، مجموعة قِيَم المتغير العشوائي هي: $X = \{0,1,2\}$.

رموز الرياضيات

يُرمَز إلى قِيَم المتغير العشوائي بالرمز x، ويُرمَز إلى المتغير العشوائي نفسه بالرمز X.

أتحقَّق من فهمي

في تجربة إلقاء حجر نرد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد مجموعة قِيَم X.

عنـــد تحديد القِيَـــم العددية للمتغير العشـــوائي، يُمكِن أحيانًا تحديد أكبـــر قيمة وأصغر قيمة للمتغير العشوائي، ثم كتابة بقية قِيَمه بين هاتين القيمتين.

مثال 2

إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء في تجربة سحب 4 كرات عشوائيًّا معًا من كيس فيه 10 كرات زرقاء مُرقَّمة مـــن 1 إلى 10، و8 كرات خضراء مُرقَّمة من 1 إلى 8، فأجد مجموعة قِيَم X.

أفترض أنَّ B يعني كرة زرقاء، وأنَّ G يعني كرة خضراء.

أُلاحِظ أنَّ عدد عناصر Ω هو:

$$2^4 = 16$$

وهذا عدد كبير نســـبيًّا. ونظرًا إلى عـــدم الحاجة إلى رصد جميع العناصر؛ ســـأكتفي بتحديد بعضها لمعرفة قِيَم X:

$\Omega = \{(G, G, G, G), \quad \ldots \quad , (B, B, B, B)\}$ العنصر (4 خضراء)، والعنصر (4 زرقاء)

$X = \quad 0 \quad \ldots \quad 4$ عدد الكرات الزرقاء المرتبط بالعنصر

أُلاحِظ أنَّ قِيَم المتغير العشوائي X تتراوح بين 0 و4:

$(B, G, G, G) \rightarrow 1,$

$(B, B, G, G) \rightarrow 2,$ نماذج من بقية العناصر

$(B, B, B, G) \rightarrow 3$

إذن، مجموعة قِيَم المتغير العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

أتحقَّق من فهمي

في تجربة إلقاء 3 قطع نقد متمايزة عشوائيًّا، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قِيَم X.

أتعلَّم

عـــدد عناصـــر الفضاء العيني عند اختيار n من عناصـــر نوعين مختلفي اللون من الكرات هو 2^n

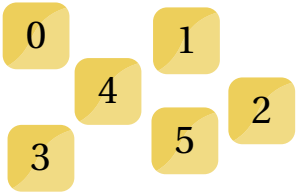
أتعلَّم

العناصـــر (G, G, G, B)، (G, G, B, G) (G, B, G, G)، (B, G, G, G) جميعهـــا متشـــابهة، وكلٌّ منهـــا يرتبط بالعدد 1

تتطلَّب بعض المواقف تحديد عناصر حادث مُعيَّن في الفضاء العيني، مرتبط بقيمة مُحدَّدة من قِيَم المتغير العشوائي في التجربة. ففي تجربة إلقاء قطعتي نقد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فإنَّ عنصر الحادث $C = \{(H, T)\}$ يرتبط بالقيمة 1، وعنصر الحادث $D = \{(T, T)\}$ يرتبط بالقيمة 0، وعنصر الحادث $E = \{(H, H)\}$ يرتبط بالقيمة 2

مثال 3

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من 0 إلى 5، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 8$.



أفترض أنَّ الحادث المطلوب هو A، فتكون عناصره هي الأزواج المُرتَّبة التي مجموع إحداثييها 8:

المجاميع المُمكِنة للعدد 8 باستعمال البطاقات $3 + 5 = 8 , 5 + 3 = 8 , 4 + 4 = 8$

عناصر الحادث A $A = \{(3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$

أُلاحِظ أنَّ المجموع 4 + 4 مُمكِن؛ لأنَّ السحب مع الإرجاع.

أتحقَّق من فهمي

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من 0 إلى 5، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.

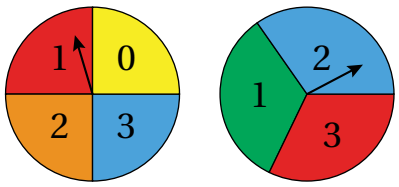
أتذكَّر

السحب من دون إرجاع يعني عدم إمكانية ظهور المسحوب أولًا في السحبة التالية.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا من البطاقات الظاهرة في الشكل المجاور، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على حاصل ضرب العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد مجموعة قِيَم X في الحالات الآتية:

1. السحب على التوالي مع الإرجاع.
2. السحب على التوالي من دون إرجاع.
3. سحب البطاقتين معًا.



إذا دُوِّر مُؤشِّرا القرصين عشوائيًّا في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مُؤشِّر عند أحد الأعداد، فأجد مجموعة قِيَم المتغير العشوائي X إذا دلَّ على:

4. مجموع العددين.
5. القيمة المطلقة للفرق بين العددين.
6. حاصل ضرب العددين.
7. في تجربة سحب 3 كرات عشوائيًّا على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 2$.
8. أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

9. **مسألة مفتوحة:** أَصِف موقفًا تكون فيه قِيَم المتغير العشوائي X: 0، 1، 2.
10. **تبرير:** في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًّا على التوالي من صندوق يحوي 3 بطاقات مُتماثِلة، كلٌّ منها مُرقَّمة بأحد الأرقام: 1, 3, 5 ، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، وكانت قِيَمه: 2, 4, 6, 8, 10، فأُحدِّد إذا كان السحب مع الإرجاع، أو من دون إرجاع، مُبرِّرًا إجابتي.
11. **تحدٍّ:** أَصِف موقفًا حياتيًّا تكون فيه بعض قِيَم المتغير العشوائي موجبة، وبعض قِيَمه الأُخرى سالبة.

الدرس 3

احتمال المتغير العشوائي
Probability of a Random Variable

فكرة الدرس إيجاد احتمالات قِيَم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات التوزيع الاحتمالي.

مسألة اليوم عند إلقاء حجري نرد متمايزين مرَّة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين، ما المجموع الذي احتماله أكبر؟

أتعلَّم

مجال التوزيع الاحتمالي هو مجموعة قِيَم المتغير العشوائي، ومداه هو مجموعة قِيَم الاحتمالات المقابلة.

التوزيع الاحتمالي (probability distribution) للتجربة العشوائية هو اقتران يربط قِيَم المتغير العشوائي باحتمالات وقوعها في التجربة، ويُرمَز إلى اقتران التوزيع الاحتمالي بالرمز $P(X)$، وقد يُكتَب في صورة $P(X = x)$.

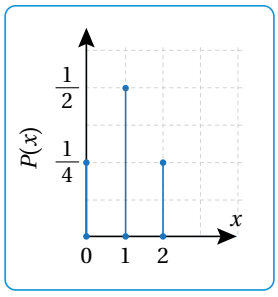
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه عند إلقاء قطعتي نقد متمايزتين مرَّة واحدة، فإنَّ قِيَم المتغير العشوائي X الذي يدل على عدد مرّات ظهور الصورة قد تكون 0، أو 1، أو 2، حيث إنَّ الفضاء العيني لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

وبذلك تكون قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4} \ , P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \ , P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

يُمكِن أيضًا التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بجدول، أو تمثيل بياني.



توزيع احتمالي

x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

أُلاحِظ أنَّ مجموع قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي (الجدول، أو التمثيل البياني) هو 1، حيث:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$$

اقتران التوزيع الاحتمالي

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا، فإنَّ مجموع قِيَم اقتران التوزيع الاحتمالي $P(X)$ هو 1

بالرموز: إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا، فإنَّ:

$$\sum P(X)=1$$

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد مرَّة واحدة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

1 **التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.**

الخطوة 1: أجد قِيَم المتغير العشوائي.

$$X=\{1,2,3,4,5,6\}$$

الخطوة 2: أجد احتمال كل قيمة من قِيَم المتغير العشوائي.

$$P(1)=\frac{1}{6}\ ,\ P(2)=\frac{1}{6}\ ,\ P(3)=\frac{1}{6}$$

$$P(4)=\frac{1}{6}\ ,\ P(5)=\frac{1}{6}\ ,\ P(6)=\frac{1}{6}$$

الخطوة 3: أُنشِئ جدولًا من صفين أُنظِّم فيه قِيَم المتغير العشوائي، والاحتمال المقابل لكلٍّ منها.

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

أُلاحِظ أنَّ مجموع الاحتمالات هو 1:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

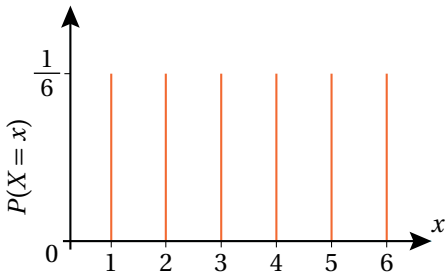
أتعلَّم

يُطلَق على التوزيع الاحتمالي الذي تكون فيه جميع الاحتمالات متساوية اسم التوزيع المنتظم.

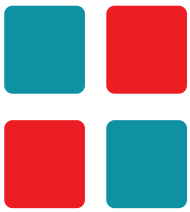
أسهم العالِم الفرنسي بليز باسكال في اكتشاف المبادئ والنظريات المُتعلِّقة بالتباديل والتوافيق في القرن السابع عشر الميلادي؛ ما أدّى إلى تطوُّر حساب الاحتمالات بصورة كبيرة.

2 **التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.**

أضع قِيَم المتغير العشوائي على المحور الأفقي، وقِيَم الاحتمال المقابلة لها على المحور الرأسي، ثم أرسم الأعمدة البيانية كما في الشكل المجاور.



أتحقَّق من فهمي



في تجربة سحب بطاقتين معًا عشوائيًّا من صندوق يحوي بطاقتين حمراوين وبطاقتين زرقاوين، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد البطاقات الزرقاء في السحبة، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

a) التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

b) التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

إنَّ معرفة مجموع احتمالات قِيَم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية تساعد على إيجاد احتمالات مجهولة، واحتمالات ضمن شروط مُحدَّدة على قِيَم المتغير العشوائي.

مثال 2

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

1 **أجد قيمة a.**

لأنَّ $\sum P(x) = 1$ $\quad 0.1 + a + 0.3 + a + 0.1 = 1$

بتجميع الحدود المتشابهة $\quad 2a + 0.5 = 1$

بطرح 0.5 من طرفي المعادلة $\quad 2a = 0.5$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\quad a = 0.25$

2 أجد $P(1 \le x < 3)$.

بتحديد قِيَم المتغير العشوائي ضمن الشرط المُحدَّد $P(1 \le x < 3) = P(x = 1) + P(x = 2)$

بتعويض قِيَم الاحتمالات $= 0.25 + 0.3$

بالجمع $= 0.55$

أتحقَّق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	b	0.2	$2b$

1 أجد قيمة b.

2 أجد $P(2 \le x \le 4)$.

أتذكَّر

لأيِّ حادث A في الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فإنَّ:

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$

يُمكِن أيضًا تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في صورة مجموعة من الأزواج المُرتَّبة التي إحداثيات x لها مجموعة قِيَم المتغير العشوائي، وإحداثيات y لها مجموعة احتمالات الحوادث المرتبطة بقِيَم المتغير العشوائي.

مثال 3

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k) , (2, k) , (3, k) , (4, k)\}$$

1 **أجد قيمة k.**

لأنَّ $\sum P(x) = 1$ $2k + k + k + k = 1$

بتجميع الحدود المتشابهة $5k = 1$

بقسمة طرفي المعادلة على 5 $k = 0.2$

2 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.2	0.2	0.2

3 أجد $P(x \leq 3)$.

بتحديد قِيَم المتغير العشوائي ضمن الشرط المُحدَّد $P(x \leq 3) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3)$

بتعويض قِيَم الاحتمالات $= 0.4 + 0.2 + 0.2$

بالجمع $= 0.8$

أتعلَّم

$P(x \leq 3) = 1 - P(x = 4)$
$= 1 - 0.2$
$= 0.8$

أتحقَّق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k), (2, 2k), (3, 3k), (4, 3k)\}$$

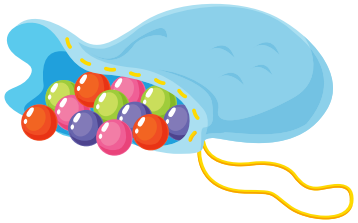
1 أجد قيمة k.

2 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

3 أجد $P(x \geq 3)$.

يُمكِن حساب احتمالات قِيَم المتغير العشوائي باستعمال مبدأ العَدِّ، والتباديل، والتوافيق.

مثال 4



في تجربة سحب 3 كرات عشوائيًّا معًا من كيس فيه 3 كرات حمراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

الخطوة 1: أجد قِيَم المتغير العشوائي.

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

الخطوة 2 : أجد احتمالات قِيَم المتغير العشوائي.

0 كرة حمراء، و3 كرات خضراء $P(x=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$

كرة حمراء واحدة، وكرتان خضراوان $P(x=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$

كرتان حمراوان، وكرة خضراء واحدة $P(x=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$

3 كرات حمراء، و0 كرة خضراء $P(x=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$

الخطوة 3 : أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ المثال 4 إذا كان السحب على التوالي بدون ارجاع.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

في تجربة إلقاء 3 قطع نقد متمايزة عشوائيًّا، دلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة:

1 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

2 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	a	0.2	a

3 أجد قيمة a.

4 أجد $P(1 < x \leq 3)$.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(0, 2k), (1, 0.5k), (2, 2k), (3, 0.5k)\}$$

5 أجد قيمة k.

6 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

7 أجد $P(x \geq 2)$.

8 في تجربة سحب كرتين عشوائيًّا على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة، إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

9 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

10 **مواعيد:** تُنظِّم محاضرة جامعية مواعيد لأربعةٍ من طلبتها المُتوقَّع تخرُّجهم، في الساعة المُخصَّصة لعملها المكتبي كل يوم خميس. وبحسب خبرتها، فإنَّ عدد مَنْ يتأخَّرون عن موعد الساعة المكتبية من هؤلاء الطلبة يُمكِن تمثيله بمتغير عشوائي X، وإنَّ التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي هو كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.25	$4k$	$2k$	k

أجد احتمال تأخُّر اثنين من هؤلاء الطلبة – على الأقل – عن موعد الساعة المكتبية يوم الخميس.

مهارات التفكير العليا

11 **تحدٍّ:** أجد قيمة k إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 0.1x), (2, 0.1x), (3, 0.1x), (4, k)\}$$

12 **تحدٍّ:** أجد المنوال للتوزيع الاحتمالي إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

13 **أكتب:** أيُّ طرائق التعبير عن التوزيع الاحتمالي أفضل؟ أُبرِّر إجابتي.

الدرس 4

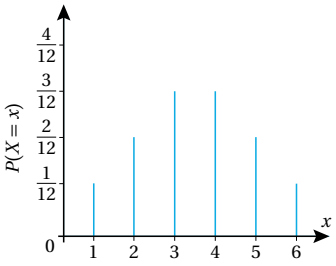
توقُّع المتغير العشوائي

Expectation of a Random Variable

فكرة الدرس إيجاد التوقُّع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

المصطلحات توقُّع المتغير العشوائي، تباين المتغير العشوائي.

مسألة اليوم مثَّلت تغريد التوزيع الاحتمالي لتجربة عشوائية كما في الشكل المجاور، ثم أرادت إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع، كيف يُمكِنها ذلك؟



تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد الوسط الحسابي $(\bar{x})$ لبيانات مُمثَّلة في جداول تكرارية؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القِيَم في تكراراتها $(\sum x.f)$ على مجموع التكرارات $(\sum f)$ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\bar{x} = \frac{\sum x.f}{\sum f}$$

وبالمثل، يُمكِن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنَّ احتمالات قِيَم المتغير العشوائي X تُمثِّل تكرارات لتلك القِيَم (تكرارات نسبية؛ نظرًا إلى قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنَّ مجموع احتمالات قِيَم المتغير العشوائي (التكرارات) هو 1، فإنَّ الوسط الحسابي هو $\sum x.P(x)$ ، في ما يُعرَف باسم **التوقُّع** (expectation) للمتغير العشوائي X، ويُرمَز إليه بالرمز $E(x)$.

لغة الرياضيات

يُطلَق على التوقُّع للمتغير العشوائي في التوزيع الاحتمالي اسم الوسط الموزون.

التوقُّع

مفهوم أساسي

بالكلمات: التوقُّع للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب كل قيمة للمتغير X في احتمال تلك القيمة.

بالرموز:

$$E(x) = \sum x.P(x)$$

مثال 1 : من الحياة

في مسح عشوائي شمل **100** سيدة من ربّات البيوت لمعرفة عدد اللواتي لديهن أجهزة حاسوب، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي:

عدد الأجهزة (x)	0	1	2	3
عدد ربّات البيوت (التكرار f)	17	42	31	10

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد أجهزة الحاسوب:

1 **أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.**

أَقسِم كل تكرار على مجموع التكرارات، ثم أُنشِئ جدولًا للتوزيع الاحتمالي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.17	0.42	0.31	0.1

أتذكَّر

ينتج الاحتمال النسبي من قسمة كل تكرار على المجموع الكلي للتكرارات.

2 **أجد التوقُّع للمتغير العشوائي X.**

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X $\quad E(x) = \sum x.P(x)$

مجاميع حاصل الضرب $\quad = 0\times0.17 + 1\times0.42 + 2\times0.31 + 3\times0.1$

بالتبسيط $\quad = 1.34$

أتحقَّق من فهمي

يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 200 أُسرة لمعرفة عدد حيواناتهم الأليفة:

عدد الحيوانات (x)	0	1	2	3
عدد الأُسر (f)	44	96	52	8

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الحيوانات الأليفة، أجد $E(x)$.

إذا عُلِمت قيمة التوقُّع $E(x)$ للمتغير العشوائي X، فإنَّه يُمكِن تحديد قِيَم احتمالات مجهولة في التوزيع الاحتمالي؛ بتكوين نظام من المعادلات الخطية، ثم حلِّه بطريقة الحذف والتعويض.

مثال 2

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	a	0.3	b	0.2	0.15

وكان $E(x)=3$، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x=3)$، و $P(x=1)$.

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X $\quad E(x)=\sum x.P(x)$

لأنَّ التوقُّع هو 3 $\quad 1\times a+2\times 0.3+3\times b+4\times 0.2+5\times 0.15=3$

بالتبسيط $\quad a+3b=0.85$ .....[1]

مجموع الاحتمالات هو 1 $\quad a+0.3+b+0.2+0.15=1$

بالتبسيط $\quad a+b=0.35$ .....[2]

بطرح المعادلة [2] من المعادلة [1] $\quad 2b=0.50$

بالقسمة على 2 $\quad b=0.25$

بالتعويض في المعادلة [2] $\quad a+0.25=0.35$

بطرح 0.25 من طرفي المعادلة $\quad a=0.10$

أيْ إنَّ:

$$P(x=1)=0.10,\ P(x=3)=0.25$$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	b	0.2	0.3

وكان التوقُّع $E(x) = 2.5$، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x = 2)$، و $P(x = 1)$.

التباين (Variance) للمتغير العشوائي X هو مقياس لتشتُّت قِيَم المتغير عن وسطها الحسابي $E(x)$، ويُمكِن إيجاده باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = (\sum x^2 . P(x)) - (E(x))^2$$

مفهوم أساسي

التباين

بالكلمات: التباين للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب مربعات قِيَم المتغير X في احتمال كل قيمة مطروحًا منه مربع التوقُّع للمتغير X.

بالرموز:

$$\sigma^2 = (\sum x^2 . P(x)) - (E(x))^2$$

أتذكَّر

الانحراف المعياري σ هو الجذر التربيعي للتباين.

مثال 3

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	0.35	0.3	0.15

1 أجد التوقُّع $E(x)$.

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي X $E(x) = \sum x.P(x)$

بكتابة مجاميع حاصل الضرب $= 1\times0.2 + 2\times0.35 + 3\times0.3 + 4\times0.15$

بالتبسيط $= 2.4$

2 أجد التباين σ^2.

صيغة التباين للمتغير العشوائي X $\sigma^2=(\sum x^2.P(x))-(E(x))^2$

بالتعويض $= 1^2\times0.2 + 2^2\times0.35 + 3^2\times0.3 + 4^2\times0.15 - (2.4)^2$

بالتبسيط $= 0.94$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	0.4	0.35	0.15

فأجد التوقُّع $E(x)$، والتباين σ^2.

أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

1 **يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 50 طالبًا من إحدى المدارس لمعرفة عدد ساعات الدراسة في يوم الإجازة:**

عدد ساعات الدراسة (x)	1	2	3	4	5
عدد الطلبة (f)	4	12	20	8	6

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الساعات، أجد $E(x)$.

2 **إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:**

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	0.13	0.27	a	b	0.22	a

وكان التوقُّع $E(x) = 0.39$، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x = 1)$، و $P(x = 0)$.

يتكوَّن مجلس الطلبة في إحدى الجامعات من 8 طلاب و12 طالبة، وقد اختاروا عشوائيًّا لجنة تضم اثنين منهم للاجتماع مع مُمثِّلين عن رئاسة الجامعة. إذا دلَّ المتغير العشوائي X على عدد الطالبات في اللجنة المختارة، فأُجيب عن الأسئلة الآتية:

3 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي.

4 أجد التوقُّع لعدد الطالبات في اللجنة المختارة.

5 أجد التباين للتوزيع الاحتمالي.

6 أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

7 **تحدٍّ:** ما قيمة σ^2 للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول الآتي إذا كان $E(x) = 5.95$؟

x	2	5	a	8
$P(x)$	0.1	b	0.2	0.35

8 **تحدٍّ:** إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, kx), (2, \frac{1}{8}), (3, \frac{1}{8}), (4, kx), (5, \frac{1}{8}), (6, \frac{1}{8})\}$$

فما قيمة التوقُّع للمتغير X؟

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 رُتِّبت الأحرف: ر، ط، م عشوائيًّا في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة (مطر) هو:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{2}$

2 رُتِّبت الأحرف: R, E, D, E عشوائيًّا في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة ($DEER$) هو:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{24}$

3 احتمال اختيار 2 من الرجال و3 من النساء عشوائيًّا من بين 5 موظفين و5 موظفات في إحدى الشركات لحضور مؤتمر علمي هو:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}$

c) $\frac{50}{63}$ d) $\frac{25}{63}$

4 سحب علي 4 كرات معًا عشوائيًّا من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات زرقاء، و3 كرات صفراء، و3 كرات خضراء، وكانت جميع الكرات التي في الصندوق مُتماثِلة. احتمال أنْ تكون 2 من الكرات المسحوبة من لون واحد، وبقية الكرات من لون آخر هو:

a) $\frac{12}{55}$ b) $\frac{9}{55}$

c) $\frac{4}{55}$ d) $\frac{8}{55}$

يُبيِّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3	5
$P(x)$	$2k$	k	k	k

5 قيمة k هي:

a) 0.1 b) 0.2

c) 0.3 d) 0.4

6 قيمة $E(x)$ هي:

a) 1.2 b) 1.4

c) 2.4 d) 1

7 قيمة σ^2 هي:

a) 2.24 b) 2.4

c) 8 d) 5.76

8 قيمة $P(x < 3)$ هي:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$

9 يُبيِّن الجدول الآتي نتائج مسحٍ شمل 60 يومًا متتاليًا، وقد دَوَّن قيس في كلٍّ منها عدد رسائل البريد الإلكتروني التي وصلته:

عدد الرسائل (x)	0	1	2	3	4
عدد الأيام (f)	8	12	10	18	12

بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد الرسائل، أجد $E(x)$.

صندوق فيه 3 كرات زرقاء، و6 كرات خضراء، جميعها مُتماثِلة. سُحِبت من الصندوق 3 كرات على التوالي من دون إرجاع، ودلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة:

10 أُنشِئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

11 أجد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة على الأقل.

12 يُبيِّن الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X، حيث $E(x) = \frac{5}{12}$. أجد قيمة كلٍّ من: a، وb.

x	-1	0	1	2
$P(x)$	a	$4b$	$2b$	a

تدريب على الاختبارات الدولية

يحتوي كيس على 8 كرات زجاجية حمراء، و4 كرات زجاجية خضراء، جميعها مُتماثِلة. إذا سُحِب من الكيس 6 كرات عشوائيًّا دفعة واحدة فما احتمال:

13 أنْ تكون 4 من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

14 أنْ تكون 4 على الأقل من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

X متغير عشوائي، وله التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-2	3
$P(x)$	a	$1 - a$

15 أُثبِت أنَّ $\sigma^2 = 25\, a(1-a)$.

16 إذا كان $E(x) = 2$، فما قيمة σ؟