



الرياضيات

الصف الحادي عشر

للفرعين
العلمي والصناعي

الرياضيات

الصف الحادي عشر

للفرعين العلمي والصناعي

٢٠١٩هـ / ١٤٤٠م



المنور
مطبعة



الرياضيات

الصف الحادي عشر

الفرعين
العلمي والصناعي

الناشر

وزارة التربية والتعليم

إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال ملاحظاتكم وآرائكم على هذا الكتاب على العناوين الآتية

هاتف: ٤٦١٧٣٠٤/٥٠٨ فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩ ص.ب. (١٩٣٠) الرمز البريدي: ١١١١٨

أو على البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في جميع مدارس المملكة الأردنية الهاشمية بموجب قرار مجلس التربية والتعليم رقم ٢٠١٦/١٢ تاريخ ٢٠١٦/١/١٢ اعتباراً من العام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧ م

الحقوق جميعها محفوظة لوزارة التربية والتعليم عمان / الأردن - ص . ب (١٩٣٠)

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٦/٣/١٢٧٣)
ISBN: 978 - 9957 - 84 - 747 - 0

أشرف على تأليف هذا الكتاب كلٌّ من:

أ.د. وصفي أحمد شطناوي
أ.د. عبد الله محمد ربابعة
أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. ربي محمد مقدادي
عصام سليمان الشطناوي (مقرراً).

وقام بتأليفه كلٌّ من:

إبراهيم أحمد عمارة
د. حسان عبده ربابعة
محاسن أحمد محسن
نهاد أحمد الشوحة

التحرير العلمي: عصام سليمان الشطناوي

التحرير اللغوي: ميساء عمر الساريسي
التحرير الفني: نداء فؤاد أبوشنب
التصميم: زياد عدنان مهيار
الرسم: عمر أحمد أبو عليان
التصوير: أديب أحمد عطوان
الإنجاز: د. عبد الرحمن سليمان أبو صعيك

دقق الطباعة: هبة ماهر التميمي
راجعها: نقين أحمد جوهر

٢٠١٦ هـ / ١٤٣٧ م

٢٠١٧ - ٢٠١٩ م

الطبعة الأولى

أعيدت طباعته

الفصل الدراسي الأول

٨

الوحدة الأولى: المعادلات و المتباينات

١٠

الفصل الأول: كثيرات الحدود

١٠

أولاً: قسمة كثيرات الحدود

١٥

ثانياً: نظرية الباقي و العامل

٢٠

ثالثاً: تحليل كثيرات الحدود

٢٤

الفصل الثاني: الاقترانات النسبية

٢٨

الفصل الثالث: حلُّ المعادلات و المتباينات

٢٨

أولاً: حل المعادلات الجبرية بمتغير واحد

٣٤

ثانياً: المتباينات غير الخطية بمتغير واحد

٤٠

ثالثاً: الكسور الجزئية

٤٥

أسئلة الوحدة

٤٨

الوحدة الثانية: الاقترانات

٥٠

الفصل الأول: كثيرات الحدود

٥٨

الفصل الثاني: الاقتران الحقيقي

٧٠

الفصل الثالث: اقترانات خاصة

٧٠

أولاً: الاقتران المتشعب

٧٦

ثانياً: اقتران القيمة المطلقة

٨٥

ثالثاً: اقتران أكبر عدد صحيح

٩٤

الفصل الرابع: العمليات على الاقترانات

٩٤

أولاً: تركيب الاقترانات

١٠٠

ثانياً: الاقتران العكسي

١٠٨

أسئلة الوحدة

١١٢

الوحدة الثالثة: المتتاليات و المتسلسلات الحسابية و الهندسية

١١٤

الفصل الأول: المتتاليات و المتسلسلات

١١٤

أولاً: المتتالية

١٢١

ثانياً: المتسلسلة

١٢٥

الفصل الثاني: المتتاليات و المتسلسلات الحسابية

١٢٥

أولاً: المتتالية الحسابية

١٣١	ثانيًا: مجموع المتسلسلة الحسابية
١٣٥	الفصل الثالث: المتتاليات والمتسلسلات الهندسية
١٣٥	أولاً: المتتالية الهندسية
١٤٢	ثانيًا: مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية
١٤٥	ثالثًا: مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية
١٤٨	أسئلة الوحدة

الفصل الدراسي الثاني

١٥٢	الوحدة الرابعة: الاقترانات المثلثية
١٥٤	الفصل الأول: التقدير الدائري والقياس الستيني
١٦٢	الفصل الثاني: قوانين الاقترانات المثلثية
١٧٥	الفصل الثالث: اقترانات (الجيب، جيب التمام، الظل)
١٨٧	الفصل الرابع: المعادلات والمتطابقات المثلثية
١٨٧	أولاً: المتطابقات المثلثية (١)
١٩٧	ثانيًا: المتطابقات المثلثية (٢)
٢٠٣	ثالثًا: حل المعادلات المثلثية
٢٠٨	أسئلة الوحدة
٢١٢	الوحدة الخامسة: الاقترانات الأسية واللوغاريتمية
٢١٤	الفصل الأول: الاقترانات والمعادلات الأسية
٢١٤	أولاً: الاقترانات الأسية
٢٢٩	ثانيًا: المعادلات والمتطابقات الأسية
٢٣٦	الفصل الثاني: الاقترانات والمعادلات اللوغاريتمية
٢٣٦	أولاً: الاقترانات اللوغاريتمية
٢٥٦	ثانيًا: قوانين اللوغاريتمات
٢٦٩	ثالثًا: المعادلات والمتطابقات اللوغاريتمية
٢٧٧	أسئلة الوحدة
٢٨٢	الوحدة السادسة: طرائق العد
٢٨٤	الفصل الأول: مبدأ العد
٢٩٠	الفصل الثاني: المضروب
٢٩٤	الفصل الثالث: التباديل
٣٠١	الفصل الرابع: التوافيق
٣٠٨	أسئلة الوحدة

تمَّ إعداد كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي للفرعين العلمي، والصناعي بما ينسجم مع التوجهات العالمية في تطوير منهاج الرياضيات، وقد أُعدَّ المحتوى وفق معايير عالمية تتضمن معايير عمليات ومعايير محتوى مثل التواصل والربط والتمثيل والتفكير الناقد وحلّ المشكلات.

يتكون الكتاب من فصلين دراسيين، يحتوي الفصل الدراسي الأول على ثلاث وحدات دراسية؛ فالوحدة الأولى قدّمت مفهوم المعادلات والمتباينات وحلّها، وأما الثانية فقدّمت اقترانات متنوعة مثل اقتران القيمة المطلقة والاقترانات المتشعبة والاقترانات الكسرية، أما الوحدة الثالثة قدّمت المتتاليات والمتسلسلات التي لها تطبيقات عملية مهمة في العديد من المجالات الحياتية والعلوم الأخرى.

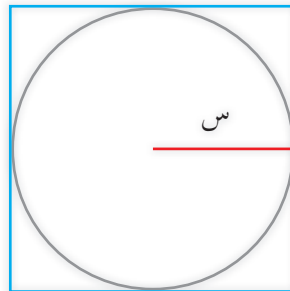
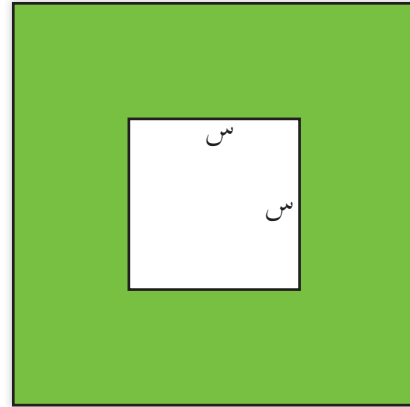
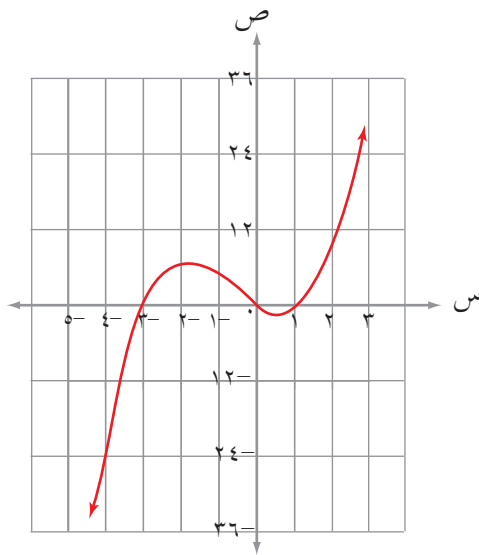
أما الفصل الدراسي الثاني فقد احتوى على ثلاث وحدات دراسية؛ حيثُ تناولت الوحدة الرابعة الاقترانات المثلثية التي تم التركيز فيها على حسابات المثلثات وتطبيقاتها وتمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً، والوحدة الخامسة قدّمت الاقترانات الأسية واللوغاريتمية، أما الوحدة السادسة فقد تناولت طرائق العد وموضوعاتها المختلفة، من مضروب العدد الموجب والتباديل والتوافيق وتطبيقاتها المتنوعة في الحياة.

نسأل الله العلي العظيم أن نكون قد وفقنا في تقديم هذا الكتاب ليكون نافعا ومفيدا.

الفصل الدراسي الأول



تُستخدم المتباينات بصور مختلفة في حياتنا مثلَ حدود السرعة المسموح بها على الطرق، و عدد الرسائل المجانية الشهرية التي يسمح لك بإرسالها من هاتفك الخليوي، وأقصى ارتفاع لسيارة يمكنها المرور تحت جسر. وتُستخدم المعادلات في حل تلك المتباينات وفي تطبيقات حياتية اقتصادية كثيرة. إن معرفة تفسير لغة المتباينات والمعادلات خطوة مهمة نحو تعلم كيفية حلها وتبرير الإجابات في سياق المسألة الحياتية. في هذه الوحدة سوف تتعرف على نظريات تساعدك في حلّ المعادلات ذات الدرجات العليا، وتستخدمها في حل متباينات غير خطية.



Equation and Inequalities

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرا على:

- تعرّف نظريتي الباقي والعامل ، واستخدامهما في تحليل كثيرات الحدود وإيجاد أصفارها.
- إيجاد صيغ مكافئة لتعابير نسبية ، كلٌّ من بسطها ومقامها كثيرات حدود.
- حلّ معادلات غير خطية بالتحليل والرسم البياني .
- حلّ مسائل حياتية تتعلق بكثيرات الحدود ، وتبرير الحل.
- حلّ متباينات غير خطية بمتغير واحد حتى الدرجة الثالثة.

النتائج

- تُقسَّم كثيرات الحدود.
- تتعرف نظرية الباقي والعامل.
- تستخدم نظرية الباقي والعامل في تحليل كثيرات الحدود وإيجاد أصفارها.
- تحلل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية.

Division of Polynomials

أولاً: قسمة كثيرات الحدود

قدّرت شركة تكلفة إنتاج س من الوحدات بكثير الحدود $٠,٣س + ٢س + ٤س + ١٠٠٠$ دينار. اكتب تعبيراً جبرياً يمثل متوسط التكلفة للوحدة الواحدة.

تعلمت كيفية قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر. درجته أقل من أو تساوي درجة المقسوم باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة، كما في المثال الآتي:

مثال (١)

جد خارج وباقي قسمة $٤س^٢ + ٥س^٣ - ٧$ على $٣س^٢ + ٣س - ١$. ثم تحقق من صحة الحل.

الحل

استخدم خوارزمية القسمة الطويلة باتباع الخطوات الآتية:

$$\begin{array}{r}
 ١١-س٥ \\
 ٣س^٢+٣س-١ \overline{) ٥س^٣+٤س^٢-٧} \\
 \underline{٥س^٣+١٥س^٢-٥س} \quad \ominus \\
 ٧س^٢-١١س-٧ \\
 \underline{٧س^٢+٢١س-١١} \quad \ominus \\
 ٣٣س-١٨
 \end{array}$$

(١) رتب حدود الاقترانين تنازلياً حسب قوى س.

(٢) اقسّم الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه، وضع الناتج حدّاً أولاً في خارج القسمة.

(٣) اضرب المقسوم عليه بالناتج الذي حصلت عليه في الخطوة (٢) واطرح الناتج.

(٤) كرر الخطوتين (٢)، (٣) حتى تحصل على باقي درجته أقل من درجة المقسوم عليه.
خارج القسمة هو ٥ س - ١١ وباقي القسمة ٣٨ س - ١٨.

التحقق من صحة الحل:

$$(٥ س - ١١) (٣ س + ٢ س - ١) + (٣٨ س - ١٨) = ٥ س + ٣ س - ٢ س - ٧$$

يمكنك فك الطرف الأيمن من المعادلة وتبسيطه لتحصل على الطرف الأيسر.

تدريب (١)

استخدم خوارزمية القسمة الطويلة لإيجاد خارج قسمة وباقي ق(س) = ٣ س - ٦ س + ٤
على هـ(س) = ٢ س - ٢

فكر وناقش

ما العلاقة بين درجة المقسوم و درجة المقسوم عليه و درجة خارج القسمة؟

تذكر

لأي عددين صحيحين موجبين ب، جـ يوجد عددان وحيدان غير سالبين م، ر
بحيث ب = م جـ + ر حيث $٠ \leq ر < جـ$
يسمى م خارج قسمة العدد ب على العدد جـ ويسمى ر باقي القسمة؛ فمثلاً $٧٢ = ١٤ \times ٥ + ٢$

من الآن فصاعداً عندما نقول كثير حدود فإننا نعني اقتراناً كثير حدود.
وكما هو الحال في الأعداد الصحيحة الموجبة يمكن الربط بين كثيرات الحدود بالشكل الآتي:

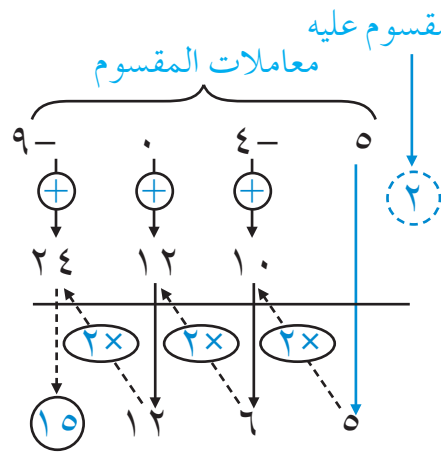
إذا كان ق، هـ كثيري حدود، فيوجد كثيرا حدود وحيدان ك، ر بحيث يكون:
ق(س) = ك(س) × هـ(س) + ر(س) حيث $٠ \leq ر(س) < هـ(س)$ ، وأن
درجة ق = درجة ك + درجة هـ

لقد استخدمت خوارزمية القسمة الطويلة لقسمة كثيرات الحدود في المثال والتدريب السابقين. وهناك طريقة أخرى مختصرة لقسمة كثير حدود على كثير حدود بشرط أن يكون المقسوم عليه على الصورة (س - أ) وتسمى هذه الطريقة طريقة **القسمة التركيبية** (Synthetic Division) والأمثلة الآتية توضحها.

مثال (٢)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة $ق(س) = ٥س^٣ - ٤س^٢ - ٩س + ٥$ على $هـ(س) = ٢س - ١$

الحل



(١) رتب معاملات حدود المقسوم تنازليا حسب قوى س
وضَع صفرا معاملا للحد غير الموجود، واكتب
صفرا المقدار (س - ٢) إلى اليمين.

(٢) أنزل معامل الحد الأول (٥) واضربه في العدد (٢)
واكتب الناتج تحت المعامل الثاني ثم اجمع.

(٣) كرر عملية الضرب والجمع إلى آخر معامل، فتكون الأعداد الأول والثاني والثالث هي
معاملات حدود خارج القسمة والعدد الأخير هو الباقي.
إذن خارج القسمة هو $٥س^٢ + ٦س - ١٥$ والباقي ١٥

تدريب (٢)

جد خارج وباقي قسمة $ق(س) = ٣س^٢ - ٢س + ١$ على $هـ(س) = ١س + ١$
باستخدام القسمة التركيبية

إذا كان ق، هـ كثيري حدود، وكان هـ(س) $\neq ٠$ فإن: $\left(\frac{ق}{هـ}\right) (س) = \frac{ق(س)}{هـ(س)}$

مثال (٣)

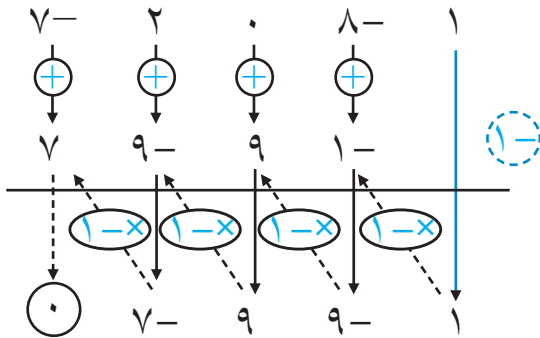
إذا كان ق(س) = $8س - ٤س + ٢س - ٧$ ، هـ(س) = $١ + س$ فجد

(ق/هـ) (س) باستخدام القسمة التركيبية.

الحل

باتباع الخطوات السالفة الذكر في مثال (٢) ينتج أنَّ

$$(ق/هـ) (س) = ٧ - ٩س + ٢س٩ - ٣س = ٧ - ٩س$$



تدريب (٣)

إذا كان ق(س) = $٨س + ٢س - ٤س + ٨$ ، هـ(س) = $٢ + س$ فجد كلاً مما يأتي:

$$(١) (ق/هـ) (س) \quad (٢) (ق/هـ) (١)$$

نشاط

طلب معلم من كل طالب من طلابه تنفيذ نشاطٍ باتّباع الخطوات الآتية :

(١) اختر عدداً غير العدد ٢ ثم اضربه في ٣ .

(٢) اجمع الناتج الذي حصلت عليه في الخطوة (١) إلى ناتج جمع العدد الذي اخترته مع ٨ .

(٣) اقسم الناتج الذي حصلت عليه في الخطوة (٢) على ناتج جمع العدد الذي اخترته مع ٢ واحتفظ بالإجابة .

بعد الانتهاء، قال المعلم لطلابه: جميعكم حصل على الناتج ٤ .

وضح باستخدام الرموز كيف عرف المعلم النتيجة ، ولماذا كانت موحدة عند الجميع ؟
(إرشاد: افرض أنَّ العدد الذي اخترته س)

تمارين و مسائل

(١) إذا كان ق(س) = س^٥ - ٦س^٣ + ٢س^٢ + ٨س - ٤ ، هـ(س) = س^٢ - س + ٢ ، فجد كلاً مما يأتي :

أ ($\frac{ق}{هـ}$) (س) ب ($\frac{ق}{هـ}$) (٣)

(٢) جد خارج وباقي قسمة كثير الحدود ق على كثير الحدود هـ في كل مما يأتي :

أ (ق(س) = س^٣ - ٦س^٢ - ٤ ، هـ(س) = س^٢ + ١ ،
ب (ق(س) = س^٥ - ٣٢ ، هـ(س) = س - ٢ ،

(٣) استخدم القسمة التركيبية في إيجاد خارج وباقي قسمة كثير الحدود ق على كثير الحدود هـ إذا كان :

أ (ق(س) = س^٤ - ٦س^٣ + ٥س^٢ + ١ ، هـ(س) = س - ٣ ،
ب (ق(س) = س^٣ - ٨س^٢ + ٤س - ١٠ ، هـ(س) = س + ١ ،

(٤) سجادة مستطيلة الشكل مساحتها تُعطى بالاقتران ق(س) = (س^٣ + ٣س^٢ + ٦س + ١) م^٢. إذا كان طول السجادة (س + ٤) م فجد عرضها بدلالة س.

تعلمت في الدرس السابق إيجاد خارج وباقي قسمة اقتران كثير حدود على اقتران كثير حدود آخر. ستتعرف في هذا الدرس طريقة مختصرة لإيجاد باقي قسمة كثير الحدود ق على كثير الحدود هـ (س) = س - أ دون إجراء عملية القسمة ، كما ستتعلم طريقة للكشف عن عوامل كثير حدود معطى .

مثال (١)

إذا كان ق (س) = $3س^2 - 8س + 9$ ، هـ (س) = $س - 2$ جد كلاً مما يأتي :

(١) باقي قسمة ق على هـ .

(٢) ق (٢) .

الحل

(١) بإجراء خطوات القسمة التركيبية فإن باقي قسمة ق على هـ

يساوي ٥ .

(٢) ق (٢) = $3(2)^2 - 8(2) + 9 = 5$.

ماذا تلاحظ؟



جد باقي قسمة ق على هـ في المثال (١) باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة .

نشاط

جد باقي قسمة ق على هـ لكل مما يأتي، ثم جد قيمة الاقتران ق عند النقطة المحددة.

(١) ق (س) = $س^4 - 8س^2 + 4س + 1$ ، هـ (س) = $س - 2$ ، عند س = ٢

(٢) ق (س) = $س^3 - 6س - 5$ ، هـ (س) = $س + 1$ ، عند س = -١ .

(٣) ق (س) = $س^2 + 3س - 4$ ، هـ (س) = $2س - 1$ ، عند س = $\frac{1}{2}$.

ماذا تلاحظ ؟

باقي قسمة كثير الحدود ق على كثير الحدود هـ حيث هـ (س) = س - أ يساوي ق (أ).

البرهان

من خوارزمية القسمة

$$ق(س) = (س - أ) ك(س) + ر(س)$$

لكن درجة ر(س) أقل من درجة (س - أ). إذن ر(س) اقتران ثابت

$$افرض ر(س) = جـ$$

$$ق(س) = (س - أ) ك(س) + جـ$$

$$عند س = أ، ق(أ) = (أ - أ) ك(أ) + جـ = جـ$$

أي أن ق(أ) يساوي باقي قسمة ق على هـ.

وبشكل عام، باقي قسمة ق على هـ (س) = أس + ب هو ق (ب - أ)، $أ \neq ٠$.

لاحظ أن $\frac{ب}{أ}$ تمثل صفر الاقتران هـ.

مثال (٢)

جد باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران هـ باستخدام نظرية الباقي لكل مما يأتي:

$$(١) ق(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٤س - ٣، هـ(س) = س^٣ - ٣س$$

$$(٢) ق(س) = س^٤ - ٥س^٣ - ٦س^٢، هـ(س) = س^٢ - ٢س$$

$$(٣) ق(س) = ٤س^٢ - ٦س + ٥، هـ(س) = ٢س - ١$$

الحل

(١) صفر الاقتران هـ هو ٣.

$$ق(٣) = ٣^٣ - ٢ \times ٣^٢ + ٤ \times ٣ - ٣ = ٢٧ - ١٨ + ١٢ - ٣ = ١٦$$

باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران هـ يساوي ١٦.

(٢) صفر الاقتران هـ هو ٢ .

$$٠ = ٦ - ١٠ - ١٦ = ٦ - ٢ \times ٥ - ٤٢ = (٢) ق$$

باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران هـ يساوي صفرًا.

(٣) صفر الاقتران هـ هو $\frac{1}{٢}$.

$$٣ = ٥ + ٣ - ١ = ٥ + \frac{1}{٢} \times ٦ - ٢ \left(\frac{1}{٢} \right) \times ٤ = \left(\frac{1}{٢} \right) ق$$

باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران هـ يساوي ٣ .

تدريب (١)

استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران هـ في ما يأتي:

$$(١) ق(س) = س٣ - ٤س٢ - ٧ ، هـ(س) = س٢ + ٢$$

$$(٢) ق(س) = س٣ - ٣س٢ + ٢ ، هـ(س) = س - ١$$

لاحظ في الفرع (٢) من مثال (٢) أن باقي قسمة ق على هـ يساوي صفرًا.

من تعريف عملية القسمة :

ق(س) = (س - ٢) ك(س). أي أن (س - ٢) عامل من عوامل ق، وهذا يساعدنا في

الكشف عن عوامل كثير حدود كما في النظرية الآتية:

نظرية العامل

(س - أ) عامل من عوامل كثير الحدود ق إذا وفقط إذا كان ق(أ) = صفرًا.

البرهان

أولاً: إثبات الاتجاه الأول من النظرية:

إذا كان (س - أ) عاملاً من عوامل ق فإن ق(أ) = صفرًا.

بما أن (س - أ) عاملاً من عوامل ق ، إذن ق يقبل القسمة على (س - أ) دون باقي.

أي أن ق(أ) = صفرًا.

ثانيًا: إثبات الاتجاه العكسي من النظرية:

إذا كان $ق(أ) = صفرًا$ فإن $(س - أ)$ عاملاً من عوامل $ق$.

$$ق(س) = (س - أ) ك(س) + ر(س)$$

$$لكن ر(س) = ق(أ) = صفرًا$$

$$إذن ق(س) = (س - أ) ك(س)$$

أي أن $(س - أ)$ عاملٌ من عوامل $ق$.

من خوارزمية القسمة
من نظرية الباقي والفرص

مثال (٣)

باستخدام نظرية العامل أجب عن كلٍّ مما يأتي:

$$(١) \text{ بيّن أن هـ } (س) = س - ١ \text{ عاملاً من عوامل } ق(س) = ٨س^٣ - ٨.$$

$$(٢) \text{ إذا كان هـ } (س) = س + ٢ \text{ عاملاً من عوامل } ق(س) = ٣س^٣ + ٢س^٢ + ب س - ٢، \text{ فجد قيمة الثابت ب.}$$

الحل

$$(١) \text{ صفر الاقتران هـ هو } ١، ق(١) = ٨ \times ١ - ٨ = صفرًا$$

حسب نظرية العوامل

$$إذن (س - ١) عاملاً من عوامل $ق$$$

$$(٢) \text{ صفر الاقتران هـ هو } -٢، بما أن هـ (س) = س + ٢ عاملاً من عوامل $ق(س)$ ،$$

حسب نظرية العوامل

$$إذن $ق(-٢) = صفرًا$$$

$$٠ = ٢ - ٢ - ب + ٢(-٢) + ٣(-٢)$$

$$-٨ + ٤ - ٢ب = صفرًا$$

$$-٢ب = ٦ \text{ ومنه } ب = -٣$$

تدريب (٢)

إذا كان هـ $(س) = س + ١$ عاملاً من عوامل كثير الحدود

$ق(س) = ٣س^٢ + ٢س - ٨$ ، فجد قيمة الثابت $أ$.

تمارين و مسائل

(١) استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة الاقتران ق على الاقتران هـ في ما يأتي :

أ (ق(س) = $س^3 - ٤س^٢ + ٣س$ ، هـ(س) = $س + ١$

ب (ق(س) = $س^٣ - ٤س^٢ + ٢س + ٤$ ، هـ(س) = $س^٢ - ١$

ج (ق(س) = $س^٩ - ٢س^٣ + ٨س - ٨$ ، هـ(س) = $س^٣ - ٢$

(٢) بين إذا كان ل عاملاً من عوامل ق في كلٍّ مما يأتي :

أ (ق(س) = $س^٢ + ٣س + ٥٤$ ، ل(س) = $س + ٣$

ب (ق(س) = $س^٢ - ٤س - ٣٢$ ، ل(س) = $س - ٢$

ج (ق(س) = $س^٤ - ٤س^٣ - ٣س^٢ + ٥س - ٢$ ، ل(س) = $س - ٢$

(٣) جد قيمة الثابت أ التي تجعل العبارات الآتية صحيحة :

أ ((س - ١) عاملاً من عوامل ق(س) = $س^٤ - ٣س^٣ + ٢س^٢ + أس - ٦$

ب (باقي قسمة ق(س) = $أس^٢ + (٣ + أ)س + ٤$ على هـ(س) = $س + ٢$ يساوي ٨

(٤) متوازي مستطيلات حجمه (س^٣ - ٨س + أ) وحدة مكعبة ، جد قيمة الثابت أ التي تجعل (س - ١) بُعداً من أبعاده.

(٥) إذا كان ق(س) = س^ن - أن حيث ن ∈ ط ، أ ≠ ٠ ، أثبت أنه :

أ (عندما يكون ن عددا زوجيا فإن (س - أ) و (س + أ) عاملان من عوامل ق.

ب (عندما يكون ن عدد فرديا فإن (س - أ) عاملٌ من عوامل ق.

بنائةً على شكل متوازي مستطيلات حجمها $s^3 + 2s^2 - 4s - 8$ وحدة مكعبة. إذا كان أحد أبعاد البناية (س - ٢) وحدة فجد بعديها الآخرَين بدلالة س.

درست سابقاً تحليل مقادير جبرية إلى عواملها الأولية وبطرق مختلفة مثل:

س٢ - ٢٥ فرق بين مربعين

س٣ + ٨ مجموع مكعبين

س٢ + ٣س - ٤ عبارة تربيعية

س٦ - ٦٤ فرق بين مربعين وفرق بين مكعبين.

كما درست نظريتي الباقي والعامل.

في هذا الدرس سوف تستخدم ما تعلمته سابقاً في تحليل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية إضافة إلى طرق جديدة لتحليل كثيرات حدود ذات درجات عليا.



(١) يكون المقدار الجبري عاملاً أولياً إذا لم يمكن تحليله إلى مقدار جبري أقل منه درجة، وبشكل عام تكون العوامل الأولية لاقتارات كثيرات الحدود إما خطية، أو تربيعية مميزها عدد سالب.

(٢) مميز المعادلة التربيعية $اس^٢ + بس + ج = ٠$ ، $٠ \neq ٠$ هو: $ب^٢ - ٤أج$

قد تواجه صعوبة في البحث عن أصفار اقتران كثير الحدود من الدرجة الرابعة أو الخامسة أو درجات أخرى أعلى، لذلك لا بد من طريقة سهلة توفر الوقت والجهد في البحث عن هذه الأصفار.

نظرية الأصفار النسبية لكثير الحدود Rational Zero Theorem

ليكن $ق(س) = اُن س^n + ا_{ن-١} س^{ن-١} + ... + ا_١ س + ا_٠$ حيث $ا_٠ \neq ٠$ كثير حدود جميع معاملاته أعداد صحيحة. إذا كان العدد النسبي $(\frac{ب}{ج})$ صفراً من أصفار الاقتران ق فإن (ب) عامل من عوامل الحد الثابت (أ.)، ج عامل من عوامل المعامل الرئيس (أن).

جد جميع الأصفار النسبية المحتملة لكل من الاقتارات الآتية.

$$(١) \text{ ق (س) } = ٣ \text{ س} - ٤ \text{ س} + ٢ \text{ س} - ٩ \text{ س} - ٦$$

$$(٢) \text{ ل (س) } = ٣ \text{ س} + ٥ \text{ س} - ٢ \text{ س} - ٣ \text{ س} + ١٤$$

الحل

(١) إذا كان $\left(\frac{ب}{ج}\right)$ صفراً من أصفار ق (س) فإن (ب) عامل من عوامل -٦، ج عامل من عوامل (٣).

قيم ب هي: $١ \pm, ٢ \pm, ٣ \pm, ٦ \pm$

قيم ج هي: $١ \pm, ٣ \pm$

$$\text{إذن قيم } \left(\frac{ب}{ج}\right) = ١ \pm, \frac{١}{٣} \pm, ٢ \pm, \frac{٢}{٣} \pm, ٣ \pm, ٦ \pm$$

(٢) بما المعامل الرئيس أم $= ١$ فإن الأصفار النسبية المحتملة يجب أن تكون من عوامل الحد الثابت ١٤.

إذن أصفار ل (س) النسبية المحتملة $١ \pm, ٢ \pm, ٧ \pm, ١٤ \pm$.

تدريب (١)

جد الأصفار النسبية المحتملة لكل من الاقتارات الآتية :

$$(١) \text{ ق (س) } = ٣ \text{ س} - ٨ \text{ س} + ٢ \text{ س} - ١٨$$

$$(٢) \text{ ك (س) } = ٢ \text{ س} - ٥ \text{ س} - ٣ \text{ س} + ٢ \text{ س} + ١٢$$

حلل كثير الحدود ق(س) = س^٥ - س^٤ - س^٣ - س^٣ + س^٢ + ٤ إلى عوامله الأولية .

الحل

جد صفراً للاقتران ق باستخدام نظرية الأصفار النسبية.

الأصفار النسبية المحتملة $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

بالتجريب ق(١) = صفر ، أي أن (س - ١) عاملٌ من عوامل ق. لإيجاد العوامل الأخرى جد خارج قسمة ق على (س - ١) بإحدى طريقتي القسمة فيكون خارج قسمة ق(س) على (س - ١) هو:

س^٤ - س^٢ - ٤ س - ٤ ، وبالطريقة نفسها جد صفر المقدار:

س^٤ - س^٢ - ٤ س - ٤ ، الأصفار المحتملة $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

بالتجريب يتبين أن (١ - س) صِفْرٌ للمقدار. أي أن (س + ١) عامل من عوامل المقدار:

س^٤ - س^٢ - ٤ س - ٤

إذن س^٤ - س^٢ - ٤ س - ٤ = (س + ١) (س^٣ - س^٢ - ٤ س - ٤) .

اتبع الطريق نفسها لتجد أن:

(س^٣ - س^٢ - ٤ س - ٤) = (س - ٢) (س^٢ + س + ٢)

المقدار التربيعي س^٢ + س + ٢ لا يمكن تحليله لأن مميزه سالب.

إذن س^٥ - س^٤ - س^٣ - س^٣ + س^٢ + ٤ = (س - ١) (س + ١) (س - ٢) (س^٢ + س + ٢)

فكر وناقش

في المثال (٢) وأثناء التجريب لإيجاد الأصفار وجد طالب الصفر الأول فكان ١ ، ووجد طالب آخر الصفر الأول فكان ٢ ، فهل ستختلف عوامل الاقتران؟ برر إجابتك.

تدريب (٢)

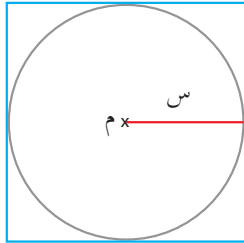
حلل كثير الحدود ق(س) = س^٥ + س^٤ - ٢ س^٣ + س^٢ + س - ٢ إلى عوامله الأولية.

تمارين و مسائل

- (١) جد الأصفار المحتملة لكل من كثيرات الحدود الآتية:
- أ (ق(س) = $6س^3 - 18س + 12$
- ب (هـ(س) = $2س^4 - 8س^3 - 20س + 30$
- ج (ل(س) = $5س^5 - 4س^2 - 3س - 10$
- (٢) حلل كثيرات الحدود الآتية إلى عواملها الأولية:
- أ (ق(س) = $81س^4 - 81$
- ب (ك(س) = $5س^6 - 40س^3$
- ج (هـ(س) = $3س^3 + 2س - 2$
- د (م(س) = $3س^3 - 2س^2 + 3س + 6$
- (٣) جد قيمة أ التي تجعل (س - ١) عاملاً من عوامل ق(س) = $3س^3 - 3س^2 + 2س + 4$
- (٤) حلّ المسألة الواردة بداية الدرس .
- (٥) جد كثير حدود من الدرجة الثالثة أصفاره ١ ، - ٢ ، ٤

النتائج

- تتعرف مفهوم الاقتران النسبي.
- تتميز الاقترانات النسبية.
- تستخدم نظريتي الباقي والعامل في تحليل الاقترانات النسبية.
- تجد صيغا مكافئة لتعابير نسبية ضمن مجال كل منها.



الشكل (١ - ١)

رُسمت دائرة داخل مربع بحيث تلمس أضلاعه الأربعة. إذا كان طول نصف قطر الدائرة (س) وحدة؛ فجد النسبة بين مساحة المربع ومساحة الدائرة بأبسط صورة.

ستتعرف في هذا الدرس الاقترانات النسبية وتستخدم نظرية الباقي والعامل بالإضافة إلى طرق التحليل التي درستها في تبسيط الاقترانات النسبية.

تعريف

يقال للاقتران ق بأنه اقتران نسبي إذا وُجد كثيرا حدود مثل هـ ، ل بحيث إن:

$$ق(س) = \frac{هـ(س)}{ل(س)} \neq 0$$

لجميع قيم س في مجال الاقتران ق، ويكون ق بأبسط صورة إذا لم يوجد عوامل مشتركة بين هـ ، ل.

مثال (١)

أي من الاقترانات الآتية نسبية وأيها غير نسبية ضمن مجال كل منها؟ بين السبب.

$$\begin{aligned} (١) \text{ ق (س)} &= \frac{س^٣ - ٢س}{١ + س^٣} \\ (٢) \text{ هـ (س)} &= \frac{١ + \sqrt{س}}{س^٢ - ٢س} \\ (٣) \text{ م (س)} &= \frac{٦}{س^٤ - ٣س + ١} \\ (٤) \text{ ل (س)} &= \frac{س^{٢٠} + ٨}{س^٧ + ٥} \end{aligned}$$

الحل

الاقترانان ق ، م نسبيان لأن كلاً منهما عبارة عن قسمة كثير حدود على كثير حدود.

الاقترانان هـ ، ل غير نسبين لأن $\sqrt{س} + ١$ ، $س^{٢٠} + ٨$ ليسا كثيري حدود.

تدريب (١)

أي من الاقترانات الآتية هو اقتران نسبي وأيها غير نسبي ضمن مجال كل منها مع ذكر السبب؟

$$\begin{aligned} (١) \text{ ق (س)} &= \frac{\text{س}^٣ - \sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{س} + ٤} \\ (٢) \text{ هـ (س)} &= \frac{\text{س}^٣ + ١}{\text{س}^٢ - ٤} \\ (٣) \text{ ل (س)} &= \frac{\frac{١}{\text{س}^٤} + \text{س}}{\text{س}^٣ - ٤\text{س} + ١} \\ (٤) \text{ م (س)} &= \frac{\text{س}^٤ - ٦\text{س}^٣ + ١}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} + ١} \end{aligned}$$

مثال (٢)

اكتب صيغا مكافئة لكل من الاقترانات الآتية ضمن مجال كل منها بأبسط صورة ممكنة:

$$\begin{aligned} (١) \text{ ق (س)} &= \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ٦}{\text{س}^٢ + ٨\text{س} + ١٥} \\ (٢) \text{ ل (س)} &= \frac{\text{س}^٢ + ٣\text{س} - ٢}{\text{س}^٢ - ١} \\ (٣) \text{ هـ (س)} &= \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^٤ + ٢\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ + ٢\text{س}} \\ (٤) \text{ م (س)} &= \frac{\text{س}^٤ + ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣} \end{aligned}$$

الحل

$$(١) \text{ ق (س)} = \frac{(٢ - \text{س})}{(٥ + \text{س})} = \frac{\cancel{(٣ + \text{س})} (٢ - \text{س})}{\cancel{(٣ + \text{س})} (٥ + \text{س})}$$

$$(٢) \text{ ل (س)} = \frac{(١ + \text{س}) (١ - \text{س})}{(١ - \text{س})} = \frac{(١ + \text{س}) (٣ + \text{س})}{(١ - \text{س})}$$

$$(٣) \text{ هـ (س)} = \frac{(٢ + \text{س})}{\text{س}^٤ + ٢\text{س}^٣ + ٢\text{س}^٢ + ٢\text{س}} = \frac{(٢ + \text{س})}{\text{س} (٢ + \text{س}) (١ + \text{س})} = \frac{١}{\text{س} (١ + \text{س})}$$

(٤) لاحظ أنَّ المقدار: $\text{س}^٤ + ٢\text{س} - ١٥$ لا يقبل القسمة على $(\text{س} - ٣)$ لأن باقي القسمة

$$\text{ل (٣)} = ٧٥، \text{ إذن م (س)} = \frac{\text{س}^٤ + ٢\text{س} - ١٥}{\text{س} - ٣} \text{ بأبسط صورة.}$$

تدريب (٢)

اكتب صيغاً مكافئة لكلٍّ من الاقتارات النسبية الآتية ضمن مجال كل منها بأبسط صورة ممكنة:

$$(٢) \text{ ل (س) } = \frac{\text{س}^٤ + ٢\text{س}^٣ + \text{س}}{\text{س}^٣ + ٢\text{س}}$$

$$(١) \text{ ق (س) } = \frac{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}{\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ + \text{س} - ٣}$$

$$(٣) \text{ ع (س) } = \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ - ٤}$$

مثال (٣)

يتحرك جُسيْمٌ على خط مستقيم بحيث يكون بعده عن نقطة البداية بعد ن دقيقة معطى بالقاعدة
ف (ن) = (ن^٣ + ٢ن + ٦) قدمًا، اكتب متوسط السرعة في الفترة [٢، س] بدلالة س.

الحل

$$\begin{aligned} \text{متوسط السرعة في الفترة [٢، س]} &= \frac{\text{المسافة المقطوعة في الفترة [٢، س]}}{\text{زمن الفترة [٢، س]}} \\ &= \frac{\text{ف (س) - ف (٢)}}{\text{س - ٢}} = \frac{\text{س}^٣ + ٢\text{س} + ٦ - ٢٤}{\text{س} - ٢} \\ &= \frac{\text{س}^٣ + ٢\text{س} - ١٨}{\text{س} - ٢} \text{ قدم / دقيقة} \end{aligned}$$

تدريب (٣)

إذا كان اقتران الإيراد الكلي لمبيعات س من الوحدات المنتجة من سلعة ما هو
د(س) = ٢ - ٢س + ٦٠ س دينارًا، فاكتب المقدار $\frac{\text{د(ع)} - \text{د(٢)}}{\text{ع} - ٢}$ بأبسط صورة،
حيث $٢ < \text{ع}$.

تمارين و مسائل

(١) اكتب ثلاثة أمثلة على اقترانات نسبية.

(٢) ميّز الاقترانات النسبية من غيرها ضمن مجال كل منها في ما يأتي مع ذكر السبب:

$$\text{أ (ق } ١ \text{ (س))} = \frac{٥ + س + \frac{١}{٢} س}{٨ + س} \quad \text{ب (ق } ٢ \text{ (س))} = \frac{١ - س}{٣ + \sqrt{٢} س}$$

$$\text{ج (ق } ٣ \text{ (س))} = \frac{\sqrt{٢} + س + ٣ س}{س٧ + ٢ س} \quad \text{د (ق } ٤ \text{ (س))} = \frac{\sqrt{٢} + س}{٣ س - ٦}$$

$$\text{هـ (ق } ٥ \text{ (س))} = \frac{٢٥ - ٢ س + ٣ س٢}{١ - ٢ س + ٤ س}$$

(٣) اكتب صيغاً مكافئة لكلٍّ من الاقترانات النسبية الآتية ضمن مجال كل منها بأبسط صورة ممكنة:

$$\text{أ (ق } ١ \text{ (س))} = \frac{٢ + س - ٢ س + ٣ س}{٢ - س + ٢ س} \quad \text{ب (ق } ٢ \text{ (س))} = \frac{٢ س٣ + ٣ س٤ - ٤ س}{س - ٣ س}$$

$$\text{ج (ق } ٣ \text{ (س))} = \frac{٢ س٢ + ٥ س + ١٢ - ٣ س}{٤ - س} \quad \text{د (ق } ٤ \text{ (س))} = \frac{٣ + س - ٢ س}{٣ س - ٣ س}$$

(٤) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٥) بئر ماء على شكل متوازي مستطيلات طوله ٤ م وعرضه ٣ م وارتفاعه ٢ م ، أُجريت عليه

توسعة بحيث تم زيادة أبعاده بمقدار متساوٍ من الأمتار.

أ (اكتب الاقتران النسبي الذي بَسْطُهُ حجم البئر بعد التوسعة ومقامه ارتفاع البئر بعد التوسعة بأبسط صورة.

ب (ماذا يمثل الاقتران في الفرع (أ)؟

النتائج

- تحل معادلات غير خطية بمتغير واحد بالتحليل والرسم البياني.
- تحل متباينات غير خطية بمتغير واحد حتى الدرجة الثالثة.
- تكتب صيغاً مكافئة لتعابير نسبية باستخدام الكسور الجزئية.

أولاً: حل المعادلات الجبرية بمتغير واحد Solving Algebraic Equations with One Variable

وجد محل لبيع قطع الحاسوب أن الربح اليومي لمبيعاته يُعطى بالاقتران $R(s) = s^3 - 5s^2 + 4s$ حيث s عدد القطع المباعة ، $R(s)$ الربح بالدينار. فإذا كان ربح المحل في أحد الأيام ٢٠ ديناراً ، فكم عدد القطع المباعة في ذلك اليوم؟

درست سابقاً المعادلات بمتغير واحد من الدرجات الأولى والثانية والثالثة والتي صورها العامة كما يأتي:

الصورة العامة	الدرجة	مثال
$ax + b = 0$	الأولى	$5s + 2 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	الثانية	$3s^2 - 2s + 9 = 0$
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$	الثالثة	$3s^3 + 2s^2 - 5s - 7 = 0$
حيث $a \neq 0$ ، b ، c ، d ، $c \neq 0$		

وبشكل عام إذا كان $Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ ، $a_0 \neq 0$ كثير حدود من الدرجة n فإن $Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$ **معادلة مرافقة** للاقتران $Q(s)$.

تذكر

- (١) المعادلة ذات المتغير الواحد هي جملة رياضية تحوي متغيراً واحداً وإشارة =
- (٢) حلُّ المعادلة ذات المتغير الواحد يعني إيجاد قيمة (أو قيم) المتغير التي تجعل المعادلة عبارة صحيحة.
- (٣) إذا كان حاصل ضرب مقدارين جبريين يساوي صفراً فإن أحدهما على الأقل يساوي صفراً.

لحل المعادلات السابقة (إيجاد جذورها أو إيجاد قيم المتغير التي تحققها) يمكن اتباع طرائق متعددة منها :

التحليل إلى العوامل ، التعويض ، الرسم البياني ، والأمثلة الآتية توضح ذلك :

مثال (١)

حلّ المعادلة $٠ = ٦ - ٣س + ٢س١١ - ١س٦$

الحل

حلل الاقتران ق(س) المرافق للمعادلة إلى عوامله الأولية :

$$ق(س) = ٦ - ٣س + ٢س١١ - ١س٦$$

حسب نظرية الأصفار النسبية فإن الأصفار النسبية المحتملة

هي : $١ \pm , ٢ \pm , ٣ \pm , ٦ \pm$.

بالتجريب نجد أن $(٢ - س)$ عاملٌ من عوامل ق(س)،

وبعد إجراء عملية القسمة نجد أن :

$$س٣ - ٦س٢ + ١١س - ٦ = (٢ - س)(س٣ - ٢س٢ + ٤س + ٣)$$

قسمة كثيرات الحدود

$$(س٣ - ٢س٢ + ٤س + ٣) = (س - ١)(س٢ - ٣س + ٣)$$

تحليل العبارة التربيعية

$$إذن س٣ - ٦س٢ + ١١س - ٦ = (٢ - س)(س - ١)(س٢ - ٣س + ٣)$$

إذن المعادلة المرافقة للاقتران ق(س) هي : $(٢ - س)(س - ١)(س٢ - ٣س + ٣) = ٠$

$$إما (٢ - س) = ٠ \quad \text{ومنه} \quad س = ٢$$

$$\text{أو} \quad (س - ١) = ٠ \quad \text{ومنه} \quad س = ١$$

$$\text{أو} \quad (س٢ - ٣س + ٣) = ٠ \quad \text{ومنه} \quad س = ٣$$

∴ جذور المعادلة هي : ١ ، ٢ ، ٣ .

تدريب (١)

حلّ المعادلة $٠ = ٦ + ٥س - ٢س٢ - ٣س٢$

مثال (٢)

حلّ المعادلة $٢س^٥ - ٣٢س = ٠$

الحل

إخراج عامل مشترك

$$٢س^٥ - ٣٢س = ٢س(س^٤ - ١٦)$$

تحليل فرق بين مربعين

$$٢س(س^٤ - ١٦) = ٢س(س^٢ - ٤)(س^٢ + ٤)$$

تحليل فرق بين مربعين

$$٢س(س^٢ - ٤)(س^٢ + ٤) = ٢س(س - ٢)(س + ٢)(س^٢ + ٤)$$

لا حظ أن $(س^٢ + ٤)$ عبارة تربيعية مميزها سالب ولا يمكن تحليلها ولذلك لا يوجد لها حل حقيقي.

إذن إمّا $س = ٠$

أو $(س - ٢) = ٠$ ومنه $س = ٢$

أو $(س + ٢) = ٠$ ومنه $س = -٢$

إذن للمعادلة ثلاثة جذور حقيقية هي : ٠ ، ٢ ، -٢ .

تدريب (٢)

حلّ المعادلة $٨س^٥ - ٨س = ٠$

مثال (٣)

حلّ المعادلة $١٤س^٢ - ٤٥س + ٤٥ = ٠$

الحل

قوانين الأسس $(س^٢)^٢ = س^٤$

$$١٤س^٢ - ٤٥س + ٤٥ = ١٤س^٢ - ٢(٢س) + ٤٥$$

بفرض $ص = س^٢$

$$١٤ص - ٢ص + ٤٥ = ١٤ص - ٢ص + ٤٥$$

تحليل عبارة تربيعية

$$(٩ - ص)(٥ - ص) = ٠$$

$$(٩ - س^٢)(٥ - س^٢) = ٠$$

تحليل فرق بين مربعين

$$= (س - ٣) (س + ٣) (س - \sqrt{٥}) (س + \sqrt{٥})$$

إذن جذور المعادلة هي : ٣ ، ٣ - ، $\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٥}$

تدريب (٣)

حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

$$(١) \text{ س } ٦ - \text{ س } ٧ = ٨ - ٣$$

$$(٢) \text{ س } ٤ - \text{ س } ٣ = ٤ - ٢$$

مثال (٤)

معتمداً الشكل الآتي الذي يمثّل منحنى الاقتران ق(س) = $س^٣ + ٢س^٢ - ٣س$ جد مجموعة حلّ المعادلة المرافقة للاقتران ق.

الحل

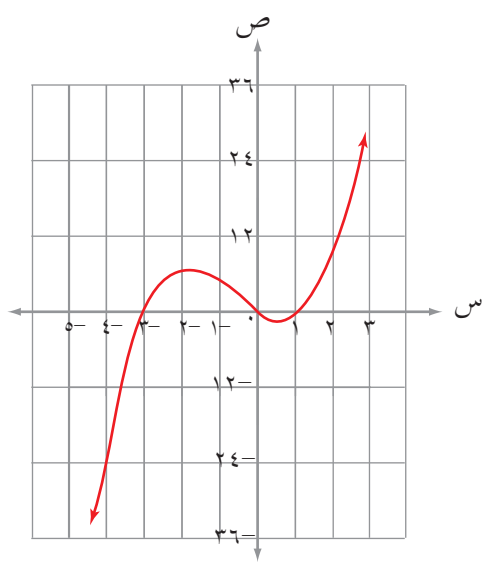
لاحظ أن منحنى ق(س) = $س^٣ + ٢س^٢ - ٣س$ يسقط

محور السينات عند $س = ٠$ ، $س = ٣$ ، $س = -١$.

لذلك فإن للمعادلة $س^٣ + ٢س^٢ - ٣س = ٠$

المرتبطة بالاقتران ق(س) = $س^٣ + ٢س^٢ - ٣س$

ثلاثة حلول هي : $س = ٠$ ، $س = ٣$ ، $س = -١$.



الشكل (١ - ٢)

وَجَدَ محل أحذية أن اقتران الإيراد الكلي الناتج من بيع (س) من القطع هو:

$$د(س) = ٣س - ٢س٢ \text{ دينار}$$

وأن اقتران التكلفة الكلية هو:

$$ك(س) = ٨س - ٢س٢ \text{ دينار.}$$

جدّد عدد القطع التي يمكن للمحل أن يبيعها ليحقق ربحاً مقداره (٩٠) دينار.

الحل

الربح = الإيراد - التكلفة

$$ر(س) = (٣س - ٢س٢) - (٨س - ٢س٢)$$

$$٩٠ = ٣س - ٢س٢ + ٨س$$

$$٠ = ٩٠ - ٣س + ٢س٢$$

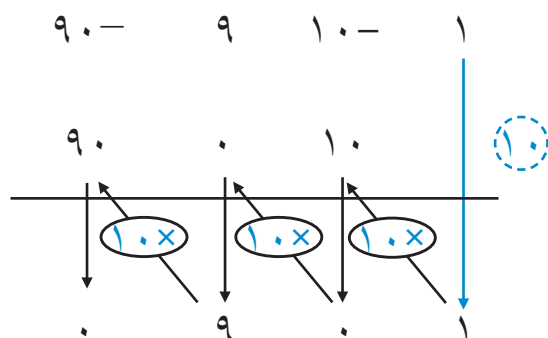
وباستخدام القسمة التركيبية ينتج أن:

$$٣س - ٢س٢ + ٨س - ٩٠ = ٠ \Rightarrow (٣س - ٢س٢) + (٨س - ٩٠) = ٠$$

لاحظ أن مميز العبارة (٣س - ٢س٢) سالب؛ لذا لا يوجد لها حل حقيقي.

إذن حل المعادلة هو: $١٠ = ٣س$

وهذا يعني أن على المحل أن يبيع (١٠) قطع من الأحذية ليحقق ربحاً مقداره (٩٠) دينار.



تمارين و مسائل

(١) اكتب مثلاً على اقتران كثير حدود على الصورة القياسية من الدرجة الأولى والثانية والثالثة ثم اكتب المعادلة المرافقة لكل اقتران.

(٢) حلّ المعادلات الآتية وتحقق من صحّة الحل :

أ ($٠ = ٨س + ٢س - ٣س$)

ب ($٠ = ٣س + ٢س - ٥س + ٣س$)

ج ($٠ = ١٦س - ٥س$)

د ($٠ = ٦س - ٤س + ٣س + ٢س - ٦س$)

هـ ($٦٤ = ٦س$)

و ($٠ = ٣س + ٤س + ٥س$)

ز ($٠ = ٤س + ٢س - ٣س + ٥س$)

ح ($٣س(١ + س) = ٤س(١ + س)$)

(٣) بركة سباحة قاعدتها مستطيلة الشكل يزيد طولها عن عرضها بمقدار ٦ م . يحيط بها ممر عرضه ١ م، فإذا كانت مساحة البركة مع الممر ٩١ م^٢ ، فجد بعدي البركة.

(٤) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

ثانيًا: المتباينات غير الخطية بمتغير واحد Nonlinear Inequalities with One Variable

شاحنة وزنها ١٥ طنا تريد المرور فوق جسر يتحمل وزنا أقصاه ٢٨ طنا ، ما الوزن الذي يمكن للشاحنة أن تحمله بحيث يمكنها من المرور فوق الجسر؟

تعلمت في الدرس السابق حل معادلات غير خطية بمتغير واحد ومنها معادلات من الدرجة الثانية التي صورتها القياسية $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ و معادلات من الدرجة الثالثة التي صورتها القياسية $أس^٣ + ب س^٢ + ج س + د = ٠$ ، حيث $أ ، ب ، ج ، د \neq ٠$.
إذا استبدلت إشارة المساواة في المعادلة بأحد الرموز $< ، \leq ، > ، \geq$ تحصل على الصورة القياسية للمتبينة بمتغير واحد من الدرجة الثانية أو الثالثة.

تذكر

المتبينة جملة مفتوحة تحتوي على رمز أو أكثر من الرموز $< ، \leq ، > ، \geq$.

حل المتبينة ضعها بأحد صورها القياسية: $ق(س) < ٠$ ، $ق(س) \leq ٠$ ، $ق(س) > ٠$ ، $ق(س) \geq ٠$ ،
ثم حلل ق إلى عوامله الأولية وادرس إشارة ق على خط الأعداد كما في الأمثلة الآتية :

مثال (١)

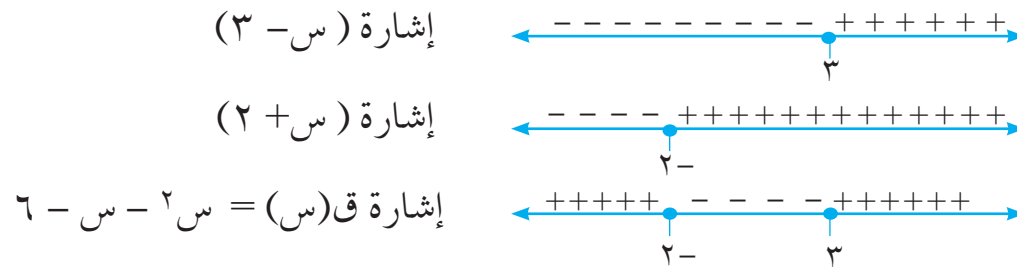
حل المتبينة $س^٢ - س - ٦ \leq ٠$ ، ومثلها على خط الأعداد .

بفرض $ق(س) = س^٢ - س - ٦$

$ق(س) = (س - ٣)(س + ٢)$

صفرا ق هما : ٣ ، ٢ -

ادرس إشارة كل عامل من عوامل ق



لاحظ أن $s^2 - s - 6 \leq 0$

لجميع قيم s في الفترتين $(-\infty, -2]$ ، $[3, \infty)$

أي أن مجموعة حل المتباينة $s^2 - s - 6 \leq 0$ هي الفترتين $(-\infty, -2]$ ، $[3, \infty)$

تدريب (١)

حل المتباينة $s^2 + s - 2 < 0$ ، ومثلها على خط الأعداد .

مثال (٢)

حل المتباينة $s^2 + 2s - 6 > 0$.

الحل

كتابة المتباينة بالصورة القياسية

$$s^2 - 2s + 6 > 0$$

احسب مميز العبارة $s^2 - 2s + 6$ لتجد أن المميز $4 - 4 \times 1 \times 6 = -20 < 0$ ، وعليه فإن العبارة أولية ولا يمكن تحليلها، ويمكن إعادة كتابتها بإكمال المربع.

$$s^2 - 2s + 6$$

إضافة وطرح مربع نصف معامل s

$$= s^2 - 2s + 1 - 1 + 6$$

$$= (s - 1)^2 + 5$$

بما أن $(s - 1)^2 \geq 0$ لجميع قيم $s \in \mathbb{R}$ ، فإن $(s - 1)^2 + 5 > 0$ لجميع قيم $s \in \mathbb{R}$

إذن مجموعة حل المتباينة $s^2 - 2s + 6 > 0$ هي $\emptyset$

تدريب (٢)

حل المتباينة $s^2 - s - 10 > 0$ ، ومثلها على خط الأعداد .

مثال (٣)

حلّ المتباينة $س^٣ - ٩س \geq ٠$ ، ومثلها على خط الأعداد .

الحل

نَفَرِضُ ق(س) = $س^٣ - ٩س$

تحليل إلى العوامل

$$س^٣ - ٩س = س(س^٢ - ٩) = س(س - ٣)(س + ٣)$$

بدراسة إشارة كل عامل من عوامل ق



تجد أن $س^٣ - ٩س \geq ٠$ صحيحة لجميع قيم س في الفترتين $(-\infty, -٣]$ ، $[٠, ٣]$

أي أن مجموعة حلّ المتباينة $س^٣ - ٩س \geq ٠$ هي الفترتين $(-\infty, -٣]$ ، $[٠, ٣]$

تدريب (٣)

حلّ المتباينة $س^٣ < ١٦س$ ، ومثلها على خط الأعداد .

مثال (٤)

حلّ المتباينة $س^3 - س^2 < ٣ - س$ ، ومثلها على خط الأعداد .

الحل

كتابة المتباينة بالصورة القياسية

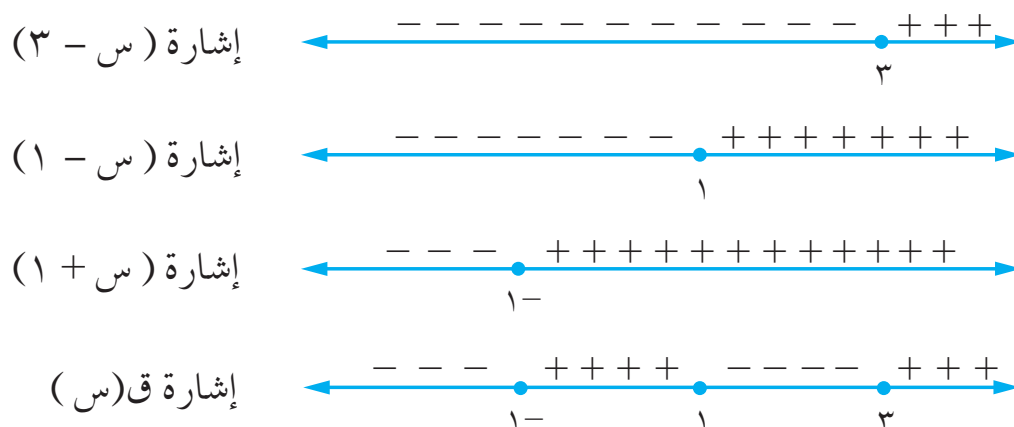
$$س^3 - س^2 - ٣ + س < ٠$$

نفرض أنّ $ق(س) = س^3 - س^2 - ٣ + س$

إذن: $س^3 - س^2 - ٣ + س = (س - ٣)(س - ١)(س + ١)$ التحليل إلى العوامل

أصفار $ق$: -١ ، ١ ، ٣

بدراسة إشارة كل عامل من عوامل $ق$



تجد أنّ $ق(س) < ٠$ ، لجميع قيم $س$ في الفترتين $(١ - , ١)$ ، $(٣ , ∞)$

أي أنّ مجموعة حلّ المتباينة $س^3 - س^2 - ٣ + س < ٠$ هي الفترتين $(١ - , ١)$ ، $(٣ , ∞)$

تدريب (٤)

حلّ المتباينة $س^2 + ٣س + ٥ > ١٢س$ ، ومثلها على خط الأعداد .

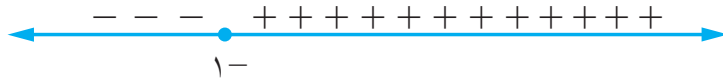
تمارين و مسائل

- (١) عرّف المتباينة، وما معنى مجموعة حلها؟
- (٢) إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية وكانت مجموعة حل المتباينة ق(س) $0 \leq$ هي الفترة [أ، ب] فجد ما يأتي:
 أ (أصفار الاقتران ق.
 ب) مجموعة حل المتباينة ق(س) $0 >$
 ٣) اكتب المتباينات الآتية على صورتها القياسية، ثم جد أصفار الاقتران المرافق لكل منها:
 أ (س $3 + 2$ س $4 >$
 ب) س $2 \geq 16$
 ج) س $3 - 6$ س $3 >$ س $8 - 2$
 ٤) جد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد:
 أ (س $3 - 4$ س $0 >$
 ب) س $4 + 2$ س $2 - 2 \geq$ س 2
 ج) س $2 + 3$ س $8 <$ س 10 س 2
 د (س $2 - 6$ س $9 + 0 \leq$
 ٥) اعتماداً على الأشكال الآتية التي توضح إشارة كلٍّ من الاقتران ل، م، هـ، ق المعرفة على ح. أجب عما يليها:

إشارة ل



إشارة م



إشارة هـ



إشارة ق



- أ (اكتب قاعدة كلٍّ من الاقترانات الخطية ل ، م ، هـ علما بأن المعامل الرئيس لكلٍّ منها ١ .
- ب) إذا كان $ق = ل \times م \times هـ$ فاكتب قاعدة ق .
- ج) جد مجموعة حل المتباينة ق(س) $٠ > ٠$ ، و المتباينة ق(س) $٠ \geq ٠$.
- د (هل يمكن أن يكون الاقتران ل غير خطي و تبقى إشارته كما هو موضح أعلاه؟ برر إجابتك إن كانت الإجابة لا ، وإن كانت الإجابة نعم فأعْطِ مثالا يدعم رأيك .

$$\frac{s}{(1+n)} + \dots + \frac{s}{2} + \frac{s}{1}$$

لاحظ أنه من الصعب إيجاد مجموع المقدار السابق بالطرائق العادية ولكن يمكن كتابته بصورة أخرى كما يأتي:

$$\left(\frac{s}{1+n} - \frac{s}{n}\right) + \dots + \left(\frac{s}{4} - \frac{s}{3}\right) + \left(\frac{s}{3} - \frac{s}{2}\right) + \left(\frac{s}{2} - s\right)$$

$$= s - \frac{s}{1+n}$$

لحل بعض المسائل التي تحتوي صيغا نسبية قد تحتاج كتابتها على شكل صيغتين نسبيتين أو أكثر كما في المسألة السابقة.

تعلمت سابقا كيف تجد ناتج جمع صيغتين نسبيتين :

$$\frac{(1-s)4 + (2+s)3}{(2+s)(1-s)} = \frac{4}{(2+s)} + \frac{3}{(1-s)}$$

$$= \frac{2+s}{2-s+s} =$$

$$\frac{4}{(2+s)} + \frac{3}{(1-s)} = \frac{2+s}{2-s+s} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{4}{(2+s)} + \frac{3}{(1-s)} = \frac{2+s}{2-s+s} \quad \text{كيف يمكن كتابة الصورة ؟}$$

لإجراء هذه العملية اتبع الخطوات الآتية:

$$\frac{2+s}{(2+s)(1-s)} = \frac{2+s}{2-s+s}$$

تحليل المقام إلى عوامله الأولية

$$\frac{ب}{(٢ + س)} + \frac{أ}{(١ - س)} = \frac{٢ + س٧}{(٢ + س)(١ - س)} \quad \text{افرض أن}$$

$$\text{توحيد المقامات} \quad \frac{(١ - س) ب + (٢ + س) أ}{(٢ + س)(١ - س)} = \frac{٢ + س٧}{(٢ + س)(١ - س)}$$

من تساوي الصيغتين النسبيتين

$$٧ + س = ٢ + س أ + ب(١ - س)$$

$$\text{بفرض س} = ٢ -$$

$$١٢ - = ٣ - ب \Leftarrow ب = ٤$$

$$\text{بفرض س} = ١$$

$$٩ = ٣ أ \Leftarrow أ = ٣$$

$$\frac{٤}{(٢ + س)} + \frac{٣}{(١ - س)} = \frac{٢ + س٧}{(٢ + س)(١ - س)} \quad \text{أي أن}$$

تدعى عملية كتابة $\frac{٢ + س٧}{س٢ + س - ٢}$ بهذه الصورة **تجزئة الكسر** أو كتابة الكسر على شكل كسور جزئية.

مثال (١)

$$\frac{١٠ + س٢}{س٣ - ٣س - ٢س + ٣} : \text{اكتب الكسور الجزئية المكافئة للصيغة النسبية}$$

الحل

$$\text{تحليل المقام إلى عوامله الأولية} \quad \frac{١٠ + س٢}{(٣ - س)(١ + س)(١ - س)} = \frac{١٠ + س٢}{س٣ - ٣س - ٢س + ٣}$$

$$\text{افرض أن} \quad \frac{ج}{(٣ - س)} + \frac{ب}{(١ + س)} + \frac{أ}{(١ - س)} = \frac{١٠ + س٢}{س٣ - ٣س - ٢س + ٣}$$

بتوحيد المقامات نحصل على

$$\frac{أ(س+١)(س-١) + ب(س-١)(س-٣) + ج(س-٣)(س+١)}{(س-٣)(س+١)(س-١)} =$$

من خلال المساواة

$$٢س + ١٠ = أ(س+١)(س-١) + ب(س-١)(س-٣) + ج(س-٣)(س+١)$$

بفرض $س = ١$

$$٨ = ٨ \Rightarrow ب = ١$$

بفرض $س = ٣$

$$١٦ = ٨ \Rightarrow ج = ٢$$

بفرض $س = ١$

$$١٢ = ٤أ \Rightarrow أ = ٣$$

$$\frac{٢}{(س-٣)} + \frac{١}{(س+١)} + \frac{٣-}{(س-١)} = \frac{٢س + ١٠}{٣س - ٣س + ٣} \quad \text{إذن}$$

مثال (٢)

$$\frac{س٣ + ٢س - ١}{س٢ + ٢س - ٢} \quad \text{جزئ الصيغة النسبية}$$

الحل

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام نجري عملية القسمة .

إجراء عملية القسمة

$$\frac{س٣ + ٢س - ١}{س٢ + ٢س - ٢} = س - ١ + \frac{٥س - ٣}{س٢ + ٢س - ٢}$$

$$\frac{٥س - ٣}{س٢ + ٢س - ٢} \quad \text{والآن نجزئ}$$

$$\frac{ب}{(١ - س)} + \frac{أ}{(٢ + س)} = \frac{٣ - س٥}{(١ - س)(٢ + س)} = \frac{٣ - س٥}{٢ - س + ٢س}$$

$$\frac{أ(١ - س) + ب(٢ + س)}{(١ - س)(٢ + س)} =$$

من المساواة تجد $٣ - س٥ = أ(١ - س) + ب(٢ + س)$

$$\frac{٢}{٣} = ب \Leftarrow ٣ = ٢ \Leftarrow ١ = س \text{ بفرض } س$$

$$\frac{١٣}{٣} = أ \Leftarrow ٣ - ١ = ١٣ - ٢ = س \text{ بفرض } س$$

$$\frac{\frac{٢}{٣}}{(١ - س)} + \frac{\frac{١٣}{٣}}{(٢ + س)} + ١ - س = \frac{١ - س٢ + ٣س}{٢ - س + ٢س} \quad \text{إذن}$$

تدريب (١)

$$\frac{س٣ - ٢س٢ - ٦س + ١٢}{س٣ - ٢س - ٤} \text{ جزئ الصيغة النسبية}$$

من خلال الأمثلة السابقة تلاحظ أنه يمكن إجراء عملية تجزئة الكسور إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام .

أما إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام أو تساويها نستخدم القسمة الطويلة لكتابة الناتج على شكل كثير حدود مضاف إليه صيغة نسبية يمكن كتابتها على شكل كسور جزئية.

تمارين و مسائل

(١) جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

$$(أ) \quad \frac{5}{س} + \frac{3}{س+1}$$

$$(ب) \quad \frac{1}{س} - \frac{2}{س+1}$$

$$(ج) \quad \frac{4}{س-1} - \frac{2}{س+3}$$

$$(د) \quad \frac{3}{س+7} + \frac{6}{س+4}$$

(٢) جزئ كلا من الكسور الآتية:

$$(أ) \quad \frac{8س-17}{(س-1)(س-4)}$$

$$(ب) \quad \frac{س-1}{س(س+1)}$$

$$(ج) \quad \frac{(س+1)}{(س-1)(س-2)}$$

$$(د) \quad \frac{س}{س+2س-2}$$

$$(هـ) \quad \frac{1}{(س-2)(س-5)}$$

$$(و) \quad \frac{12س^2+23س+2}{3س^2-7س-6}$$

$$(ز) \quad \frac{2س^3-4س^2-15س+5}{س^2-2س-8}$$

$$(ح) \quad \frac{س^2+12س+12}{س^3-4س}$$

$$(ط) \quad \frac{1}{س^2-2س+1}$$

$$(ي) \quad \frac{س^2}{س^2-1}$$

أسئلة الوحدة

(١) جد خارج وباقي القسمة في ما يأتي :

أ (٥ س^٣ - ١٣ س^٢ + ١٠ س - ٨) ÷ (٢ س - ١)

ب (٨ س^٤ - ٤ س^٢ + ٤ س + ١) ÷ (٢ س + ١)

(٢) اكتب مثلاً على كثيري حدود باقي قسمة أحدهما على الآخر (٥).

(٣) اكتب صيغاً مكافئة لكل من الاقترانات الآتية (إن أمكن):

أ (١ ق (س) = $\frac{س^٤ + ٢س^٣ + ٢س^٢ + ٢س}{س + ٢}$ ، س ≠ -٢)

ب (٢ ق (س) = $\frac{س^٥ - ٧س^٣ + س + ١}{س + ٣}$ ، س ≠ -٣)

ج (٣ ق (س) = $\frac{س^٤ - ٢س^٢ + س - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١)

(٤) حلّ المعادلات الآتية:

أ (٣ س^٤ + ٤ س^٢ - س - ٤ = ٠)

ب (٤ س^٢ - ١٢ س^٢ + ٣٢ = ٠)

ج (٤ س^٤ - ٣ س^٢ - ٤ = ٠)

(٥) في الشكل (١-٣)، إذا علمت أن طول ضلع المربع

الخارجي (س^٢ + ٢) سم وطول ضلع المربع

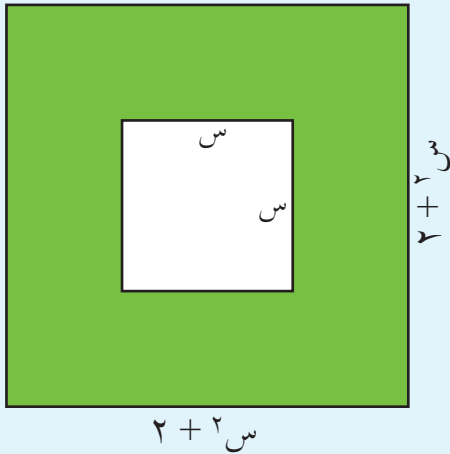
الداخلي (س) سم فأجب عن كل مما يأتي:

أ (اكتب قاعدة الاقتران الدال على مساحة

المنطقة المظلمة.

ب (إذا كانت مساحة المنطقة المظلمة ٣٢ سم^٢، فجد

طول ضلع كل من المربع الداخلي والمربع الخارجي.



الشكل (١-٣)

٦) حُلّ كلاً من المتباينات الآتية ومثّل الحلّ على خط الأعداد:

أ) $(س - ٢ - ٤) > ٣ + ٠$

ب) $(س - ٣ - ٤) \leq س - ٢ - ٤$

ج) $(س - ٣ - ٣) \geq س - ٢ - ٣$

٧) جزئ الصيغ النسبية الآتية :

أ) $\frac{٤٢ - س٨}{س٢ + س٣ - ١٨}$

ب) $\frac{س٢ - س٣ + ٣}{س٢ + س - ٢}$

ج) $\frac{١ - س٣}{س٢ - ٥س + ٣}$

٨) إذا كان خارج قسمة كثير الحدود ق على $(س - ٣)$ يساوي $س٢ - ٦س + ٩$ ، وكان الباقي $١ - س$ ، فاكتب قاعدة ق.

٩) اكتب صيغة مكافئة للاقتران ق(س) = $\frac{س٤ + س٤س٣ - س٣}{س٢ - ١}$ ، حيث $س \neq \pm ١$

١٠) دوار دائري الشكل طول نصف قطره ٨ م ، تم عمل نافورة ماء دائرية الشكل طول نصف قطرها (س) متر بوسط الدوار بحيث كان مركزها مركز الدوار نفسه، أجب عن كلّ مما يأتي:

أ) اكتب الاقتران النسبي الذي بسطه مساحة الجزء المتبقي من الدّوار ، ومقامه المسافة بين نصفي قطري الدوار والنافورة.

ب) إذا كانت مساحة الجزء المتبقي من الدّوار $١٠ \pi م٢$ ، جد طول نصف قطر النافورة.

(١١) إذا كان $ق(س) = س^2 - ٢س + ن$ حيث $ن$ ، $م$ ثابتان وكان أحد أصفار $ق$ يختلف بمقدار ٢ عن صفره الآخر. أثبت أن $م^2 = ن + ١$.

(١٢) يتكوّن هذا السؤال من أربع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربع بدائل، واحد فقط منها صحيح. ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان باقي قسمة $ق(س) = س^3 - ٥س + ج$ على $هـ(س) = س + ٢$ يساوي ٥ فما قيمة الثابت $ج$ ؟

- أ (٣ - ب) ٣ ج) ٧ د) ٢ -

(٢) إذا كان $ق(س) = س^2 - أس$ ، $أ$ ثابت $١ \neq$ فما قيمة $\frac{ق(أ - ١)}{ق(١)}$ ؟

- أ (١ ب) ١ - ج) ١ - أ د) صفر

(٣) إذا كان $\frac{س}{س^2 - س} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{١ - س}$ فما قيمة الثابتين $أ$ ، $ب$ على الترتيب؟

- أ (٠، ١ ب) ١، ٠ ج) ١، ١ - د) ١، ١ -

(٤) أي مما يأتي يُعد عاملاً من عوامل $س^3 - ٧س + ٦$ ؟

أ (٣ + س)

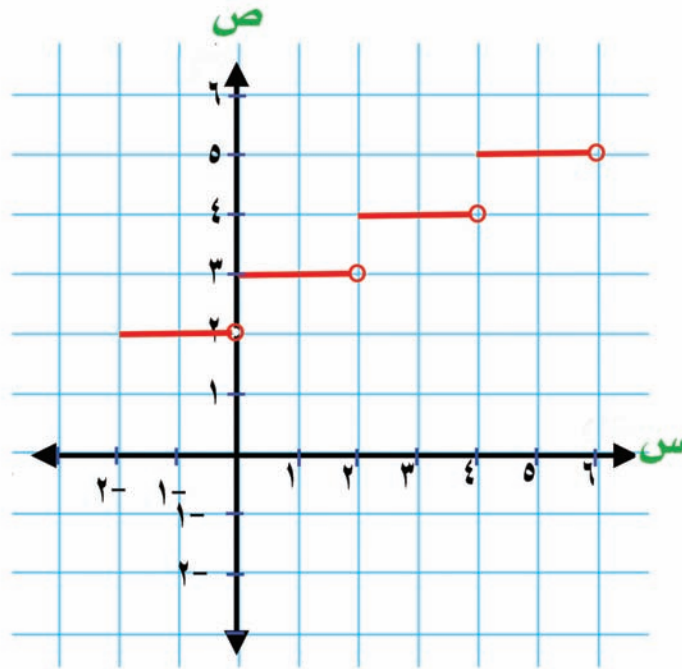
ب) ١ + س

ج) ٦ - س

د (س + ٢)

يعد علم الجبر أحد الفروع الأساسية في علم الرياضيات؛ فهو لا يتعامل مع الأرقام فحسب بل يصوغ العلاقات باستخدام الرموز والمتغيرات.

وللاقتدرات أهمية كبرى؛ نظرًا لتطبيقاتها الواسعة وارتباطها بفروع الرياضيات المختلفة، مثل: التفاضل والتكامل والعلوم الأخرى كالفيزياء والكيمياء والطب والهندسة وحتى العلوم الإنسانية. ويمكن بواسطتها تمثيل ظواهر كونية كثيرة.



Functions

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على:

- استقصاء خصائص اقترانات كثيرات حدود على الصورة $أس^3 + ب$ ، واقتران القيمة المطلقة، واقتران أكبر عدد صحيح، والاقتران المتشعب، واقتران الجذر التربيعي والاقتران النسبي بحيث يكون البسط عدداً ثابتاً.
- رسم منحنيات اقترانات خاصة معطاة يدوياً وباستخدام التكنولوجيا.
- فهم عملية تركيب الاقترانات، والاقتران العكسي.
- استخدام تركيب الاقترانات لإيجاد الاقتران العكسي.
- استخدام الاقترانات الخاصة في نمذجة مسائل حياتية وحلّها، مع تبرير الحل.

النتائج

- تستقصي خصائص كثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة.



حوض للسباحة على شكل متوازي مستطيلات أبعاده من الداخل ٢٠ م ، ١٠ م ، ٥ م ، أجريت عليه توسعة بحيث تم زيادة أبعاده بمقدار متساوٍ من الأمتار. (١) اكتب الاقتران الذي يمثل الفرق بين حجم الحوض قبل التوسعة وبعدها.

(٢) هل الاقتران الناتج كثير حدود؟ وإن كان كذلك، ما درجته؟ وما معاملات حدوده؟

درست سابقا كثيرات الحدود وبعض خصائصها، والصورة القياسية لكثير الحدود من الدرجة n هي $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ، حيث $a_n \neq 0$ ، $n \in \mathbb{Z}$ وتسمى الأعداد: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ معاملات الاقتران Q ويسمى العدد a_n بالمعامل الرئيس.

مثال (١)

حدد درجة كثير الحدود واكتب المعامل الرئيس في كل مما يأتي:

(١) $Q(x) = 2x^2 + 7x + 1$

(٢) $K(x) = 8x^4 + 2x - 1$

(٣) $H(x) = -x^3 + 1$

الحل

(١) Q من الدرجة الثانية والمعامل الرئيس فيه ٢.

(٢) K من الدرجة الرابعة والمعامل الرئيس فيه ٨.

(٣) H من الدرجة الثالثة والمعامل الرئيس فيه -١.

تعلم

مجال الاقتران كثير الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. ومداه هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ، أو مجموعة جزئية منها.

وسوف نركز اهتمامنا في هذا الدرس على المزيد من خصائص كثيرات الحدود حتى الدرجة الثالثة من خلال رسمها يدوياً وباستخدام التكنولوجيا.

مثال (٢)

ارسم منحنى $ق(س) = س^2 - ٤س + ٣$ ، $س \in [-١, ٦]$ ومن خلال الرسم أجب عن كل مما يأتي:

(١) جد نقاط تقاطع منحنى الاقتران $ق$ مع محور السينات.

(٢) جد عدد مرات التغير في إشارة $ق$.

(٣) جد أصفار الاقتران $ق$.

(٤) جد معادلة محور التماثل.

الحل

أكمل الجدول الآتي:

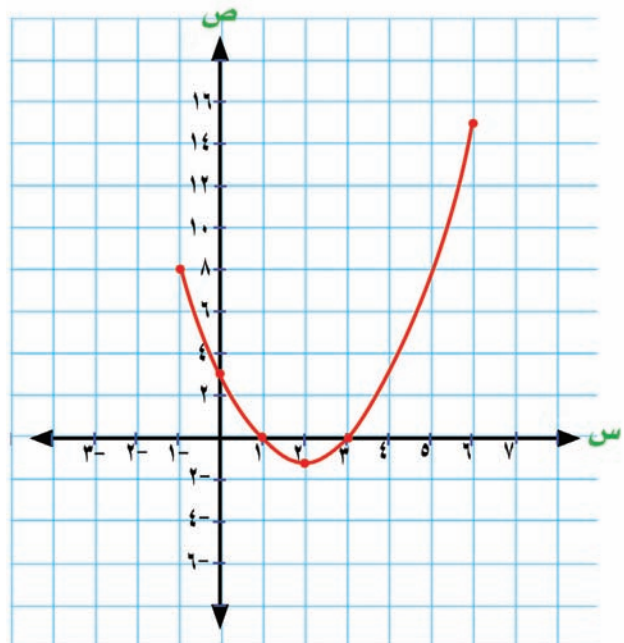
س	-١	٠	٢	٣	٤	٦
ق(س)	٨		-١			١٥

يوضح الشكل (١-٢) منحنى الاقتران $ق$.

تعلم

(١) يكون الاقتران $ق$ متزايداً على مجاله إذا تزايدت قيم $ق(س)$ كلما زادت قيم $س$.

(٢) يكون الاقتران $ق$ متناقصاً على مجاله إذا تناقصت قيم $ق(س)$ كلما زادت قيم $س$.



الشكل (١-٢).

ومن الشكل نلاحظ أنّ:

(١) نقاط تقاطع منحنى الاقتران ق مع محور السينات هي (١ ، ٠)، (٣ ، ٠).

(٢) عدد مرات التغيّر في إشارة الاقتران ق: مرتان.

(٣) أصفار الاقتران ق(س) هي ١ ، ٣ .

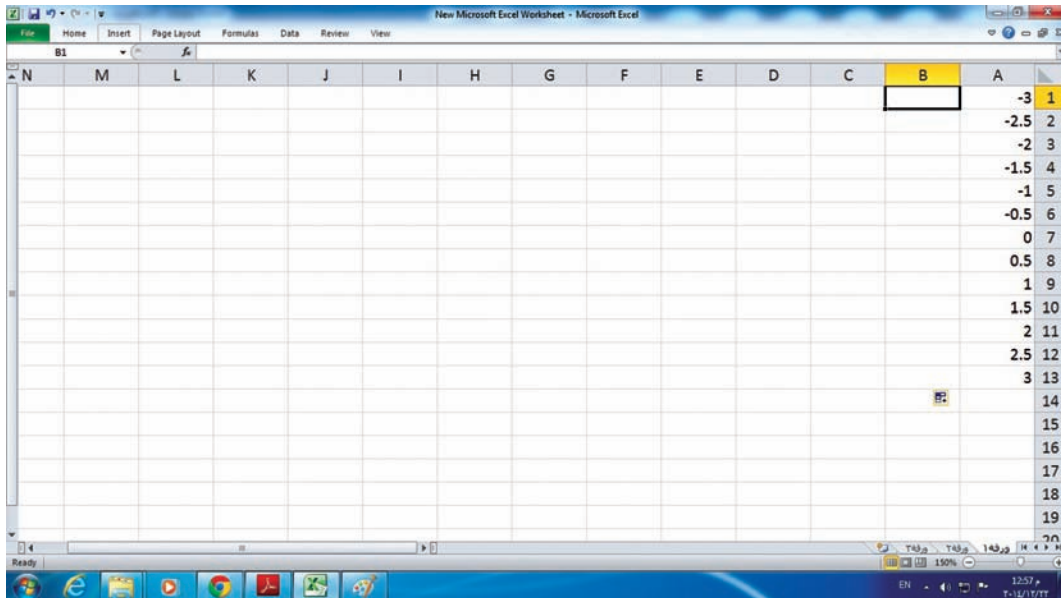
(٤) معادلة محور التماثل هي $s = \frac{-b}{2a} = 2$

مثال (٣)

باستخدام برمجية، اكسل (Excel) ارسم منحنى ق(س) = $s^3 + 1$ ، $s \in [-3, 3]$ ومن خلال الرسم جد عدد المرات التي يقطع بها منحنى الاقتران ق محور السينات، وعدد مرات التغيّر في إشارة ق.

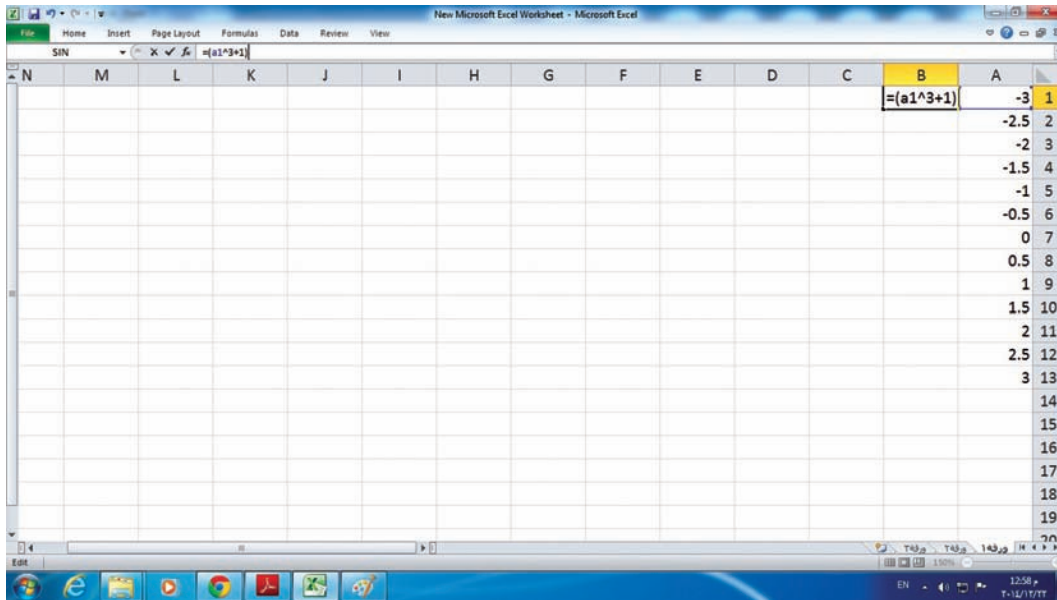
الحل

(١) شغل برمجية اكسل، ثم اختر عمودا وليكن العمود (A)، وضع المؤشر في الخلية (A1)، واكتب القيمة (٣-)، ثم ضع المؤشر في الخلية (A2) واكتب القيمة الآتية للمتغير س وهي (٢,٥-).
(٢) ظلل الخليتين في العمود (A) ثم اسحب المؤشر للأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير س، وهي (٣) كما في الشكل (٢-٢).



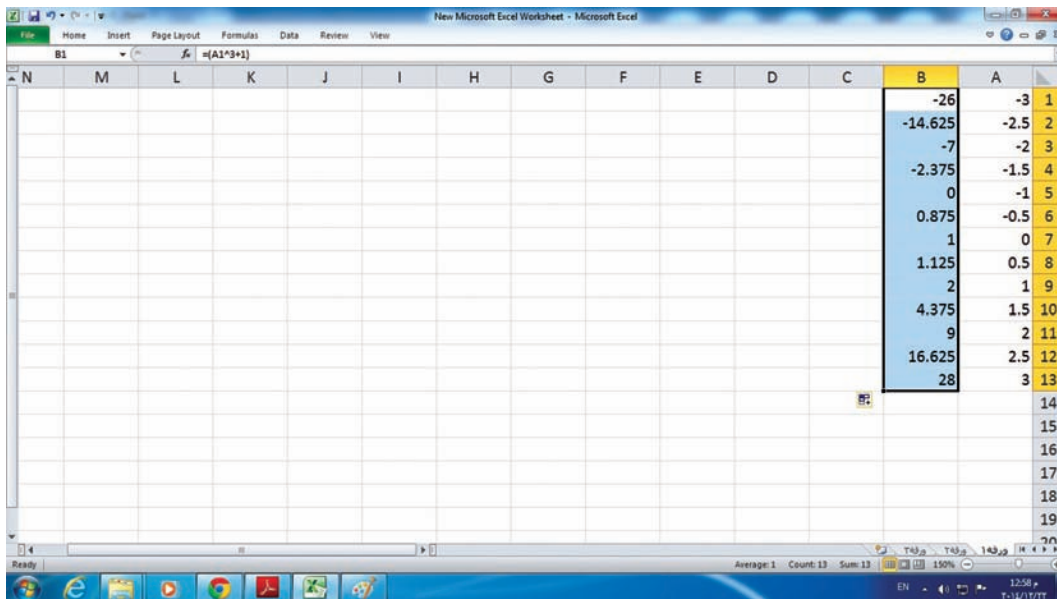
الشكل (٢-٢).

٣) ضع المؤشر في الخلية (B1) واكتب قاعدة الاقتران $= (A1^3+1)$ ثم انقر (Enter). كما في الشكل (٣-٢).



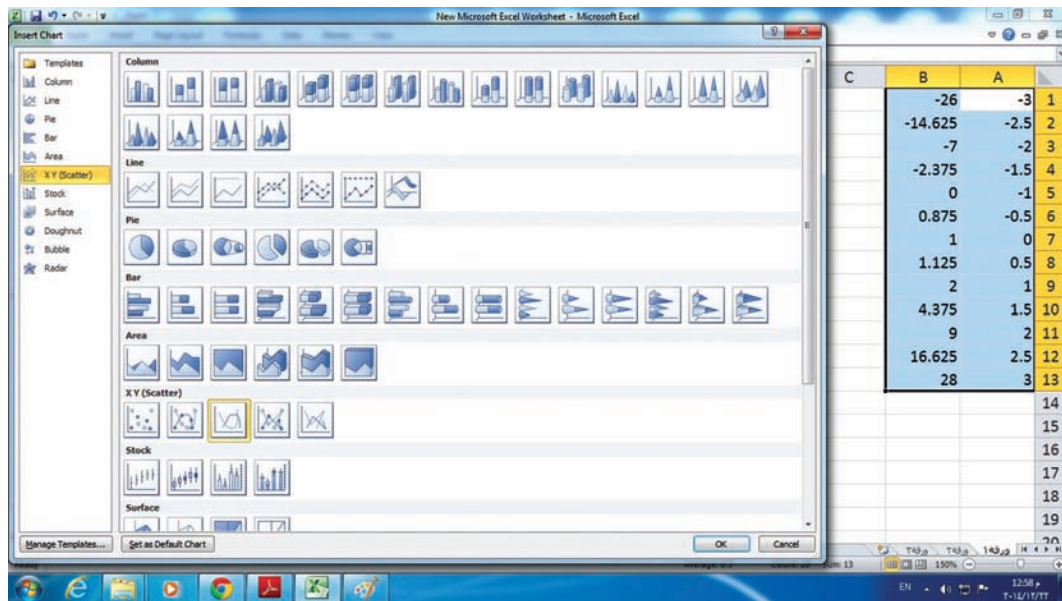
الشكل (٣-٢).

٤) ضع المؤشر في الخلية (B1) واسحب المؤشر إلى جميع الخلايا لتظهر لك مجموعة صور قيم المتغير س في العمود (B) كما في الشكل (٤-٢).



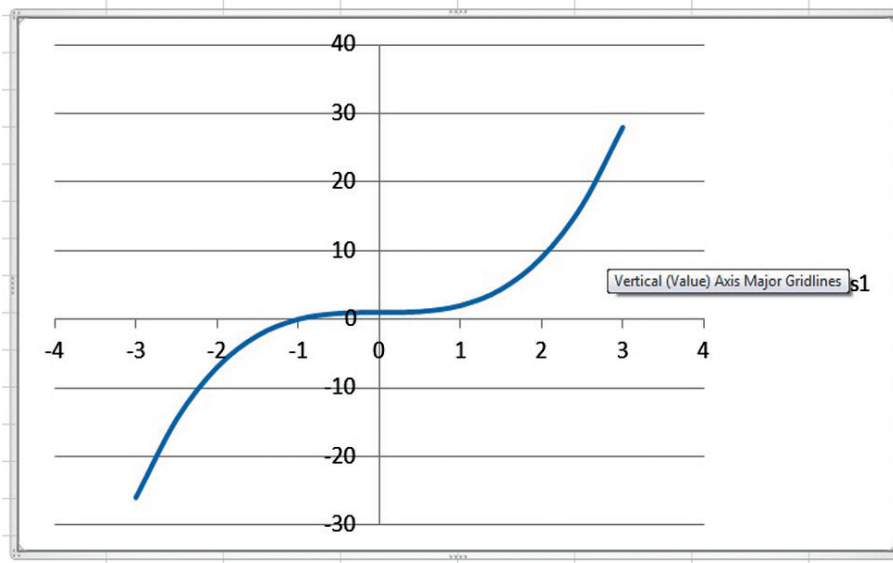
الشكل (٤-٢).

٥) ظلل العمودين (A ، B) واختر من تبويبة (إدراج) مجموعة مخططات. نوع المخطط (Line) ثم اختر من الأشكال (س، ص مبعثر) (xy- scatter)، كما في الشكل (٢-٥).



الشكل (٢-٥).

٦) اختر نوع المنحنى ثم انقر (موافق) ليظهر لك رسم منحنى الاقتران:
ق(س) = س^٣ + ١ بالفترة [-٣، ٣] كما في الشكل (٢-٦).



الشكل (٢-٦).

نلاحظ من الرسم أن:

عدد المرات التي قطع بها منحنى ق محور السينات: مرة واحدة فقط وهي النقطة (٠، ١)، وعدد مرات التغير في إشارة ق مرة واحدة فقط.



ما إشارة العامل الرئيس للاقتراح ق في المثال السابق؟

وما علاقة ذلك بتزايد الاقتراح ق على كل مجاله؟

تدريب (١)

باستخدام برمجية اكسل ارسم منحنى الاقتراح ق:

ق(س) = $-8 - 3س$ ، $س \in [-2, 4]$ ، ثم جد عدد المرات التي يقطع بها منحنى الاقتراح ق محور السينات، وعدد مرات التغير في إشارة ق.



ما إشارة العامل الرئيس للاقتراح ق في تدريب (١)؟

وما علاقة ذلك بتزايد الاقتراح ق أو تناقصه على كل مجاله؟

تدريب (٢)

ارسم منحنى ق(س) = $2س^3 + 1س$ ، $س \in [-5, 5]$ ثم أجب عن كل مما يأتي:

(١) جد عدد المرات التي يقطع بها منحنى الاقتراح ق محور السينات.

(٢) عدد مرات التغير في إشارة ق.



ما إشارة العامل الرئيس للاقتراح ق في تدريب (٢)؟

وما علاقة ذلك بتزايد الاقتراح ق أو تناقصه على كل مجاله؟

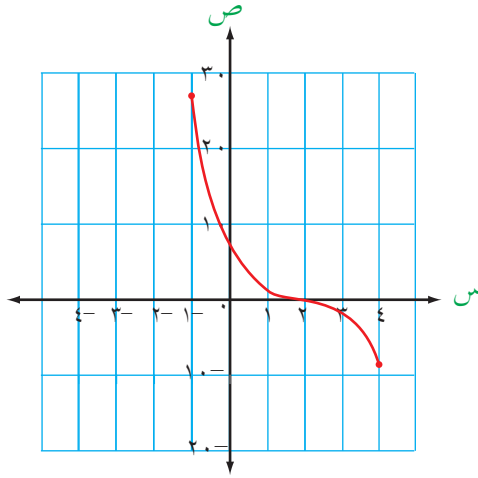
ماذا تلاحظ؟

لا بد أنك توصلت من الأمثلة السابقة إلى القاعدة الآتية:

إذا كان ق(س) = $أس^3 + ب$ ، وكانت أ، ب $\in \mathbb{R}$ ، أ $\neq 0$ صفراً فإن:

منحنى ق(س) متزايد إذا كانت أ < 0 ، ومنحنى ق(س) متناقص إذا كانت أ > 0 .

مثال (٤)



الشكل (٧-٢).

ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = (س - ٢)^٣$ ، حيث $س \in [-١، ٤]$.

ومن خلال الرسم جد عدد المرات التي يقطع بها منحنى الاقتران $ق$ محور السينات .

الحل

يمثل الشكل (٧-٢) منحنى $ق$.

ونلاحظ من الرسم أن: منحنى $ق$ يقطع محور السينات في نقطة واحدة فقط، وهي $(٠، ٢)$ ، وعدد مرات التغير في إشارة $ق$ مرة واحدة فقط.

تدريب (٣)

ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = س٣ + ٤$ بالفترة $[-٤، ٤]$ ومن خلال الرسم جد عدد المرات التي يقطع بها منحنى الاقتران $ق$ محور السينات وعدد مرات التغير في إشارة $ق$.

ماذا تلاحظ من خلال دراستك مثال (٤) وحل تدريب (٣)؟

نشاط

استخدم برمجية (إكسل) لرسم الاقترانات الآتية، واستخدم الرسومات في إيجاد علاقة بين عدد المرات التي يقطع بها منحنى $ق$ اقتران $ق$ محور السينات.

$$س \in [-٦، ٦]$$

$$(١) ل(س) = س٣ - ٨$$

$$س \in [-٩، ٩]$$

$$(٢) هـ(س) = س٣ - ٣$$

$$س \in [-١٢، ١٢]$$

$$(٣) ك(س) = (س - ٦)٣$$

• ماذا تلاحظ؟

• ما علاقة منحنى كل من الاقترانات ل، هـ، ك بمنحنى الاقتران $ق(س) = س٣$ ؟

• سجل ملاحظاتك.

تمارين و مسائل

(١) ارسم منحنى كل من الاقترانات الآتية في الفترة $[-٩, ٩]$ ، وبين في ما إذا كان كل منها متزايداً أم متناقصاً.

أ (ق (س) $= ٣س٣ + ٣$ ب (ك (س) $= ٢٧ - ٣س$
 ج (ل (س) $= ١ - ٣س$ د (هـ (س) $= (١ - س)(١ + س + س٢)$

(٢) استخدم برمجية اكسل لرسم منحنيات كل من الاقترانات الآتية:

أ (ق (س) $= (١ - ٣س٢)$ ، س $\in [-٤, ٤]$ ،
 ب (هـ (س) $= ٧ + ٣س$ ، س $\in [-٢٠, ٢٠]$ ،
 ج (ل (س) $= ٣(١٠ + س)$ ، س $\in [-٣٠, ٠]$ ،
 د (م (س) $= (س - \frac{١}{٢})٣$ ، س $\in [-٢, ٢]$ ،

(٣) إذا كان ق كثير حدود معرفاً على الفترة $[-٢, ٤]$ ، وكان عدد مرات التغير في إشارة ق ثلاث مرات فقط، بالاعتماد على الجدول الآتي الذي يمثل بعض قيم ق، أجب عما يليه:

س	٢-	١-	٠	١	٢	٣	٤
ق(س)	١-	٤,٥	١	٥,٥-	٩-	٣,٥-	١٧

أ (ارسم رسماً تقريبياً لمنحنى ق.

ب (جد عدد نقاط تقاطع منحنى ق مع محور السينات.

(٤) حلّ المسألة الواردة في مقدّمة الدرس

(٥) هل هناك علاقة بين عدد أصفار الاقتران، وعدد مرات التغير في إشارته؟ دَعِّم إجابتك بأمثلة.

النتائج

- تحدد مجال اقتران حقيقي.
- ترسم منحنى اقتران حقيقي.

أرادت شركة تنفيذ بناء جسر فوق مسطح مائي، بحيث يكون الجسر مدعومًا بأعمدة فولاذية دائرية الشكل قطر كل عمود منها ٣٠ سم، إذا كانت كمية الفولاذ اللازمة لعمل عمود يستطيع أن يحمل وزنًا ما تعطى بالعلاقة $Q = 8Q^2$ حيث Q : الوزن بالطن.
 Q : قطر العمود بالسم.
 اكتب قاعدة يتم من خلالها حساب قطر العمود اللازم لدعم وزن معطى مثل Q ؟

تعرفت سابقًا على طريقة رسم اقترانات كثيرات الحدود ولاحظت أن مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية (ح).
 وستتعرف الآن كيف تحدد مجال اقترانات حقيقية أخرى وترسم منحنياتها.

تعريف

يسمى الاقتران Q اقتراناً حقيقياً إذا كان مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) أو مجموعة جزئية منها، ومداه مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) أو مجموعة جزئية منها.

اقتران الجذر التربيعي

يسمى $Q(s) = \sqrt{h(s)}$ ، $h(s) \geq 0$. حيث h اقتران كثير حدود، باقتران الجذر التربيعي.
 ولرسم منحنى اقتران الجذر التربيعي نحتاج إلى تحديد مجال الاقتران ثم إيجاد صور بعض عناصر المجال وتمثيلها في المستوى البياني والتوصيل بينها بخط منحنٍ أملس.

وبشكل عام: إذا كان $q(s) = \sqrt{s}$ حيث q اقتران كثير حدود فان مجال الاقتران q هو مجموعة جميع قيم s الحقيقية التي تجعل $q(s) \geq 0$.

مثال (١)

إذا كان $q(s) = \sqrt{s}$ ، حدد مجال q وارسم منحناه.

الحل

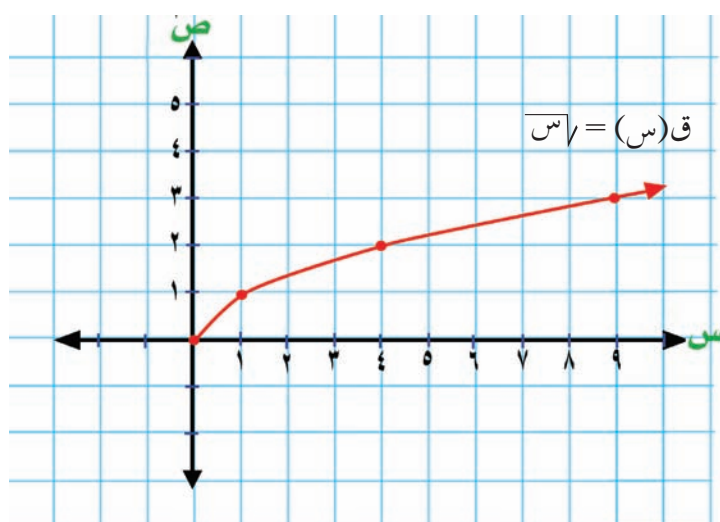
لايجاد مجال q نحل المتباينة $s \geq 0$ وعليه فإن:

مجال $q = \{s : s \geq 0\} = [0, \infty)$.

كون جدولاً يتضمن قيماً من المجال وصورها في قاعدة الاقتران q كما يلي:

س	٠	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	١	٤	٩
ق(س)	٠	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٣

وعند تمثيل هذه النقاط في المستوى البياني والتوصيل بينها بخط منحنٍ أملس تحصل على الشكل (٢ - ٨).



الشكل (٢ - ٨).

مثال (٢)

إذا كان $y = \sqrt{x+1}$ ، حدد مجال y وارسم منحناه.

الحل

لايجاد مجال y نحل المتباينة $x+1 \geq 0$ ، وعليه فإن:

مجال $y = \{x : x \geq -1\} = [-1, \infty)$.

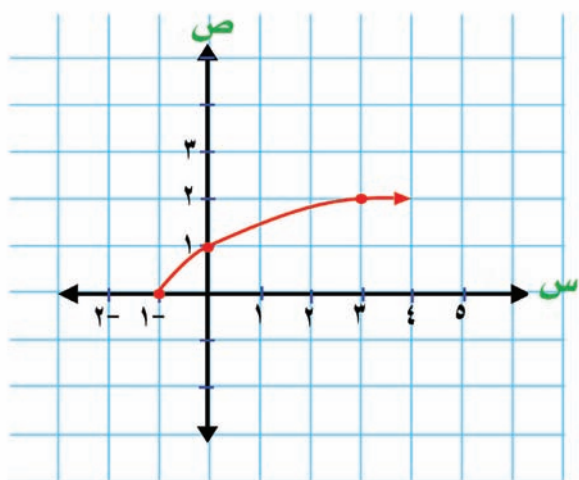
ومن خلال كتابة بعض الأزواج المرتبة التي تمثل y مثل:

$(-1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(3, 2)$ ، وتمثيلها في

المستوى البياني والتوصيل بينها بخط منحنٍ

أملس نحصل على منحنى y كما في الشكل

(٢-٩).



لاحظ أن منحنى الاقتران $y = \sqrt{x+1}$

ينتج عن انسحاب ليسار بمقدار وحدة واحدة

لمنحنى الاقتران $y = \sqrt{x}$.

الشكل (٢-٩).

تدريب (١)

إذا كان $y = \sqrt{x-3}$ ، فجد مجال الاقتران y وارسم منحناه.

ماذا تلاحظ على منحنى الاقتران y ؟ وما علاقته بمنحنى الاقتران $y = \sqrt{x}$ ؟

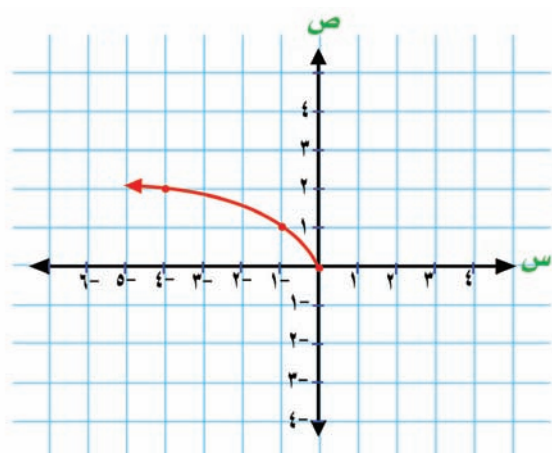
إذا كان ك(س) = $\sqrt{-س}$ فحدد مجال ك وارسم منحناه، واستنتج منه رسم منحنى الاقتران ه(س) = $\sqrt{س+٢}$.

الحل

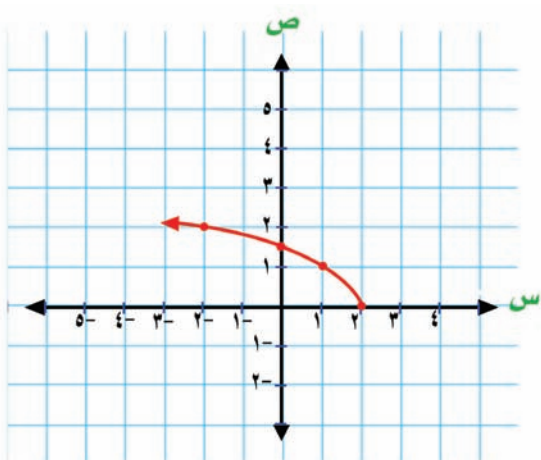
لايجاد مجال ك حل المتباينة $س \leq ٠$.

∴ مجال ك = $(-∞، ٠]$ والجدول الآتي يمثل بعض القيم للاقتران ك:

س	٠	١-	٢-	٣-	٤-
ك(س)	٠	١	$\sqrt{٢}$	$\sqrt{٣}$	٢



الشكل (٢ - ١٠).



الشكل (٢ - ١١).

وبتمثيل هذه النقاط بالمستوى البياني، والتوصيل بينها بخط منحن أملس نحصل على منحنى الاقتران ك كما في الشكل (٢ - ١٠).
لاحظ أن منحنى ك(س) انعكاس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س}$ في محور الصادات.

ولرسم منحنى الاقتران ه(س) = $\sqrt{س+٢}$ ، فإن مجال ه = $(-٢، ∞)$ (لماذا؟)

وعليه فإن منحنى ه ينتج عن انسحاب منحنى ك(س) = $\sqrt{-س}$ باتجاه اليمين بمقدار وحدتين (لماذا؟) كما في الشكل (٢ - ١١).

نستنتج مما سبق أنه:

إذا كان هـ(س) = $\sqrt{s}$ ، $s \geq 0$ فإن:

- (١) منحنى ق(س) = $\sqrt{s - 4}$ ناتج عن انسحاب منحنى هـ بمقدار ٤ وحدة لليمين.
- (٢) منحنى ل(س) = $\sqrt{s + 4}$ ناتج عن انسحاب منحنى هـ بمقدار ٤ وحدة لليسار.
- (٣) منحنى ع(س) = $\sqrt{s + 4}$ ناتج عن انسحاب منحنى هـ للأعلى بمقدار ٤ وحدة.
- (٤) منحنى م(س) = $\sqrt{s - 4}$ ناتج عن انسحاب منحنى هـ بمقدار ٤ وحدة للأسفل.

تدريب (٢)

ارسم منحنى الاقتران ك(س) = $\sqrt{s - 2}$ ، وقارنه بمنحنى ق(س) = $\sqrt{s}$

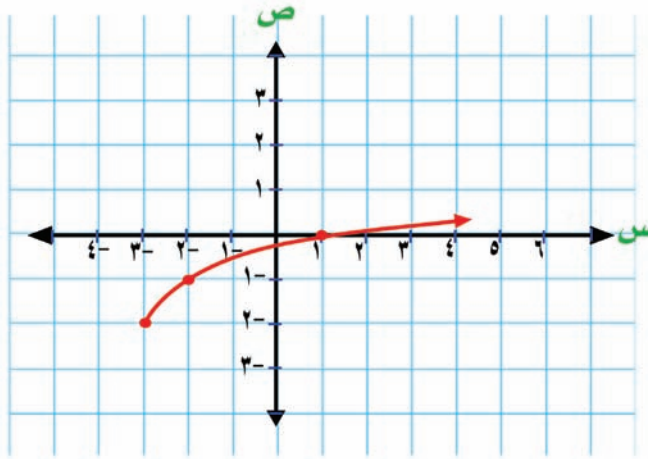
مثال (٤)

حدّد مجال الاقتران ل(س) = $\sqrt{s + 3}$ ، وارسم منحناه

الحل

$$\text{مجال ل} = \{s : s \geq -3\} = [-3, \infty)$$

منحنى ل ناتج عن سحب منحنى $\sqrt{s}$ ٣ وحدات لليسار و وحدتين للأسفل.
ويمثل الشكل (٢-١٢) منحنى الاقتران ل.



الشكل (٢-١٢).

تدريب (٣)

إذا كان ك(س) = $\sqrt{s - 1} + 4$ ، فحدد مجاله وارسم منحناه.

- ما علاقة منحنى الاقتران ك في تدريب (٣) بمنحنى الاقتران ق(س) $\sqrt{1-s}$ ؟
- إذا كان ق(س) $= \sqrt{1-s}$ ، هـ(س) $= \sqrt{1-s}$ ، فهل ق(س) = هـ(س) ؟ برّر إجابتك.

مثال (٥)

إذا كان ق(س) $= \sqrt{1-s^2}$ ، فحدد مجال ق وارسم منحناه.

الحل

لتحديد مجال ق نجد أصفار المقدار $1-s^2$ وندرس إشارته حول كل منها.

(إيجاد أصفار الاقتران)

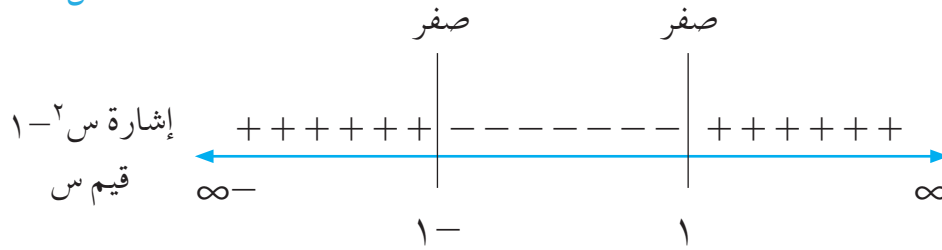
$$1-s^2 = 0$$

(تحليل الطرف الأيسر)

$$(1-s)(1+s) = 0$$

(حل المعادلة الناتجة)

$$s = 1, s = -1$$



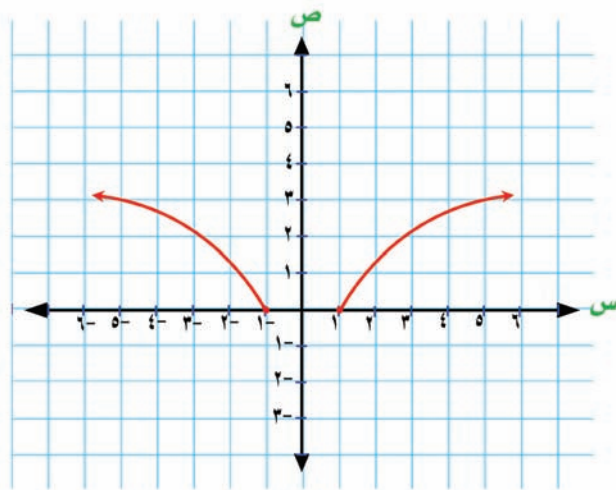
وبما أن إشارة $1-s^2$ سالبة في الفترة $(-1, 1)$ فإن ق غير معرّف في هذه الفترة.

مجال ق $= \{s : s \geq 1 \text{ أو } s \leq -1\}$

إذن مجال ق هو الفترتان

$$(-\infty, -1] \text{ ، } [1, \infty)$$

ويمثل الشكل (٢-١٣) منحنى ق.



الشكل (٢-١٣).

تدريب (٤)

إذا كان الاقتران $Q(s) = \sqrt{s^2 - 4}$ ، فحدد مجال Q وارسم منحناه.

الاقتران النسبي على الصورة $Q(s) = \frac{A}{H(s)}$

تعلمت سابقاً أن الاقتران الذي يمكن كتابته على الصورة $Q(s) = \frac{L(s)}{H(s)}$ حيث L ، H كثيري حدود ، $H(s) \neq 0$ صفرًا يسمى اقترانا نسبياً. وستقتصر دراستنا في هذه الوحدة على تحديد المجال ورسم منحنى الاقتران $Q(s) = \frac{A}{H(s)}$ بحيث $H(s)$ اقتران خطي، A عدد حقيقي.

مثال (٦)

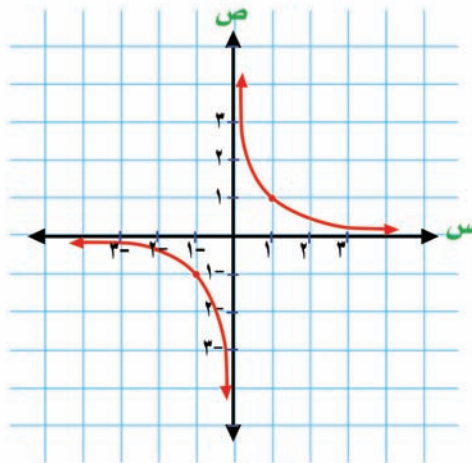
ارسم منحنى الاقتران النسبي $Q(s) = \frac{1}{s}$

الحل

لرسم منحنى الاقتران $Q(s) = \frac{1}{s}$ نكون الجدول الآتي أولاً:

١ -	$\frac{1}{2}$ -	$\frac{1}{3}$ -	$\frac{1}{4}$ -	$\frac{1}{10}$ -	→ ←	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	١	س
١ -	٢ -	٣ -	٤ -	١٠ -	غير معرف	٤	٣	٢	١	ق(س)

والشكل (٢ - ١٤) يمثل منحنى الاقتران $Q(s) = \frac{1}{s}$ ، $s \neq 0$ صفرًا.



الشكل (٢ - ١٤).

نلاحظ من الرسم أنه إذا كانت قيم s موجبة وتقترب من الصفر فإن قيم Q تصبح كبيرة جداً وتزداد بلا حدود، وكلما كانت قيم s كبيرة فإن قيم Q تكون صغيرة جداً وتقترب من الصفر ولكنها تبقى موجبة، ونلاحظ أيضاً أنه إذا كانت قيم s سالبة وتقترب من الصفر فإن قيم Q تصغر بلا حدود، وإذا صغرت قيم s بدرجة كبيرة فإن قيم Q تقترب من الصفر ولكنها تبقى سالبة.

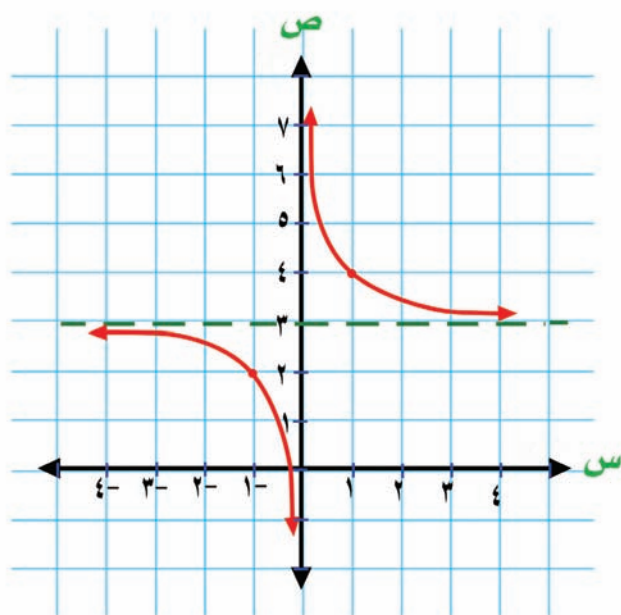
وبالاعتماد على الجدول والمنحنى البياني للاقتران $ق(س) = \frac{1}{س}$ ، نلاحظ أن مجال الاقتران $ق$ هو $ح - \{0\}$ ، أي أن $ق$ غير معرف عند $س = 0$ صفرًا.

مثال (٧)

ارسم منحنى الاقتران $هـ(س) = 3 + \frac{1}{س}$ وحدّد مجاله، حيث $س \neq 0$ صفرًا.

الحل

مجال $هـ = ح - \{0\}$ ، وبالاعتماد على منحنى الاقتران $ق(س) = \frac{1}{س}$ فإنّ منحنى الاقتران $هـ$ ينتج عن انسحاب للأعلى بمقدار ٣ وحدات لمنحنى $ق = \frac{1}{س}$ ، والشكل (٢ - ١٥) يمثل منحنى $هـ$.



الشكل (٢ - ١٥).

تدريب (٥)

حدد مجال الاقتران $ق(س) = \frac{3-}{س}$ ، وارسم منحناه.

مثال (٨)

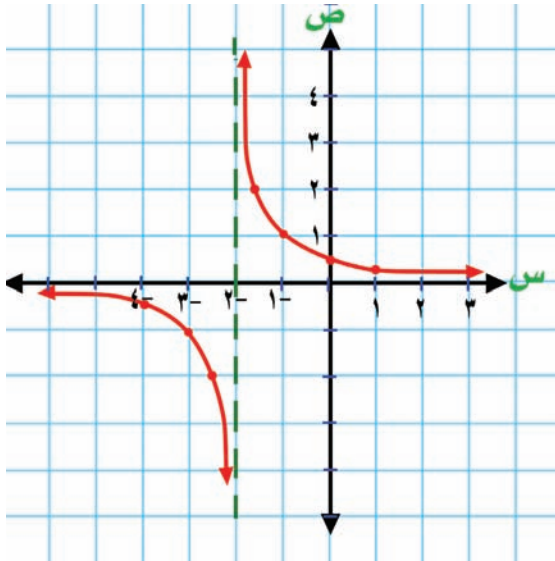
حدد مجال ك (س) $\frac{1}{س + ٢} =$ ، وارسم منحناه.

الحل

مجال ك = ح - { ٢ - } ، (لماذا؟)

وبالاعتماد على منحنى الاقتران ق (س) $\frac{1}{س} =$
نلاحظ أن منحنى ك ينتج عن انسحاب لليساار
بمقدار وحدتين لمنحنى ق (س) $\frac{1}{س} =$. كما في

الشكل (٢ - ١٦) .



الشكل (٢ - ١٦) .

وبصورة عامة

ينتج منحنى ك (س) $\frac{1}{س - أ} =$ عن انسحاب منحنى ق (س) $\frac{1}{س} =$ باتجاه اليمين بمقدار أ
وحدة، حيث $أ < ٠$.

كما أن منحنى ل (س) $\frac{1}{س + أ} =$ ينتج عن انسحاب منحنى ق (س) $\frac{1}{س} =$ باتجاه اليسار
بمقدار أ وحدة، حيث $أ < ٠$.

تدريب (٦)

حدد مجال الاقتران ق (س) $\frac{٢}{س + ١} =$ وارسم منحناه.

مثال (٩)

حدد مجال الاقتران $ق(س) = \frac{س}{١-س}$ وارسم منحناه.

الحل

مجال $ق = ح - \{ ١ \}$ ، (لماذا؟)

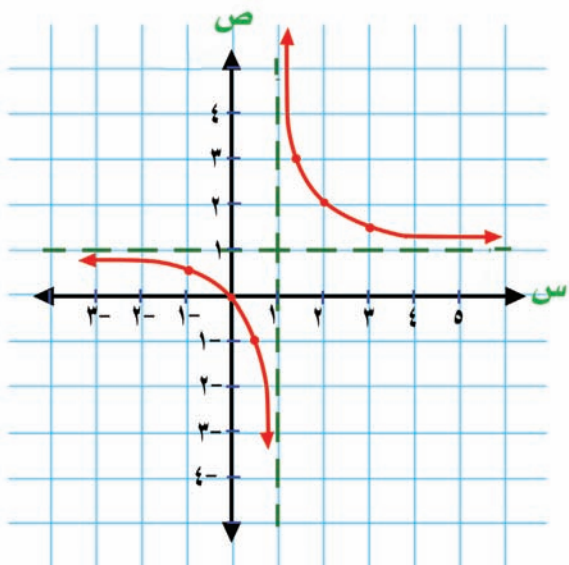
ولرسم منحنى $ق$ يمكن كتابة الاقتران $ق$ على صورة اقتران نسبي بسطه ثابت.

$$\frac{١}{١-س} + \frac{١-س}{١-س} = \frac{١+١-س}{١-س} = \frac{س}{١-س} = ق(س)$$

يعني أن $ق(س) = \frac{١}{١-س} + ١$ واعتماداً على

منحنى $هـ(س) = \frac{١}{س}$ سيكون منحنى $ق$ تركيب

انسحابين أحدهما لليمين بمقدار وحدة واحدة والآخر للأعلى بمقدار وحدة واحدة كما في الشكل (١٧-٢).



الشكل (١٧ - ٢).

لاحظ أن:

إذا كان $ق(س)$ اقترانا نسبيا فإن مجاله $ح - \{ \text{أصفار المقام} \}$.

تدريب (٧)

$$\text{حدد مجال الاقتران } ل(س) = \frac{س+٥}{س-٣}.$$

الاقتران الكسري

تعريف

يسمى الاقتران ك كسرياً إذا أمكن كتابته على الصورة ك(س) = $\frac{هـ(س)}{م(س)}$ حيث هـ، م اقترانات حقيقية، م(س) $\neq$ صفرًا

ولتحديد مجال الاقتران الكسري فإننا نجد مجال كل من البسط والمقام و أصفار المقام، ويكون مجال الاقتران الكسري = مجال البسط $\cap$ مجال المقام - {أصفار المقام} .

مثال (١٠)

$$\text{حدد مجال الاقتران ق(س) = } \frac{\sqrt{1-s}}{s^2-4}$$

الحل

نجد مجال كل من البسط والمقام و أصفار المقام ثم نطبق القاعدة السابقة كآآتي:
 يكون البسط معرفاً عندما $s-1 \leq$ صفرًا ومنها تكون $s \leq 1$ ، أي أن:
 مجال البسط = $[-1, \infty)$ ، و بما أن المقام كثير حدود فإن مجال المقام يساوي ح
 أما أصفار المقام فهي -2 ، 2 وعليه يكون:
 مجال ق(س) = $[-1, \infty) \cap (-\infty, 1] - \{2\} = [-1, 1] - \{2\}$

تدريب (٨)

$$\text{حدد مجال الاقتران ق(س) = } \frac{\sqrt{3-s}}{\sqrt{s-8}}$$



ما الفرق بين الاقتران النسبي، والاقتران الكسري، ومجال كل منهما؟

تمارين و مسائل

(١) حدد مجال كل من الاقتارات الآتية:

(ب) هـ (س) $\sqrt{s+4} = 5$

(أ) ق (س) $\sqrt{s-6}$

(د) ز (س) $\frac{1}{s+2}$

(ج) ع (س) $\sqrt{s-1} - 3$

(و) م (س) $\frac{\sqrt{s+6}}{s+2}$

(هـ) ك (س) $\frac{s}{s-3}$

(ح) و (س) $\sqrt{\frac{s-2}{s+7}}$

(ز) ل (س) $\frac{\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{1-s^2}}$

(ط) د (س) $\frac{s^2-4}{s(s-1)}$

(٢) ارسم منحنى كل من الاقتارات الآتية:

(ب) هـ (س) $\sqrt{s+1} = 2$

(أ) ق (س) $\sqrt{s-3}$

(د) م (س) $\frac{2-s}{s}$

(ج) ع (س) $\sqrt{s-1}$

(و) ل (س) $3s = 1$

(هـ) ك (س) $1 + \frac{2}{s+2}$

(٣) ارسم منحنى كل من ق (س) $\sqrt{s+3}$ ، هـ (س) $\sqrt{s-3}$.
وقارن بين منحييهما .

(٤) جد مجال كل من الاقتارين الآتين:

(ب) هـ (س) $\sqrt[4]{s+5}$

(أ) ق (س) $\sqrt[3]{s-2}$

النتائج

- تتعرف الاقتران المتشعب، وتمثله بيانياً.
- تتعرف اقتران القيمة المطلقة وتمثله بيانياً.
- تتعرف اقتران أكبر عدد صحيح وتمثله بيانياً.

Piecewise Function

أولاً: الاقتران المتشعب

إذا أردت أن تعرف كيف تتم عملية حساب تعرفه استهلاك الطاقة الكهربائية للمنازل ستجد أن التعرفة في فاتورة الكهرباء للاشتراك المنزلي مقسمة الى فئات كالآتي:

الفئة	كمية الاستهلاك الشهري	التعرفة
الأولى	من ١ - ١٦٠ كيلو واط / ساعة	٣٣ فلس / كيلو واط
الثانية	من ١٦١ - ٣٠٠ كيلو واط / ساعة	٧٧ فلس / كيلو واط
الثالثة	من ٣٠١ - ٥٠٠ كيلو واط / ساعة	٨٦ فلس / كيلو واط
الرابعة	أكثر من ٥٠٠ كيلو واط / ساعة	١١٤ فلس / كيلو واط

والآن هل تستطيع كتابة اقتران يمثل التعرفة وكيفية حسابها لكل شريحة استهلاك (س) كيلو واط / ساعة؟

لاحظ أن الاقتران في المسألة السابقة سوف يأخذ الشكل الآتي:

$$\left. \begin{array}{l}
 ٣٣ \text{ س} \\
 ١٦٠ \geq \text{س} \geq ١, \\
 ٧٧(١٦٠ - \text{س}) + ٣٣ \times ١٦٠, \\
 ٣٠٠ > \text{س} \geq ١٦٠, \\
 ٨٦(٣٠٠ - \text{س}) + ٧٧ \times (١٦٠ - ٣٠٠) + ٣٣ \times ١٦٠, \\
 ٥٠٠ > \text{س} \geq ٣٠٠, \\
 ١١٤(٥٠٠ - \text{س}) + ٨٦ \times ٢٠٠ + ٧٧ \times ١٤٠ + ٣٣ \times ١٦٠, \\
 ٥٠٠ < \text{س}
 \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$

نلاحظ من كتابتنا للاقتران ق أن له أكثر من قاعدة وكل قاعدة معرفة على مجال معين، مثل هذا الاقتران يسمى **اقتراً متشعباً**، والنقطة (س)، ق(س) التي تتغير حولها قاعدة ق تسمى **نقطة التشعب**.



احسب قيمة استهلاك س كيلو واط / ساعة عندما :

(١) س = ١٥٠ كيلو واط (٢) س = ٣٥٠ كيلو واط

مثال (١)

ارسم منحنى الاقتران:

$$ق(س) = \begin{cases} -س + ٣ , & س \geq ٣ \\ ٢ , & س < ٣ \end{cases}$$

ثم جد ق(١) ، ق(٣) ، ق(٦).

الحل

(يحسب من القاعدة الأولى لأن $٣ > ١$)

$$ق(١) = -١ + ٣$$

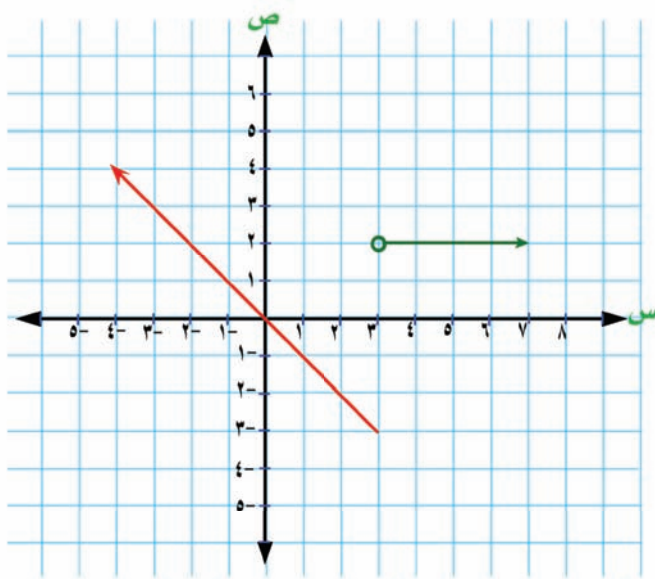
(يحسب من القاعدة الأولى)

$$ق(٣) = -٣ + ٣$$

(يحسب من القاعدة الثانية لأن $٣ < ٦$)

$$ق(٦) = ٢$$

وبين الشكل (٢-١٨) منحنى الاقتران ق، حيث يتم تمثيل كل قاعدة في المجال المعرّف عليه تلك القاعدة وعلى الرسم البياني نفسه.



الشكل (٢-١٨).

لاحظ أن $س = ٣$ هي نقطة تشعب للاقتران ق وتحسب من القاعدة ق(س) = $-س + ٣$ وأن $س = ٣$ غير معرّف في القاعدة الثانية لذا توضع حلقة عند النقطة (٢، ٣) على المنحنى.

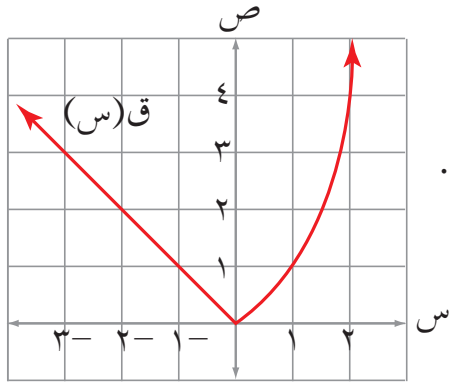
تدريب (١)

ارسم منحنى الاقتران ق حيث:

$$ق(س) = \begin{cases} 3-س & , 2 \geq س \\ 1+س^2 & , 2 > س \\ 2س^2 & , 2 \leq س \end{cases}$$

ثم جد ق(٢-) ، ق(٠) ، ق(٤).

مثال (٢)



الشكل (٢-١٩).

الشكل (٢-١٩) يمثل منحنى الاقتران ق

(١) جد الإحداثي السيني لنقاط التشعب لمنحنى الاقتران ق.

(٢) اكتب قاعدة الاقتران ق.

الحل

(١) الإحداثي السيني لنقطة التشعب لمنحنى ق يساوي صفرًا.

(٢) نلاحظ أن الجزء المرسوم على الفترة $(-\infty, 0]$ في الشكل (٢-١٩) يمثل منحنى

الاقتران ق(س) = -س، أما الجزء المرسوم على الفترة $(0, \infty)$ في الشكل نفسه فيمثل

منحنى الاقتران ق(س) = س^٢، وعليه فإن الاقتران ق يكتب على شكل اقتران متشعب

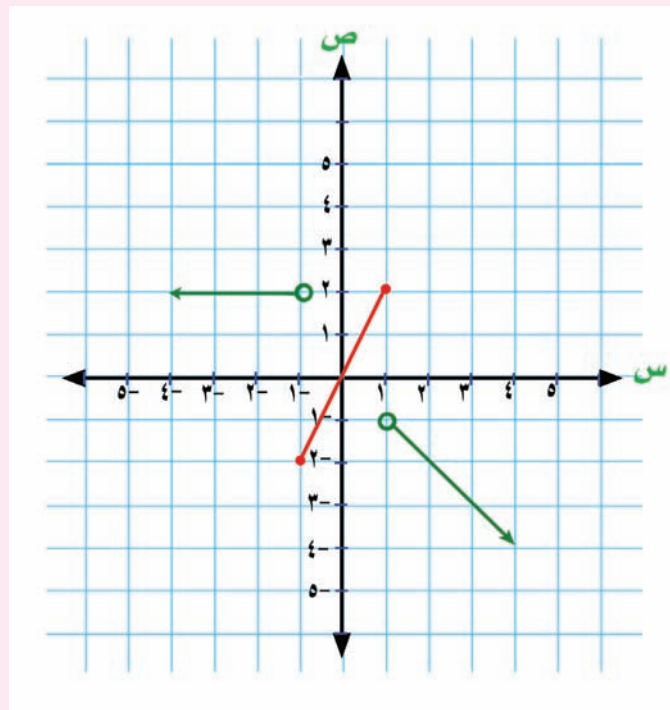
كالآتي:

$$ق(س) = \begin{cases} -س & , س \geq ٠ \\ س^2 & , س < ٠ \end{cases}$$

لماذا لم تُوضَع حلقة على منحنى ق عند نقطة التشعب في الشكل (٢ - ١٩)؟

تدريب (٢)

الشكل (٢ - ٢٠) يمثل منحنى الاقتران ق والمعرّف على ح.



الشكل (٢ - ٢٠).

(١) جد الإحداثي السيني لنقاط التشعب لمنحنى الاقتران ق.

(٢) اكتب قاعدة الاقتران ق.

تمارين و مسائل

(١) إذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} -س + ٥ ، \quad س > ٠ \\ ٤ ، \quad ٠ \leq س < ٣ \\ ١ + س ، \quad س \leq ٣ \end{array} \right\} = ق(س)$$

فجد: ق(-١)، ق(٠)، ق(٣)، ق(٧)، ثم ارسم منحنى ق.

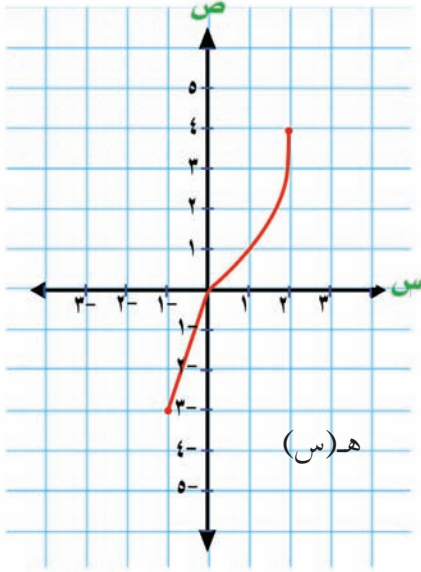
(٢) إذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} -س + ٢ ، \quad س \geq ٠ \\ ١ + س^٢ ، \quad س < ٠ \end{array} \right\} = م(س)$$

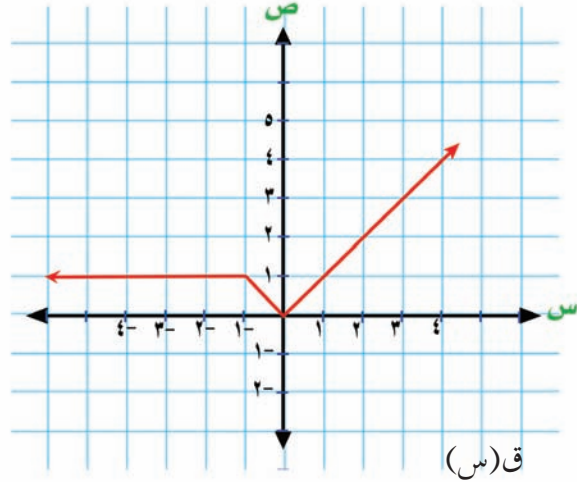
فجد: م(-٣)، م(٠)، م(٢)، ثم ارسم منحناه.

(٣) اكتب قاعدة كل اقتران من الاقترانات المرسومة في الشكلين الآتيين:

(٢١ - ٢)، (٢٢ - ٢).



الشكل (٢٢ - ٢).



الشكل (٢١ - ٢).

(٤) يتقاضى صاحب موقف سيارات بالأجرة مبلغ نصف دينار عن أول ساعة أو أي جزء منها،

ثم يتقاضى ٣٠ قرشاً عن كل ساعة أو أي جزء منها بعد ذلك، أجب عن كل مما يأتي:

أ) اكتب قاعدة الاقتران الذي يمثل الأجرة لهذا الموقف.

ب) ما نوع هذا الاقتران؟

ج) ارسم منحنى هذا الاقتران.

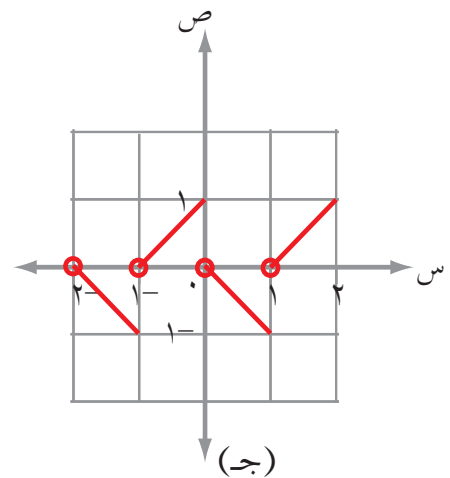
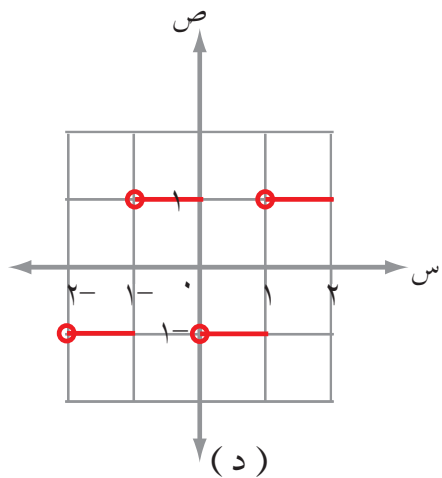
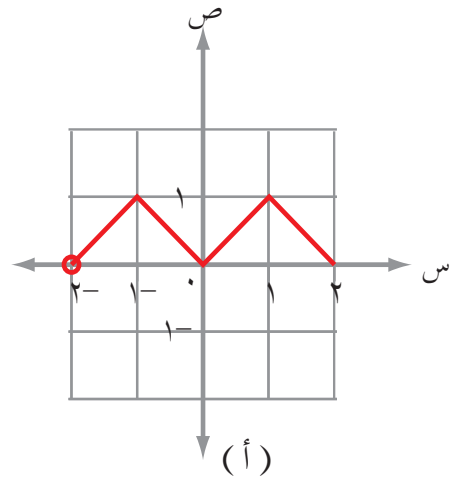
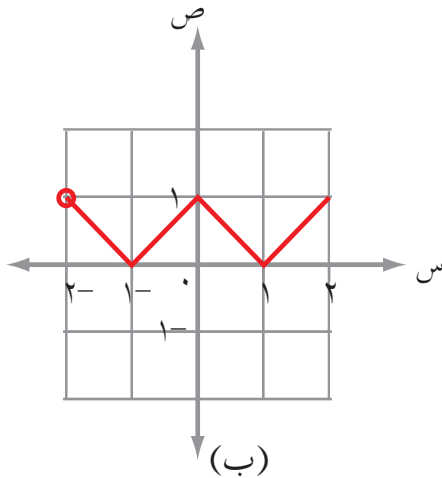
(٥) عامل في مصنع يعمل س ساعة في الأسبوع، إذا كانت أجرته (٤) دنانير في الساعة، ويحصل على أجر إضافية تعادل أجر ساعة ونصف عن كل ساعة عمل إذا كان عدد ساعات العمل أكثر من (٤٠) ساعة، اكتب الاقتران جـ(س) الذي يمثل الأجر الأسبوعية للعامل، حيث:

$$٠ \leq س \leq ٦٠$$

(٦)* إذا كان الاقتران:

$$ق(س) = \begin{cases} ١ - س & , ١ - \geq س > ٢ - \\ ١ + س & , ٠ \geq س > ١ - \\ ١ + س - & , ١ \geq س > ٠ \\ ١ - س & , ٢ \geq س > ١ \end{cases}$$

أي من الأشكال الآتية تعبر عن الاقتران ق(س)؟



* من أسئلة الاختبارات الدولية.



يدفع تاجر حبوب (١٠) دنانير عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه أجرة تحميل أو تنزيل، فإذا كانت الأعداد الموجبة تشير إلى عدد الأطنان التي تدخل إلى المستودع، والأعداد السالبة تشير إلى عدد الأطنان الخارجة من المستودع.

فهل تستطيع كتابة الاقتران الذي يمثل تكاليف التحميل أو التنزيل؟

أكمل الجدول الآتي الذي يشير إلى تكلفة التحميل أو التنزيل التي يدفعها التاجر.

٥	٣	١	صفر	٣-	٥-	عدد الأطنان س
	٣٠				٥٠	التكلفة بالدينار ق(س)

لاحظ أن الإشارة لا تؤثر في حساب التكلفة في عدد الأطنان الداخلة إلى المستودع والخارجة منه، وإنما تدل على اتجاه حركة الحبوب، وعند تعاملك مع الأعداد بغض النظر عن الإشارة فانك تستخدم القيمة المطلقة للعدد a التي يرمز لها بالرمز $|a|$.

فإذا كان $a \geq 0$ فان: $|a|$ تقرأ **القيمة المطلقة** للعدد a وتعني بُعد النقطة a عن الصفر على خط الأعداد. وبشكل عام فإن:

$$\left. \begin{array}{l} a \leq 0, \\ a > 0 \end{array} \right\} = |a|$$

فمثلاً: $3 = |3|$

$$4 = |4|$$

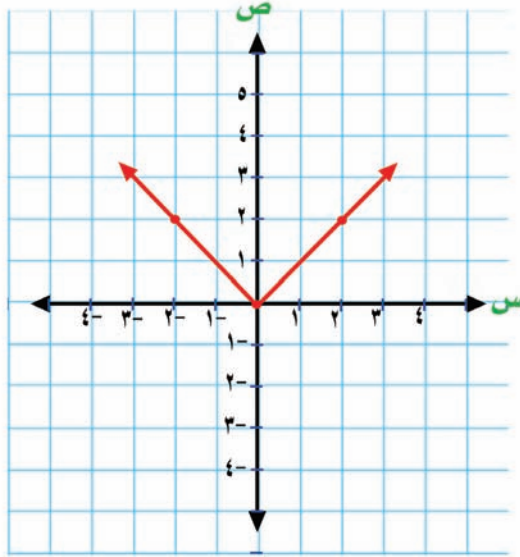
$$\frac{1}{2} = \left| \frac{1}{2} \right|$$

وبناء على ما سبق يمكن كتابة اقتران القيمة المطلقة $ق(س) = |س|$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة،

$$ق(س) = |س| = \begin{cases} س ، & س \geq ٠ \\ -س ، & س < ٠ \end{cases}$$

والشكل (٢ - ٢٣) يمثل رسم منحنى الاقتران $ق(س) = |س|$.

ولإعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة $ق(س) = |س|$ نتبع الخطوات الآتية:



الشكل (٢ - ٢٣).

- (١) نجد أصفار الاقتران $هـ$ داخل رمز القيمة المطلقة.
- (٢) نعين أصفار الاقتران $هـ$ على خط الأعداد وندرس الإشارة حول هذه الأصفار.
- (٣) تكون قاعدة الاقتران $ق$ هي $ق(س) = هـ(س)$ على الفترات التي تكون فيها إشارة $هـ$ موجبة. وتكون قاعدة الاقتران $ق$ هي $ق(س) = -هـ(س)$ على الفترات التي تكون فيها إشارة $هـ$ سالبة.

- (٤) تكتب قاعدة الاقتران $ق$ على شكل اقتران متشعب، وتكون الإحداثيات السينية لنقاط التشعب هي أصفار الاقتران $هـ$.

مثال (١)

أعد تعريف الاقتران $ق(س) = |س - ٢|$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة ثم ارسم منحناه.

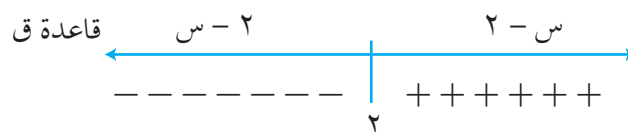
الحل

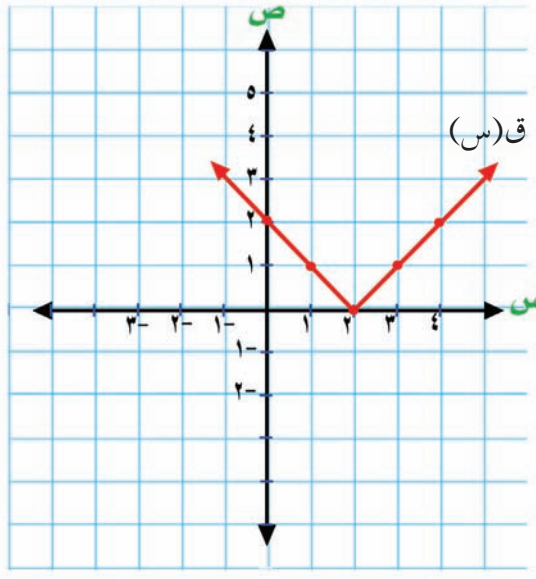
(إيجاد أصفار الاقتران داخل رمز القيمة المطلقة)

$$س - ٢ = ٠$$

(حل المعادلة الناتجة)

$$س = ٢$$





الشكل (٢٤ - ٢).

وبناء على ما سبق تكون قاعدة الاقتران ق كالآتي:

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ - س , & س \leq ٢ \\ س - ٢ , & س > ٢ \end{cases}$$

والشكل (٢٤ - ٢) يبين رسم منحنى الاقتران ق.



قارن بين منحنى ق(س) = |س - ٢| ومنحنى ق(س) = |س| من حيث الشكل العام ونقطة التقاطع مع محور السينات.

مثال (٢)

أعد تعريف الاقتران د(س) = |٢س + ٤|

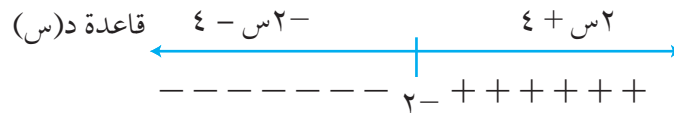
الحل

(إيجاد صفر الاقتران داخل القيمة المطلقة)

$$٠ = ٢س + ٤$$

(حل المعادلة الناتجة)

$$س = -٢$$



وبناء على ما سبق تكون قاعدة الاقتران د كالآتي:

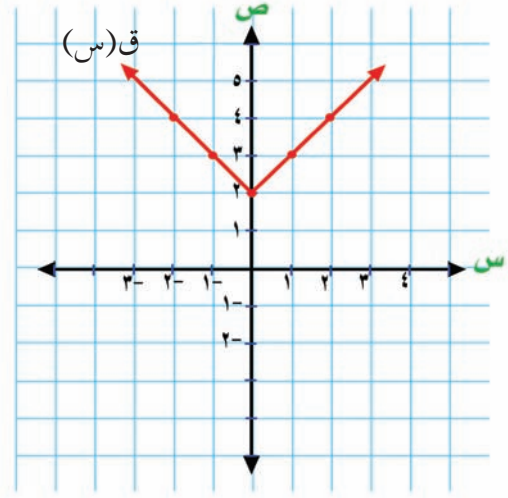
$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ , & س \leq -٢ \\ -٢س - ٤ , & س > -٢ \end{cases}$$

تدريب (١)

أعد تعريف الاقتران $h(s) = |s - 2|$ وارسم منحناه.

مثال (٣)

اكتب قاعدة الاقتران $q(s)$ المرسوم بالشكل (٢-٢٥)



الشكل (٢ - ٢٥).

تعلم

إذا كان $l(s) = q(s) + a$ وكان $a < 0$ فإنه يمكن الحصول على رسم الاقتران l من رسم منحنى الاقتران q وذلك بعمل انسحاب لرسم q للأعلى بمقدار (a) وحدة.

الحل

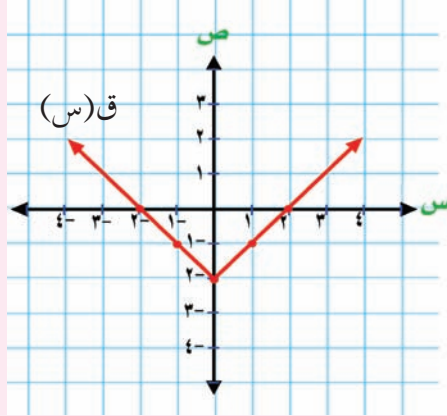
بما أن رسم منحنى الاقتران q هو شعاعان ينطلقان من النقطة $(2, 0)$ ومحور التماثل هو محور الصادات وبما أنه تم انسحاب منحنى الاقتران $q(s) = |s|$ للأعلى بمقدار وحدتين فإن قاعدة الاقتران المرسوم هي $q(s) = |s| + 2$.

تعلم

إذا كان $l(s) = q(s) - a$ وكان $a < 0$ فإنه يمكن الحصول على رسم الاقتران l من رسم الاقتران q وذلك بعمل انسحاب لرسم q للأسفل بمقدار (a) وحدة.

تدريب (٢)

اكتب قاعدة الاقتران q المرسوم منحناه بالشكل (٢-٢٦)



الشكل (٢ - ٢٦).

مثال (٤)

أعد تعريف الاقتران هـ(س) = $|س - ٢|$

الحل

(إيجاد أصفار الاقتران داخل القيمة المطلقة)

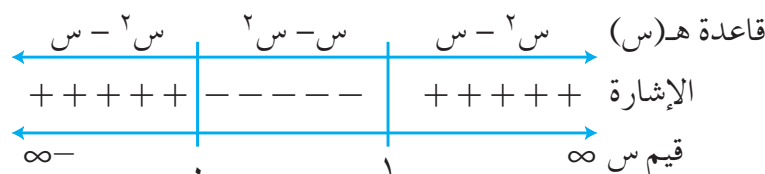
$$س - ٢ = ٠$$

(تحليل المعادلة التربيعية)

$$س(س - ١) = ٠$$

(حل المعادلة الناتجة)

$$س = ٠ \text{ أو } س = ١$$



$$\therefore \text{هـ(س)} = \begin{cases} س - ٢ & , س > ١ \\ ٢ - س & , ٠ \leq س \leq ١ \\ س - ٢ & , س < ٠ \end{cases}$$

تدريب (٣)

اكتب قاعدة الاقتران د(س) = $|س - ٢ - ٣س - ٤|$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

وبناء على ما سبق يمكن استخدام تعريف القيمة المطلقة في حل المعادلات والمتباينات التي تتضمن القيمة المطلقة، كما في الأمثلة الآتية:

مثال (٥)

جد مجموعة الحل للمعادلة $|س - ١| = ٥$

الحل

من تعريف القيمة المطلقة نجد أنه:

$$١ - س = ٥ \text{ ومنها } س = ٦$$

$$\text{أو } س - ١ = ٥ \text{ ومنها } س = ٤$$

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي: $\{٦, ٤\}$

تدريب (٤)

جد مجموعة الحل للمعادلة $|3s - 1| = 4$



هل هناك علاقة بين $|a+b|$ ، $|a|+|b|$ ؟

حيث $a, b \in \mathbb{R}$ فسر إجابتك.

بعض خصائص القيمة المطلقة:

إذا كان $a \in \mathbb{R}$ وكانت $s, v \in \mathbb{R}$ فإن:

$$(1) \quad |s| = a \iff s = a, s = -a$$

$$(2) \quad |s| > a \iff -a < s < a$$

$$(3) \quad |s| < a \iff s < a \text{ أو } s > -a$$

$$(4) \quad |s|^2 = s^2$$

$$(5) \quad |s| = \sqrt{s^2}$$

$$(6) \quad |s+v| \leq |s| + |v|$$

مثال (٦)

جد مجموعة حل المتباينة $|s+2| < 5$ ومثلها على خط الأعداد.

الحل

$$|s+2| < 5$$

$$\text{إما } s+2 < 5 \text{ أو } s+2 > -5$$

(حسب خاصية (٣))

بحل المتباينتين ينتج أن:

(تبسيط المتباينة)

$$\text{إما } 7 < s \text{ ، أو } s < 3$$

وبالتالي تكون مجموعة حل المتباينة: $(-\infty, 7) \cup (3, \infty)$ ،

وتمثيلها على خط الأعداد كالآتي:



مثال (٧)

جد مجموعة حل المتباينة $|2s + 1| \geq 3$ ومثلها على خط الأعداد.

الحل

$$|2s + 1| \geq 3$$

(حسب خاصية (٢))

$$-3 \leq 2s + 1 \leq 3$$

(إضافة -١ للأطراف الثلاثة)

$$-4 \leq 2s \leq 2$$

(قسمة جميع الأطراف على ٢)

$$-2 \leq s \leq 1$$

وبالتالي تكون مجموعة حل المتباينة $[-2, 1]$ ، وتمثيلها على خط الأعداد كالآتي:



تدريب (٥)

جد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

$$(2) \quad |4s - 6| < 8$$

$$(1) \quad |2s + 7| > 1$$

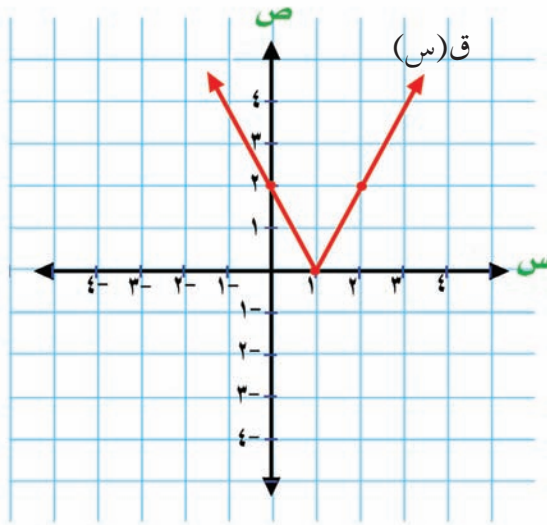


إذا كانت $Q(s) = \sqrt{s}$ ، $H(s) = \sqrt{s}$ ، فهل $Q(s) = H(s)$ ؟ برر إجابتك

(إرشاد: ارسم منحنى كل افتراض).

تمارين و مسائل

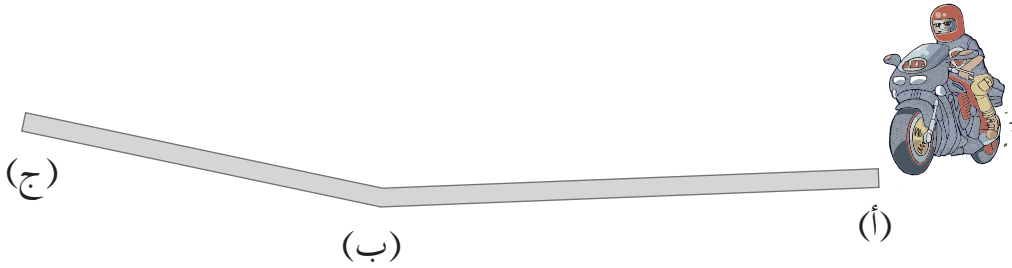
- (١) إذا كان $ق(س) = |٢ - ٣س|$ ، فجد $ق(٠)$ ، $ق(-\frac{٢}{٣})$ ، $ق(٤)$.
- (٢) اكتب قاعدة الاقتران $ق(س) = |٢ - ٦س|$ ، دون استخدام رمز القيمة المطلقة ثم ارسم منحناه.
- (٣) أعد تعريف كل من الاقترانات الآتية وارسم منحني كل منها.
- أ (هـ) $ق(س) = |٣ - ٢س| + ٤$
- ب (م) $ق(س) = |١ + س| - ٢$
- ج (ع) $ق(س) = |٦ - ٣س|$ ، $س \in [١ - , ٥]$
- د (ل) $ق(س) = |٦ + ٢س| - ١$
- (٤) جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:
- أ (أ) $|١ + ٢س| = ٥$ ب (ب) $|٤ + س| = |١ + ٣س|$
- ج (ج) $س - |س| = ٣$
- (٥) جد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية ومثلها على خط الأعداد.
- أ (أ) $|٤ - س| \geq ٢$ ب (ب) $|١٢ + ٢س| < ٧$
- ج (ج) $|٥ - س| > ٢$
- (٦) اكتب قاعدة الاقتران $ق(س) = |٤ - ٢س|$ ، دون استخدام رمز القيمة المطلقة ثم ارسم منحناه.



الشكل (٢ - ٢٧).

- (٧) اعتمد على الشكل (٢ - ٢٧) والذي يمثل رسم منحني الاقتران $ق(س) = |أس + ب|$ في إيجاد قيم الثابتين أ، ب.

- ٨) تسير دراجة بسرعة ثابتة مقدارها ٤٠ كم / ساعة من الموقع (أ) إلى الموقع (ج) مروراً بالموقع (ب) دون توقف، ويستغرق وصول الدراجة من الموقع (أ) إلى الموقع (ب) ٣ ساعات، إذا علمت أن المسافة بين الدراجة و الموقع (ب) تحسب وفق القاعدة:
- ف(ن) = $40 - 3|ن|$ ، حيث ن: الزمن بالساعات، ف: المسافة بالكيلومترات، احسب المسافة بين الدراجة و الموقع (ب) في كلٍّ من الحالات الآتية:
- أ) بعد ساعتين. ب) بعد ثلاث ساعات.
- ج) بعد أربع ساعات. د) ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك.



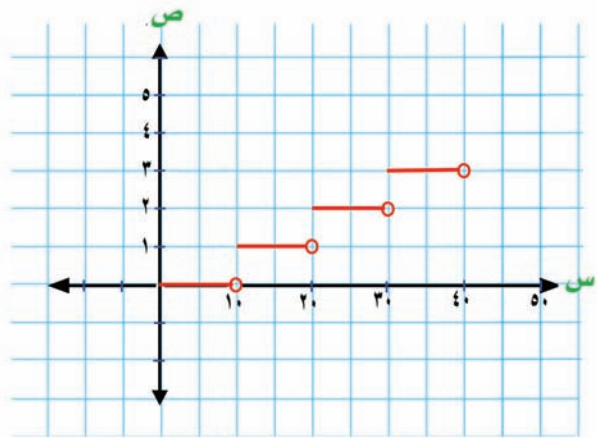
أعلن أحد المحلات التجارية عن الخصم المبين في الجدول الآتي:

قيمة المشتريات بالدينار	مقدار الخصم بالدينار
أقل من ١٠ دنانير	٠
من ١٠ دنانير إلى أقل من ٢٠ ديناراً	١
من ٢٠ ديناراً إلى أقل من ٣٠ ديناراً	٢
من ٣٠ ديناراً إلى أقل من ٤٠ ديناراً	٣

إذا اشترت سيدة من المحل بضاعة بمبلغ ١٥ ديناراً، فما مقدار الخصم الذي تحصل عليه؟ وكم ستدفع للبائع؟ وكم تدفع سيدة اشترت بضاعة بمبلغ ٢٠ ديناراً؟

بفرض أن مقدار الخصم يمثل اقتراناً مثل ق فإنه يمكنك كتابة قاعدة الاقتران السابق، حيث س تمثل قيمة المشتريات بالدينار، بالصورة الآتية:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq s < 10, \quad 0 \\ 10 \leq s < 20, \quad 1 \\ 20 \leq s < 30, \quad 2 \\ 30 \leq s < 40, \quad 3 \end{array} \right\} = \text{ق(س)}$$



الشكل (٢ - ٢٨).

وعند رسم منحنى الاقتران ق فإنه يأخذ شكل قطع مستقيمة توازي محور السينات انظر الشكل (٢ - ٢٨).

إن مثل هذا الاقتران يسمى (اقتران أكبر عدد صحيح).

فكر وناقش

هل للاقتران ق نقاط تشعب؟ اذكرها.

تعريف

الاقتران $ق$ الذي يقرن كل عدد حقيقي $س$ بأكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي $س$ ، يسمى اقتران أكبر عدد صحيح ويرمز له بالرمز $[س]$

وبصورة عامة إذا كان $ن \geq س > ن+1$ حيث $ن$ عدد صحيح، فإن $ق(س) = [س] = ن$

مثال (١)

إذا كان $ق(س) = [س]$ ، جد:

$ق(١-)$ ، $ق(٤)$ ، $ق(٢،٥-)$ ، $ق(١،٨)$

الحل

$$ق(١-) = [١-] = ١-$$

$$ق(٤) = [٤] = ٤$$

$$ق(١،٨) = [١،٨] = ١$$

$$ق(٢،٥-) = [٢،٥-] = ٢-$$

ومن تعريف اقتران أكبر عدد صحيح يمكن ملاحظة أن:

$$[س] = ١- \text{ عندما } ١- \geq س > ٠$$

$$[س] = ٠ \text{ عندما } ٠ \geq س > ١-$$

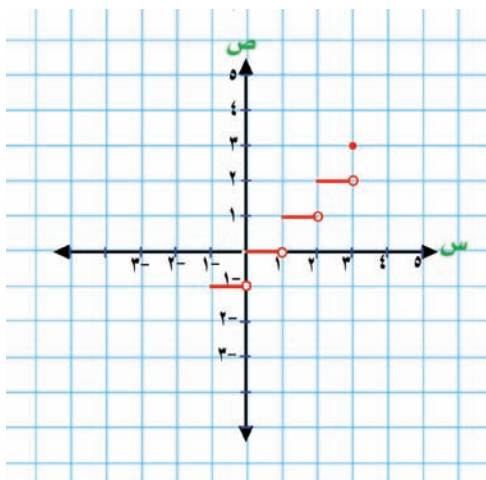
$$[س] = ١ \text{ عندما } ١ \geq س > ٢- \text{ وهكذا}$$

مثال (٢)

اكتب قاعدة الاقتران $ق(س) = [س]$ ، $س \in [١-، ٣]$ دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح، وارسم منحناه.

الحل

يمكن كتابة الاقتران ق على النحو الآتي:



$$\left. \begin{array}{l} 1- \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right\} = [س]$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 > س \geq 1- \\ 1 > س \geq 0 \\ 2 > س \geq 1 \\ 3 > س \geq 2 \\ 3 = س \end{array} \right\}$$

الشكل (٢ - ٢٩).

والشكل (٢ - ٢٩) يوضح رسم منحنى الاقتران ق.

جد نقاط التشعب للاقتران ق في المثال السابق.

جد مدى الاقتران ق في المثال السابق.



تدريب (١)

ارسم منحنى هـ(س) = [س] + ١، حيث س ∈ [٢-، ٢]

مثال (٣)

أعد تعريف الاقتران ق(س) = [٢س]، حيث ١- ≤ س < ١.

الحل

بما أن ١- ≤ س < ١ فإن: ٢- ≤ ٢س < ٢ وبالتالي [٢س] يأخذ إحدى القيم التالية:

$$\left. \begin{array}{l} 2- \\ 1- \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\} = ق(س)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2- \leq 2س < 2 \\ 1- \leq 2س < 1 \\ 0 \leq 2س < 0 \\ 1 \leq 2س < 1 \end{array} \right\}$$

وبتبسيط المتباينات في التعريف والتي على الصورة $2 \geq n > n+1$ ، فإن:

$$\left. \begin{array}{l} 2- \quad , \quad 1- \geq n > 0,5 \\ 1- \quad , \quad 0,5- \geq n > 0 \\ 0 \quad , \quad 0 \geq n > 0,5 \\ 1 \quad , \quad 0,5 \geq n > 1 \end{array} \right\} = (n) \text{ ق}$$

فكر وناقش

لماذا وضعت إشارة المساواة على يمين الفترة الجزئية في جميع الفترات الجزئية في مجال ق؟

تدريب (٢)

أعد تعريف كل من الاقترانات الآتية وارسم منحناه :

(١) $ق(س) = [3س - 1]$ ، حيث $1- \geq س > 1$

(٢) $هـ(س) = [\frac{1}{4}س + 1]$ ، حيث $2- \geq س \geq 4$

مثال (٤)

اكتب قاعدة الاقتران $ق(س) = [س - 4]$ ، حيث $2- \geq س > 2$.
دون استخدام رمز أكبر الصحيح.

الحل

بما أن $ن \geq 4 - س > ن + 1$ فإن

$ن - 4 \geq س > ن - 3$ وبالتالي

$$ن - 3 > س \geq ن - 4$$

وبالتعويض في ن بالقيم ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ لماذا؟ فإن:

$$\left. \begin{array}{l} 5 \quad , \quad 2- \geq س > 1- \\ 4 \quad , \quad 1- \geq س > 0 \\ 3 \quad , \quad 0 \geq س > 1 \\ 2 \quad , \quad 1 \geq س > 2 \end{array} \right\} = (س) \text{ ق}$$

(تبسيط المتباينة)

تدريب (٣)

ارسم منحنى ق(س) = [س - ٣] ، س ∈ [٣ ، ٣-]

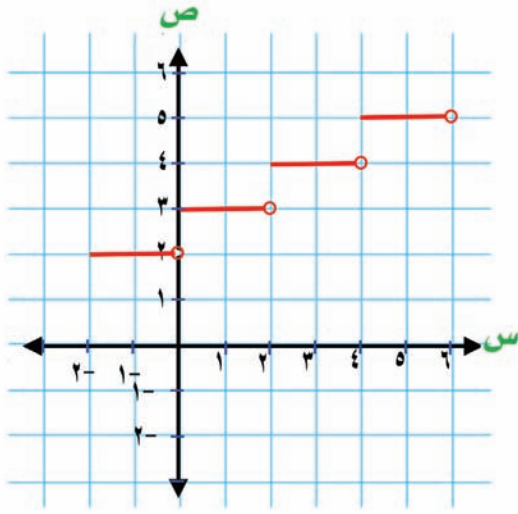
ملاحظة: لرسم منحنى ق(س) = [أس + ب] ، حيث أ ، ب ∈ ح فإننا نكتب هذا الاقتران دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح، أي نكتب ق بصورة مجزأة حيث تتغير قاعدة الاقتران بعد كل فترة جزئية طولها $\frac{1}{|أ|}$ من مجال ق.

مثال (٥)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = $[\frac{1}{٢}س] + ٣$ على الفترة [٢- ، ٦)

الحل

لرسم منحنى الاقتران ق لا بد من إعادة تعريفه؛ حيث طول الفترة الجزئية التي تتغير وفقها قاعدة هذا الاقتران هي $\frac{1}{|\frac{1}{٢}|} = ٢$ وعليه يكون:



الشكل (٢ - ٣٠).

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & , -2 \leq س < ٠ \\ ٣ & , ٠ \leq س < ٢ \\ ٤ & , ٢ \leq س < ٤ \\ ٥ & , ٤ \leq س < ٦ \end{cases}$$

والشكل (٢ - ٣٠) يوضح رسم منحنى الاقتران ق.

مثال (٦)

جد مجموعة حل المعادلة $٤ = [٣س]$

الحل

لايجاد حل المعادلة $٤ = [٣س]$ نستخدم القاعدة:

إذا كان $[س] = ن$ ، فإن $ن \geq س > ن + ١$ حيث $ن$ عدد صحيح.

وعليه يكون: $[٣س] = ٤$ إذا كان $٤ \geq ٣س > ٥$

(قسمة حدود المتباينة على ٣)

$$\frac{٤}{٣} \geq س > \frac{٥}{٣}$$

أي أن مجموعة الحل $= [\frac{٤}{٣}, \frac{٥}{٣})$.

مثال (٧)

جد مجموعة حل المعادلة $١ = [٣ - ٢س]$

الحل

حل هذه المعادلة كالاتي:

$$١ \geq ٣ - ٢س > ٢$$

(طرح ٣ من جميع الأطراف)

$$١ - \geq ٢ - ٢س > ١ -$$

(قسمة جميع الأطراف على -٢)

$$\frac{١}{٢} \leq س < \frac{١}{٢}$$

(ترتيب المتباينة)

$$\frac{١}{٢} > س \geq ١$$

أي أن مجموعة الحل $= (\frac{١}{٢}, ١]$

تدريب (٤)

جد مجموعة حل المعادلة $٥ = [٢س]$ ومثلها على خط الأعداد.

مثال (٨)

جد مجموعة حل المتباينة $٢ > [١ + س] > ٤$ ومثلها على خط الأعداد.

الحل

بما أن قيمة اقتران أكبر عدد صحيح تساوي دائماً عدداً صحيحاً فإن:

العدد الصحيح الذي يقع بين ٢ ، ٤ هو فقط ٣ ، وعليه يكون:

$$٣ = [١ + س]$$

(تعريف أكبر عدد صحيح)

(حل المتباينة)

$$\text{أي أن } 3 \leq s + 1 < 4$$

$$2 \leq s < 3$$

أي أن مجموعة الحل $= [2, 3)$.

وتمثل مجموعة الحل على خط الأعداد كما في الشكل:



تدريب (5)

جد مجموعة حل المتباينة $4 \leq [2s - 1] < 6$ ومثلها على خط الأعداد.

بعض خصائص أكبر عدد صحيح $[s]$ ، حيث s :

$$(1) [s] \leq s$$

$$(2) [s + a] = [s] + a \text{ حيث } a \in \mathbb{Z}$$

$$(3) 0 \leq s - [s] < 1$$



اختر قيمًا للمتغير s واختبر صحة هذه الخصائص.

مثال (9)

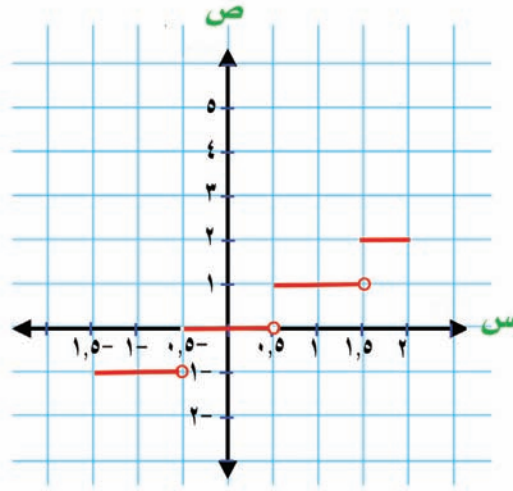
اكتب قاعدة الاقتران $Q(s) = [s + 0.5, 1.5]$ ، حيث $-0.5 \leq s \leq 2$ دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح ثم ارسم منحناه.

الحل

لاحظ أن هذا الاقتران هو اقتران أكبر عدد صحيح، ولكي نختار بداية لإحدى الفترات الجزئية لهذا الاقتران: نساوي ما داخل أقواس أكبر صحيح بعدد صحيح مثل -1 ، أي أن $s + 0.5 = -1$ إذا أصبح $s = -0.5$ بداية لإحدى الفترات الجزئية، وعليه يكون:

$$\left. \begin{array}{l} 1- , 1,5- \geq s > 0,5- \\ 0 , 0,5- \geq s > 0,5- \\ 1 , 1,5- \geq s > 0,5- \\ 2 , 1,5- \geq s \geq 2 \end{array} \right\} = (s) \text{ ق}$$

والشكل (٢- ٣١) يوضح منحنى ق.



الشكل (٢- ٣١).



لهذا كانت آخر فترة في تعريف الاقتراح ق في مثال (٩) هي الفترة $[1,5, 2]$ وليس الفترة $[1,5, 2,5]$ ؟ برر إجابتك.

تدريب (٦)

اكتب قاعدة الاقتراح هـ $(s) = [2s + 4, 0]$ حيث $0,2- \geq s > 2$ دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح وارسم منحناه.



هل هناك علاقة بين $\frac{1}{[s]}$ ، $\left[\frac{1}{s}\right]$ من حيث القيمة العددية؟ برر إجابتك.

تمارين و مسائل

(١) إذا كان $ق(س) = [س + ١]$ فجد: $ق(-١)$ ، $ق(٠)$ ، $ق(\frac{١}{٢})$ ، $ق(\frac{١}{٢}^-)$

(٢) اكتب قاعدة كل من الاقترانات الآتية دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح، وارسم منحنى كل منها.

أ ($ق(س) = [س + ٤]$ ، حيث $٢ > س \geq ٢ -$)

ب ($ك(س) = [س - ٢]$ ، حيث $٣ > س \geq ١ -$)

ج ($ل(س) = [\frac{١}{٢}س + ٣, ٠]$ ، حيث $٦ \geq س \geq ٠$)

(٣) إذا كان $ق(س) = [\frac{١}{س}]$ ، هـ $(س) = \frac{١}{[س]}$ فجد كلاً من:

أ ($ق(٢)$ ، هـ (٢))

ب ($ق(\frac{١}{٣}^-)$ ، هـ $(\frac{١}{٣}^-)$)

ج ($ق(١, ٧)$ ، هـ $(١, ٧)$) .

(٤) أعد تعريف الاقتران $ق(س) = [\frac{١}{٣}س + س]$ ، حيث $س \in [-٣, ٥]$

(٥) جد مجموعة حل المعادلة $س - [س] = \text{صفرًا}$ ، حيث $١ > س \geq ٢ -$

(٦) جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ ($[٦ - ٢س] = \text{صفرًا}$) ب ($[س - ٤] - ٢, ٣ = ١, ٥$)

(٧) جد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ ($٣ \geq [١ + ٣س] > ٤$) ب ($٢ - \geq [٤س - ٢] > ٠$)

ج ($١ > [١ + ٥س] > ٢$)

التناجات

- نتعرف مفهوم تركيب اقترانين.
- نتعرف الاقتران العكسي.
- نجد ناتج تركيب اقترانين.
- نجد الاقتران العكسي لاقتران معطى (إن أمكن).
- نستخدم تركيب اقترانين في حل مسائل حياتية.

Composition of Functions

أولاً: تركيب الاقترانات

إذا كان وزن دماغ الطفل لحظة الولادة يُعطى بالعلاقة $ق(س) = 0.025س$ ، حيث $س$ وزن الطفل عند الولادة، وإذا كان وزن دماغه عند بلوغه السنة الثالثة من العمر يُعطى بالعلاقة $هـ(س) = 0.05س + 0.05$ ، حيث $س$ وزن دماغه عند الولادة، جد وزن دماغ طفل بلغ السنة الثالثة من عمره إذا كان وزنه عند الولادة ثلاثة كيلوغرامات.

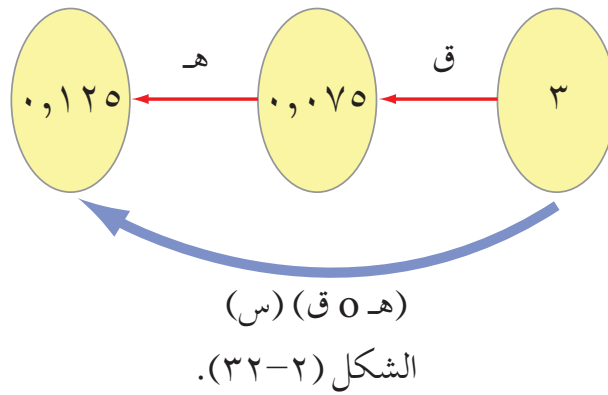
لحساب وزن دماغ الطفل عند بلوغه السنة الثالثة من العمر يجب حساب وزن الدماغ عند الولادة، ثم الاعتماد على النتيجة لحساب وزن الدماغ عند بلوغه السنة الثالثة من العمر، وبذلك يكون وزن دماغ الطفل عند الولادة $ق(3) = 0.025 \times 3 = 0.075$ كغ.

ويكون وزن دماغ الطفل عند بلوغه السنة الثالثة :

$$هـ(0.075) = 0.05 + 0.075 = 0.125 \text{ كغ.}$$

نلاحظ أنه يمكنك حساب وزن دماغ الطفل عند بلوغه السنة الثالثة بالاعتماد على وزنه عند الولادة باستخدام اقتران جديد هو $ع(س)$ ينتج من تركيب الاقترانين $ق$ ، $هـ$ بحيث إن $ع(س) = هـ(ق(س))$ وتقرأ $هـ$ بعد $ق$ ل $س$ ونعبر عن ذلك $(هـ \circ ق)(س)$.

انظر الشكل (٢-٣٢). وعليه يكون ع(س) = ٠,٠٢٥ س + ٠,٠٥ حيث س وزن الطفل عند الولادة.



بشكل عام يتم تركيب الاقترانين ق ، هـ إذا كان مدى ق مجموعة جزئية من مجال هـ، ونعبر عن ذلك بالصورة (هـ ٥ ق) (س) ويساوي هـ(ق(س)).

مثال (١)

إذا كان ق(س) = ٢س + ١ ، هـ(س) = ٤س - ٣ .

فجد قيمة كل مما يأتي:

(هـ ٥ ق) (٢) ، (ق ٥ هـ) (٢) ، (هـ ٥ ق) (٠) ، (ق ٥ هـ) (٠)

الحل

$$(هـ ٥ ق) (٢) = هـ(ق(٢)) = هـ(٥) = ١٧$$

$$(ق ٥ هـ) (٢) = ق(هـ(٢)) = ق(٥) = ١١$$

$$(هـ ٥ ق) (٠) = هـ(ق(٠)) = هـ(١) = ١$$

$$(ق ٥ هـ) (٠) = ق(هـ(٠)) = ق(٣) = ٥$$



هل عملية تركيب الاقترانات عملية تبديلية؟

تدريب (١)

إذا كان ق(س) = ٢س + ٣ ، هـ(س) = √(٣ + س) فجد:

(ق ٥ هـ) (١) ، (هـ ٥ ق) (١) ، (ق ٥ هـ) (٢-) ، (هـ ٥ ق) (٢-)

مثال (٢)

إذا كان $ق(س) = ٢س^٢ - ٣$ ، $هـ(س) = ٤س + ١$ فجد قاعدة كل من:

(١) $ق(هـ)$ (س) (٢) $هـ(ق)$ (س) (٣) $هـ(هـ)$ (س).

الحل

$$\begin{aligned} (١) \quad ق(هـ) (س) &= ق(٤س + ١) = ٢(٤س + ١)^٢ - ٣ \\ &= ٢(١٦س^٢ + ٨س + ١) - ٣ = ٣٢س^٢ + ١٦س - ١ \\ (٢) \quad هـ(ق) (س) &= هـ(٢س^٢ - ٣) = ٤(٢س^٢ - ٣) + ١ \\ &= ٨س^٢ - ١٢ + ١ = ٨س^٢ - ١١ \\ (٣) \quad هـ(هـ) (س) &= هـ(٤س + ١) = ٤(٤س + ١) + ١ = ١٦س + ٥ \end{aligned}$$

نلاحظ أن $ق(هـ) \neq هـ(ق)$ (س).

تدريب (٢)

إذا كان $ق(س) = ٣س - ٢$ ، $هـ(س) = \frac{١}{٣}(س + ٢)$ ، فجد قاعدة كل من:

(١) $ق(هـ)$ (س) (٢) $هـ(ق)$ (س) (٣) $ق(ق)$ (س).



إذا كان $ق(س) = ٢س + ٢$ ، $هـ(س) = \sqrt{س}$ ، فهل تستطيع إيجاد قاعدة $هـ(ق)$ (س)؟ برر إجابتك.

مثال (٣)

$$\left. \begin{aligned} ٧ + س &، \quad ٢ > س \\ ٢ \leq س &، \quad ٢س \end{aligned} \right\} = هـ(س)$$

فجد قيمة كل من: (١) $ق(هـ)$ (٣)

(٢) $هـ(ق)$ (٠)

الحل

$$\begin{aligned} (١) \quad ق(هـ) (٣) &= ق(هـ(٣)) = ق(٦) = ٣ \times ٦ + ٥ = ٢٣ \\ (٢) \quad هـ(ق) (٠) &= هـ(ق(٠)) = هـ(٠) = ٠ \times ٢ = ٠ \end{aligned}$$

تدريب (٣)

إذا كان $ق(س) = س^3$ ، $هـ(س) = |س^2 + 3|$
 فجد : $هـ(ق(س))$ ، $ق(هـ(س))$ ، $هـ(ق(هـ(س)))$ ، $ق(هـ(ق(س)))$

مثال (٤)

إذا كان $ق(س) = س^2 + ١$ ، $هـ(س) = س^3$ ، فجد قيم $س$ التي تحقق:
 $١٠ = هـ(ق(س))$ ، $١٠ = ق(هـ(س))$

الحل

$$١٠ = هـ(ق(س))$$

$$١٠ = ق(هـ(س))$$

$$١٠ = ق(س^3)$$

$$١٠ = س^2 + ١$$

$$١٠ = س^2 + ١ \Leftrightarrow س^2 = ٩ \Leftrightarrow س = ٣ ، س = -٣$$

$$١٠ = هـ(ق(س))$$

$$١٠ = هـ(ق(س))$$

$$١٠ = هـ(س^2 + ١)$$

$$١٠ = س^2 + ١$$

$$١٠ = س^2 + ١ \Leftrightarrow س^2 = ٩ \Leftrightarrow س = ٣ ، س = -٣$$

تدريب (٤)

إذا كان $ق(س) = س^2$ ، $هـ(س) = \sqrt{س^3 - ٣}$ ، $ع(س) = \sqrt{س - ٩}$ فجد كلاً مما يأتي
 (إن أمكن) :

أ (قيمة $س$ حيث $هـ(ق(س)) = ١$)

ب ($ق(هـ(س))$)

د ($ع(ق(س))$)

ج ($ق(ع(س))$)

تمارين و مسائل

(١) جد قيمة كل من: (ق ٥ هـ) (١) ، (هـ ٥ ق) (٢-) ، (هـ ٥ ق) (٣-) في كل مما يأتي:

أ (ق (س) = ٤س ، هـ (س) = ٢س + ٧

ب (ق (س) = -٣س ، هـ (س) = $\frac{٥}{١ + ٢س}$

(٢) إذا كان ق (س) = ٢س^٣ ، هـ (س) = $\frac{١}{٢س} + ٢$ ، فجد:

أ (ق ٥ هـ) (س)

ب (هـ ٥ ق) (س)

(٣) إذا كان ق (س) = $\sqrt[٣]{٣ - س}$ ، هـ (س) = (٣ + س)^٢ ، فجد :

أ (ق ٥ هـ) (١)

ب (هـ ٥ ق) (٢)

ج (ق ٥ هـ ٥ ق) (٨ -)

(٤) إذا كان ق (س) = ٣س ، هـ (س) = ٢|١ + س| ، فجد:

أ (ق ٥ هـ) (٢-)

ب (هـ ٥ ق) (٢)

ج (هـ ٥ ق) (س).

(٥) تبين أن حجم ثمرة يأخذ شكلاً كروياً تقريباً يعطى حسب الاقتران ح(ر) = $\pi ر^٣ + ١,٥$

حيث ر: نصف قطر الثمرة بالمليمتر، وأن نصف قطر هذه الثمرة يزداد وفق القاعدة:

ر = ف(ن) = $٠,٠٠٦ ن^٢ + ٠,٠٢ ن + ٠,٥$ حيث ن: الزمن بالأيام بعد تكوّن الثمرة ،

احسب حجم الثمرة بعد مرور ٥٠ يوماً على بدء تكونها.

(٦) تقوم شركة سياحية بتقديم خدماتها للسياح على النحو الآتي: أجرة السيارة ١٠ دنانير مضافاً إليها ٥ دنانير عن كل موقع أثري يرغب السائح بزيارته، وإذا أراد السائح دليلاً سياحياً فيستوجب عليه أيضاً دفع ٢٠٪ من مجمل التكاليف، أجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) أكمل الجدول الآتي:

عدد المواقع الأثرية	١	٢	٣	٤	٥
التكلفة ع = ق(س)	١٥	٢٠			
التكلفة مع الدليل هـ(ع)		٢٤			

ب) اكتب قاعدة الاقتران (هـ ٥ ق) (س).

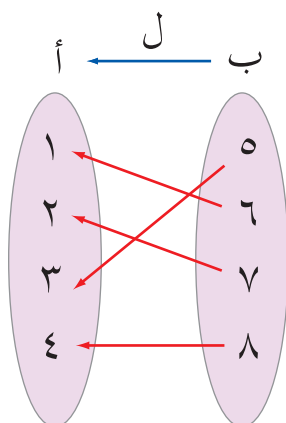
(٧) يقدم محل تجاري كوبوناً مجاناً بقيمة (٢٠) ديناراً، وخصم ٢٠٪ على سعر الأجهزة الكهربائية، إذا أراد شخص أن يشتري ثلاثة بقيمة (س) دينار. أيهما أفضل أن يقدم الشخص الكوبون أولاً ثم يحصل على الخصم، أم أن يحصل على الخصم ثم يقدم الكوبون؟



ارتفعت درجة حرارة طفل فقاست والدته درجة حرارته. بميزان حرارة فهرنهايت ووجدت أن حرارته 104° فكيف تحول هذه السيدة درجة الحرارة من القياس فهرنهايت إلى قياس سلسيوس؟ علماً بأن التحويل من القياس سلسيوس إلى فهرنهايت يعطى بالقاعدة $F(س) = \frac{9}{5}س + 32$ ، حيث $س$ درجة الحرارة بالسلسيوس، F بالفهرنهايت.

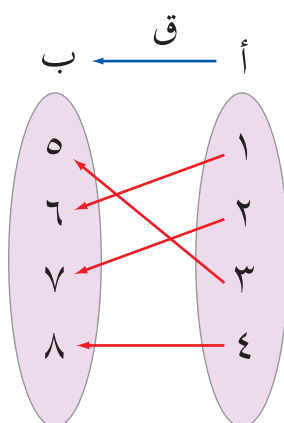
مثال (١)

يمثل الشكل (٢-٣٣/أ) الاقتران ق



الشكل (٢-٣٣/ب)

وإذا عكست اتجاه الأسهم في المخطط السهمي في هذا الشكل فإنك تحصل على المخطط السهمي الشكل (٢-٣٣/ب)



الشكل (٢-٣٣/أ)

نلاحظ أن الشكل (٢-٣٣/ب) يمثل اقتراناً جديداً هو L وعند كتابة الاقترانين Q ، L كمجموعتين من الأزواج المرتبة فإن:

$$Q = \{(8, 4), (5, 3), (7, 2), (6, 1)\}$$

$$L = \{(4, 8), (2, 7), (1, 6), (3, 5)\}$$

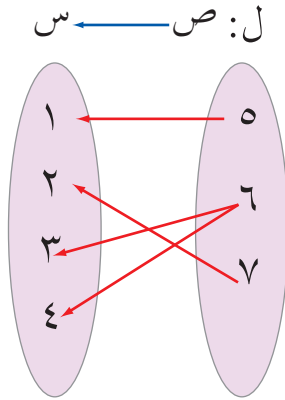
وبمقارنة هاتين المجموعتين تلاحظ أن كل زوج مرتب في L ، قد نتج عن إبدال مسقطي زوج

مرتب في Q ويسمى الاقتران L (الاقتران العكسي) للاقتران Q ، ويرمز له بالرمز Q^{-1} .



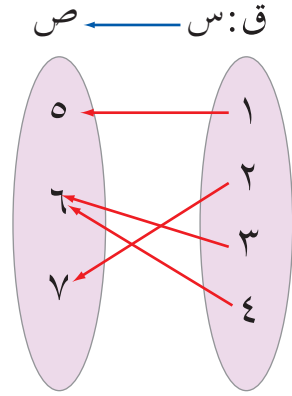
جد: ق-١، $\frac{1}{ق}$ ؟ ماذا تلاحظ؟

يمثل الشكل (٢ - ٣٤ / أ) مجال ومدى الاقتران ق



الشكل (٢ - ٣٤ / ب)

واذا عكست اتجاه الأسهم في الشكل
(٢ - ٣٤ / أ) فإنك تحصل على
المخطط السهمي في الشكل
(٢ - ٣٤ / ب)



الشكل (٢ - ٣٤ / أ)

إنّ هذا المخطط السهمي في الشكل (٢ - ٣٤ / ب) لا يمثل اقتراناً. لماذا؟



هل كل اقتران له اقتران عكسي، ولماذا؟ دعم إجابتك بأمثلة.

تعريف

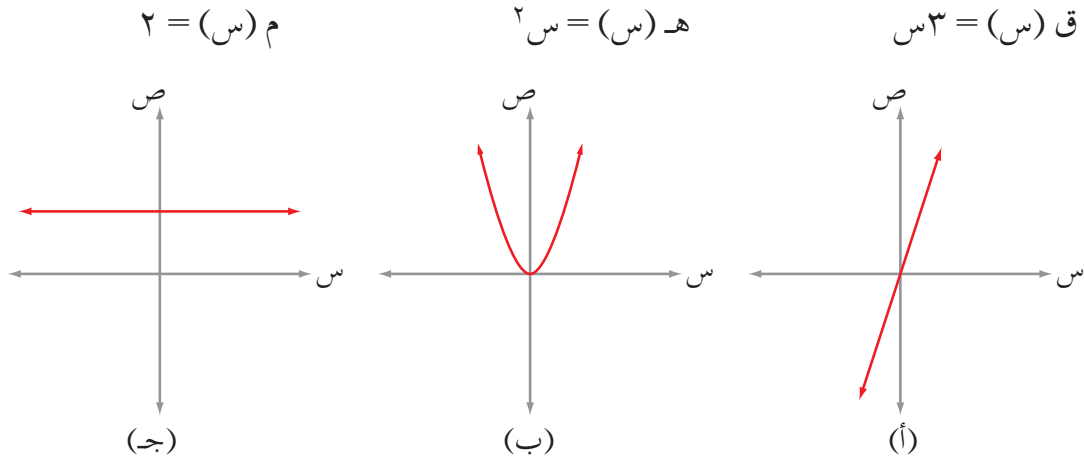
يسمى الاقتران واحداً لوحد إذا كان كل عنصر في مداه هو صورةً لعنصر واحد فقط في مجاله، أي أنه لكل $s_1 \neq s_2$ في مجال ق فإن $ق(s_1) \neq ق(s_2)$.

ويمكن تمييز اقتران الواحد لوحد باستخدام اختبار الخط الافقي.

اختبار الخط الافقي

يكون الاقتران واحداً لوحد إذا كان أي خط مستقيم موازٍ لمحور السينات يقطع منحنى الاقتران في نقطة واحدة على الأكثر.

أي من الاقترانات الممثلة في الشكل (٢ - ٣٥) يُعدُّ اقتران واحد لواحد؟ مع ذكر السبب:



الشكل (٢ - ٣٥).

الحل

باستخدام اختبار الخط الأفقي تجد أنَّ:

الشكل (أ) الاقتران ق اقتران واحد لواحد، لأنَّه إذا رُسِمَ خط أفقي سيقطع منحنى الاقتران في نقطة واحدة فقط.

الشكل (ب) الاقتران هـ ليس اقتراناً واحداً لواحد، لأنَّه إذا رُسِمَ خط أفقي سيقطع منحنى الاقتران في نقطتين.

الشكل (ج) الاقتران م ليس اقتراناً واحداً لواحد، لأنَّه إذا رُسِمَ خط أفقي سيقطع منحنى الاقتران في عدد لا نهائي من النقاط.

تدريب (١)

إذا كان ق (س) = $س^2 + ١$.

(١) ارسم منحنى الاقتران ق.

(٢) بيِّنْ إذا كان الاقتران ق واحداً لواحد أم لا.

مثال (٣)

ليكن $Q = \{(16, 4), (9, 3), (4, 2), (1, 1)\}$

جد Q^{-1} كمجموعة أزواج مرتبة، ثم جد:

$Q(2)$ ، $Q(3)$ ، $Q^{-1}(4)$ ، $Q^{-1}(9)$ ، $(Q \circ Q^{-1})(4)$ ، $(Q \circ Q^{-1})(3)$

الحل

لاحظ أن الاقتران Q واحد لواحد.

إذن $Q^{-1} = \{(4, 16), (3, 9), (2, 4), (1, 1)\}$

$Q(2) = 4$ ، $Q(3) = 9$

$Q^{-1}(4) = 2$ ، $Q^{-1}(9) = 3$

$(Q \circ Q^{-1})(4) = (Q^{-1}(4)) = 4$

$(Q \circ Q^{-1})(3) = (Q^{-1}(3)) = 3$

لا بد أنك لاحظت في مثال (٣) أن:

$(Q \circ Q^{-1})(4) = 4$ ، $(Q \circ Q^{-1})(3) = 3$ ، أي أن:

صورة العنصر بعد تركيب الاقتران و الاقتران العكسي له مساوية للعنصر نفسه.

وبصورة عامة: إذا كان Q اقتراناً واحداً لواحد وكان Q^{-1} هو الاقتران العكسي له فإن:

$(Q \circ Q^{-1})(s) = s$ ، $(Q^{-1} \circ Q)(s) = s$ ويسمى الاقتران الناتج عن تركيب الاقتران و الاقتران العكسي له بالاقتران المحايد.

تدريب (٢)

إذا كان $H = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ ، فأجب عما يأتي:

(١) جد H^{-1} كمجموعة أزواج مرتبة.

(٢) جد $H \circ H^{-1}(2)$ ، $H^{-1} \circ H(1)$.

إذا كان الاقتران $ق(س) = ٣س - ١$

(١) ارسم منحنى $ق$ ثم بيّن أنّ $ق$ اقتران واحد لواحد باستخدام اختبار الخط الافقي.

(٢) جد الاقتران العكسي $ق^{-١}$.

الحل

(١) الشكل (٢-٣٦) يمثل منحنى الاقتران $ق$

وباستخدام اختبار الخط الافقي يتضح أنّ:

$ق$ هو اقتران واحد لواحد،

لذا فإنه يمكن إيجاد $ق^{-١}$ كالآتي:

الطريقة الاولى: نستخدم القاعدة

$$(ق^{-١} \circ ق)(س) = س$$

$$ق(ق^{-١}(س)) = س$$

$$٣ق^{-١}(س) - ١ = س$$

$$٣ق^{-١}(س) = س + ١$$

$$ق^{-١}(س) = \frac{س + ١}{٣}$$

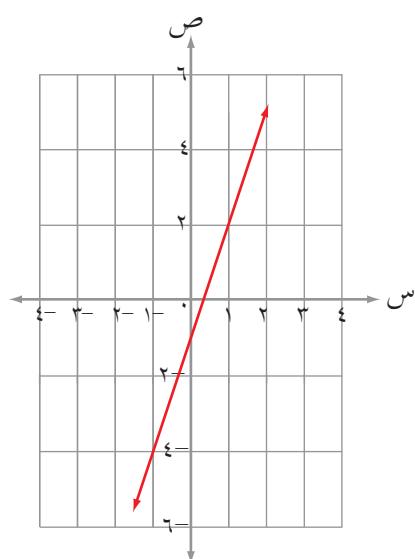
الطريقة الثانية: نكتب الاقتران على الصورة $ص = ٣س - ١$

ثم نجعل $س$ موضوعاً للقانون كالآتي:

$$ص = ٣س - ١$$

$$س = \frac{ص + ١}{٣}$$

$$وعليه يكون $ق^{-١}(س) = \frac{س + ١}{٣} = \frac{١}{٣} + س$$$



الشكل (٢-٣٦).

مثال (٥)

إذا كان $ق(س) = \frac{1}{س} + ٤$ ، فجد الاقتران العكسي $ق^{-١}(س)$ إن أمكن

الحل

الاقتران $ق(س)$ واحد لواحد (لماذا؟)، إذن يمكن إيجاد $ق^{-١}(س)$

$$ق(٥) = (س) \Rightarrow س = ٥$$

$$ق(١) = (س) \Rightarrow س = ١$$

$$\frac{1}{س} + ٤ = ق(س)$$

$$ق^{-١}(س) = (٤ - س)^٢$$

(التعويض بقاعدة ق)

(تبسيط المعادلة)

تدريب (٣)

جد الاقتران العكسي $ق^{-١}(س)$ للاقتران $ق(س) = ٥ - ٢س$.

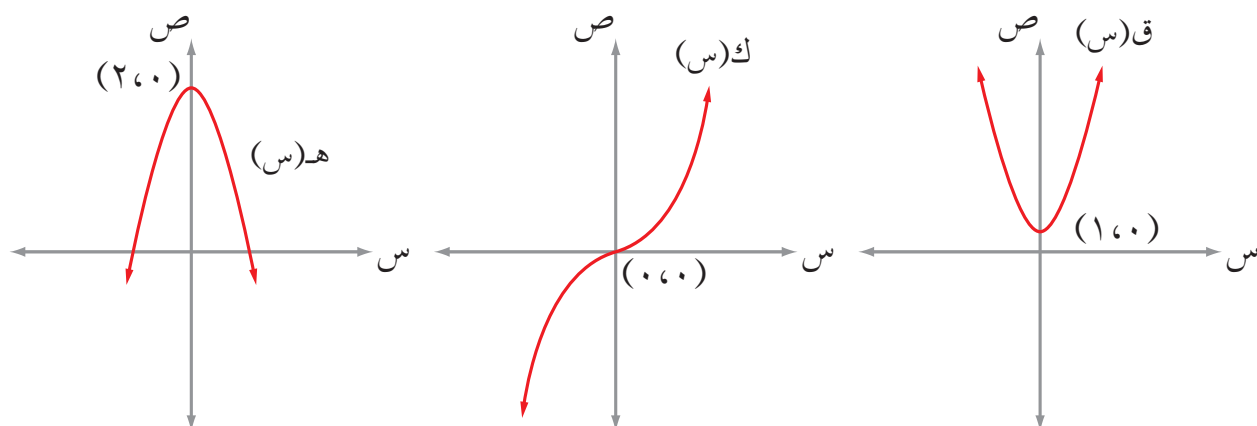
مثال (٦)

جد الاقتران العكسي لكل من الاقترانات الممثلة في الشكل (٢ - ٣٧) إن أمكن.

$$هـ(س) = ٢ - ٢س$$

$$ك(س) = ٣س$$

$$ق(س) = ١ + ٢س$$



الشكل (٢ - ٣٧).

الحل

باستخدام اختبار الخط الأفقي تجد أن كلاً من الاقترايين ق، هـ ليس واحداً لواحد وبالتالي لا يمكن إيجاد الاقتران العكسي له .

أما الاقتران ك(س) = س^٣ فإنه اقتران واحد لواحد، وبالتالي يمكن إيجاد الاقتران العكسي له ك^{-١}(س) كما يأتي:

$$(ك \circ ك^{-١})(س) = س$$

$$ك(ك^{-١}(س)) = س$$

$$(ك^{-١}(س)) = س^{\frac{1}{3}}$$

$$ك^{-١}(س) = \sqrt[3]{س}$$

تدريب (٤)

إذا كان ق(س) = س^٣ - ٢ ، فجد ق^{-١}(س) إن أمكن.

تمارين و مسائل

(١) إذا كان q^{-1} هو الاقتران العكسي للاقتران q فجد:

أ ($q \circ q^{-1}$) (٤)

ب ($q^{-1} \circ q$) (٣-)

ج ($q^{-1}(٢)$) إذا كان $q(٣) = ٢$

(٢) جد قاعدة q^{-1} (س) لكل من الاقترانات الآتية:

أ ($q(س) = \{(٣, ٢), (٢, ١), (١, ٠), (٠, ١-), (٢-, ٣-)\}$)

ب ($q(س) = س + ٧$)

ج ($q(س) = ٢ - ٦ س$)

د ($q(س) = أس + ب$ ، $أ \neq \text{صفر}$)

(٣) بيّن في ما إذا كان $q(س) = ٣س - ٤$ هو الاقتران العكسي للاقتران

هـ ($س) = \frac{١}{٣} س + ٤$)

(٤) إذا كان حجم مجسم بدلالة طول الضلع هو $ح = (س + ١)^٣$ حيث $س$ طول الضلع فجد طول

الضلع بدلالة الحجم $ح$.

(٥) جد قاعدة الاقتران الخطي q الذي يمر بالنقطتين $(٠, ١-)$ ، $(٣-, ٣-)$ ثم جد الاقتران

العكسي $q^{-١}$ له.

(٦) إذا كان $q(س) = ٢س - ٥$ ، هـ ($س) = \frac{١ - س}{٣}$ ، فجد:

أ ($q \circ هـ$) $q^{-١}(س)$

ب ($q^{-١} \circ هـ$) $q^{-١}(س)$.

(٧) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

أسئلة الوحدة

(١) إذا كان:

$$\left. \begin{array}{l} 1 > s, \quad s+2 \\ 3 > s \geq 1, \quad [s] \\ 3 \leq s, \quad |3-s| \end{array} \right\} = (s) \text{ ق}$$

جد قيمة كل من: ق(٢-)، ق(٢، ١)، ق(٣)، ق(٥).

(٢) أعد تعريف الاقتران ق(س) = $s^2 - |s|$ دون كتابة رمز القيمة المطلقة.

(٣) ارسم منحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{s^2 + 4s + 4}$

(٤) أعد تعريف كل من الاقترانات الآتية:

أ (ق(س) = $|2s + 4|$)

ب (ق(س) = $[\frac{1}{3}s - 2] + s$ ، $s \in [1, 7]$)

ج (ق(س) = $|s + 1| [s]$ ، $s \in [2, 2-]$)

$$\left. \begin{array}{l} 1 \geq s, \quad s^2 - 2s + 3 \\ 2 > s > 1, \quad [1+s] \\ 2 \leq s, \quad |6-s| \end{array} \right\} = (s) \text{ ق (د)}$$

(٥) جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ ($|2 - s| = 5$) ب ($|5 - s + 6| = 6$)

ج ($s^2 - |s| - 6 = 0$) د ($1 - = [\frac{1-s}{2}]$)

هـ ($\pi = [2 + 5s]$) و ($0, 3 - = 5, 7 + [4 - s]$)

٦) جد مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ) $8 > |1 + 3s|$

ب) $1 \leq |5s - 4|$

٧) ارسم منحنى كل من الاقترانات الآتية، حيث $s \in [-2, 2]$:

أ) ق(س) $= |s - 1| + 3$

ب) هـ(س) $= s[s + 1]$

جـ) ع(س) $= \frac{|2 - s|}{2 - s}$

٨) حدد مجال كل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) $= \frac{\sqrt{10 + 7s - 2s^2}}{s - 5}$

ب) ل(س) $= \frac{3 + 2s}{\sqrt{2s - 4}}$

جـ) هـ(س) $= \sqrt{\frac{1 + 3s}{s - 3}}$

د) ك(س) $= 2s^3 + 1$

هـ) ع(س) $= \frac{-2 + s}{s^2 + 4}$

و) م(س) $= \sqrt{2(1 + s)}$

ز) د(س) $= \sqrt[3]{s}$

٩) جد (ق0هـ)(س) في كل مما يأتي:

أ) ق(س) $= 2s + 5$ ، هـ(س) $= 3s^2$

ب) ق(س) $= \sqrt{s + 4}$ ، هـ(س) $= s^2 + 1$

١٠) جد الاقتران العكسي لكل من الاقترانات الآتية إن وُجد:

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } (س) ق = ٥س + ٧ & \text{ب) هـ } (س) = ١ + ٢س^٢ \\ \text{ج) ع } (س) = \sqrt[٣]{١ - س} & \end{array}$$

١١) إذا كان $ق(س) = ٤ + ٦س$ ، $هـ(س) = (٢ - س)^٢$ ، $م(س) = |١ - س|$ فجد كلاً مما يأتي:

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } (ق \circ هـ)(س) & \text{ب) } (م \circ ق)(س) \\ \text{ج) هـ}^{-١}(س) & \text{د) } (هـ \circ ق^{-١})(س) \\ \text{هـ) } (هـ \circ هـ^{-١})(س) & \text{و) } (ق \circ هـ \circ م)(١ -) \end{array}$$

١٢) يعمل خالد في مصنع ملابس بأجر مقداره ٨ دنانير في اليوم بالإضافة الى نصف دينار عن كل قطعة تنتج في اليوم:

أ) اكتب الاقتران الذي يمثل أجرة خالد.
ب) جد الاقتران العكسي لهذا الاقتران إن أمكن.

١٣) يتكون هذا السؤال من تسع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، ولكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

$$(١) \text{ مجال الاقتران } ق(س) = \frac{\sqrt[٢]{٦ - س}}{١ + س} \text{ هو:}$$

$$\begin{array}{ll} \text{أ) } (٣، \infty) & \text{ب) } (١ - ، \infty) \\ \text{ج) } (٣ - ، \infty) & \text{د) } (٣ - ، \infty) - \{١ -\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (٢) \text{ إذا كان } ق(س) = \left\{ \begin{array}{l} |١ + س| ، \quad س > ٢ \\ [٥، ٠ + س + ٤] ، \quad س \leq ٢ \end{array} \right. ، \text{ فإن } ق^{-١}(٣ -) = \\ \text{أ) } ١ \quad \text{ب) } ٢ \quad \text{ج) } ٣ \quad \text{د) } ٥ \end{array}$$

(٣) مجموعة حل المعادلة $٠ = ٣ - [س٠, ٥]$

أ (٤, ٣) [ب (٤, ٣) ج (٨, ٦) د (٨, ٦)

(٤) مجموعة حل المتباينة $٥ \geq |١ - س٢|$ تساوي:

أ (٣, ٢) [ب (٣, ٢ -] ج (٢, ٣ -] د (٥, ٥ -]

(٥) أَّخذُ الاقترانات الآتية هو اقتران واحد لواحد:

أ (ق(س) = [س] ب هـ(س) = |س + ١|

ج ك(س) = س - ١ د ل(س) = س٢

(٦) إذا كان ق(س) = $\frac{س٣}{س١ + س٢}$ ، هـ(س) = س٤ - ٥ ، فإنَّ ق(هـ(س)) = (١ -)

أ (٩ - ب (٧ - ج (٣ - د (٣

(٧) * إذا كان هـ(س) = س - ١ ، ق(س) = (س + ٣)٢ ، فإنَّ ق(هـ(س)) تساوي:

أ ((س - ١) (س + ٣)٢ ب (س + ٢) (٢ - ١)

ج (س + ٢)٢ د (س + ٢) ٨ +

(٨) إذا كان ق(س) = س٢ + ٣ ، هـ(س) = س٢ - ١ ،

فإنَّ ق(هـ(س)) يساوي :

أ (٣ + س٢ ب (٢ + س٢

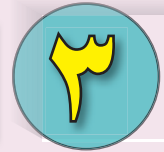
ج (١ + س٢ د (٨ + س٢

(٩) إذا كان ق(س) = س٣ - ٢ ، فإنَّ ق١(س) =

أ ($\frac{١}{س} + ٢$ ب ($\frac{١}{س} - ٢$

ج ($\frac{٢ - س}{س}$ د ($\frac{س + ٢}{س}$

* من أسئلة الاختبارات الدولية.



تعد الأنماط من الفروع المهمة في الرياضيات وهي كثيرة ومتنوعة، وقد سبق لك تعرّف أنواع منها مثل الهندسية والعددية. إن اهتمام الرياضيين بالأنماط أدى إلى توظيفها في تطبيقات عملية في مجالات مختلفة مثل الاقتصاد والفيزياء والهندسة وغيرها من العلوم.

ستتعرف في هذه الوحدة نوعًا خاصًا من الأنماط يُسمى المتتاليات والمتسلسلات، وتتعرف طرائق محددة للتعامل مع حدود ومجاميع المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية، وتتعرف كذلك على صلتها بمواضيع أخرى في الرياضيات وتطبيقاتها في الحياة اليومية والعلوم الأخرى.



Arithmetic and Geometric Sequences and Series

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على:

- تمييز المتتاليات الحسابية والهندسية.
- تحديد خصائص المتتاليات الحسابية والهندسية.
- كتابة حدود متتالية عُلِمَ حدها العام.
- إيجاد الحد العام لمتتالية، إذا عُلِمَت بعض حدودها.
- إيجاد مجموع متسلسلة حسابية أو هندسية منتهية.
- إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية.
- توضيح العلاقة بين المتتالية الحسابية والربح البسيط والنمو الخطي.
- تحديد العلاقة بين المتسلسلات الهندسية والنمو الهندسي.
- حل مسائل في مواقف حياتية ونَمَذَجَتِهَا.

النتائج

- تتعرف المتتالية.
- تتميز المتتاليات المنتهية وغير المنتهية.
- تتعرف المتسلسلة، وتميز المنتهية وغير المنتهية منها.
- تكتب متسلسلة عُلم حدها العام.
- تجد الحد العام لمتتالية عُلمت بعض حدودها.
- تحل مسائل في مواقف حياتية باستخدام المتسلسلات.

Sequence

أولاً: المتتالية



الشكل (٣-١).

أقيمت مباريات كأس العالم لكرة القدم في القرن الحادي والعشرين في السنوات: ٢٠٠٢، ٢٠٠٦، ٢٠١٠، ٢٠١٤. إذا استمر إقامة المباريات بهذا الترتيب متى ستقام المباريات في المرة الثامنة من هذا القرن؟ هل يمكنك التوصل إلى قاعدة تجد من خلالها السنوات التي ستقام فيها هذه المباريات في هذا القرن؟

تواجهنا في كثير من الأحوال تجمعات من الأعداد نهتم بترتيبها على النحو الآتي: عنصر أول، عنصر ثان، عنصر ثالث، ... تمييزاً لها عن التجمعات الأخرى من الأعداد التي لا قيمة للترتيب بين عناصرها.

تأمل الترتيب الآتي للأعداد: ٤، ٨، ١٢، ١٦، ...

اعتماداً على هذا الترتيب، ما العدد السادس؟ ما العدد العاشر؟

إذا تمعنت في ترتيب هذه الأعداد تجد أن العدد السادس = ٢٤ والعدد العاشر = ٤٠. وتلاحظ أن

قيمة العدد تسير وفق قاعدة معينة هي: العدد = ٤ × ترتيب العدد

يسمى ترتيب الأعداد بالصورة ٤، ٨، ١٢، ١٦، ... **متتالية** ويسمى كل عدد منها حداً ويرمز

لحدود المتتالية بالرموز $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ... حيث $ح_١$: الحد الأول، $ح_٢$: الحد الثاني، $ح_٣$: الحد الثالث، وهكذا.

في كثير من الحالات تتوالى حدود المتتالية بانتظام أي تكون هذه الحدود وفق نمط معين أو اقتران معين بحيث نستطيع معرفة أي حد في المتتالية إذا عُرف ترتيبه. لاحظ أن المتتالية السابقة هي مضاعفات للعدد ٤ وأن:

$$ح_١ = ١ \times ٤ = ٤$$

$$ح_٢ = ٢ \times ٤ = ٨$$

$$ح_٣ = ٣ \times ٤ = ١٢$$

وهكذا

تعريف

المتتالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (في هذه الحالة تسمى متتالية غير منتهية) أو مجاله مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة على الصورة $\{١، ٢، ٣، \dots، ن\}$ وفي هذه الحالة تسمى متتالية منتهية، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

فمثلاً الاقتران $ق(ن) = \frac{٢}{ن}$ ، حيث $(ن$ عدد صحيح موجب) متتالية يمكن كتابتها على الصورة:
 $ق(١)، ق(٢)، ق(٣)، ق(٤)، \dots$ أي على الصورة:
 $٢، ١، \frac{٢}{٣}، \frac{١}{٢}، \dots$

الحد العام للمتتالية

يُسمى الحد الذي رتبته $ن$ الحد النوني أو الحد العام في المتتالية ويرمز له بالرمز $ح_n$ وهو قاعدة عامة يمكن منها إيجاد كل حد من حدود المتتالية.

مثال (١)

جد الحد العام (النوني) لكل متتالية مما يأتي:

$$(١) ١، ٤، ٧، ١٠، \dots$$

$$(٢) \text{ صفر، } ٣، ٨، ١٥، \dots$$

$$(٣) -\frac{١}{٢}، \text{ صفر، } \frac{١}{٢}، ١، \frac{٣}{٢}، \dots$$

الحل

$$(1) \quad ح_1 = 1$$

$$ح_2 = 4$$

$$ح_3 = 7$$

$$ح_4 = 10$$

تلاحظ أن كل حد يزيد عن الحد السابق له بمقدار ثلاثة، فيكون $ح_n = 1 + 3(n-1)$ عوض بعض عناصر المجال للتأكد من صحة القاعدة.

$$(2) \quad ح_1 = 0$$

$$ح_2 = 3$$

$$ح_3 = 8$$

$$ح_4 = 15$$

تلاحظ أن كل حد ينقص واحدًا عن مربع ترتيبه، فيكون $ح_n = n^2 - 1$. عوض بعض عناصر المجال للتأكد من صحة القاعدة.

$$(3) \quad ح_1 = -\frac{1}{2}$$

$$ح_2 = 0$$

$$ح_3 = \frac{1}{2}$$

$$ح_4 = 1$$

$$ح_5 = \frac{3}{2}$$

لاحظ أن المتتالية منتهية وأنه يمكن الحصول على كل حد بقسمة ترتيبه على 2 ثم طرح 1 من ناتج القسمة.

$$\text{إذن } ح_n = \frac{n}{2} - 1$$

تدريب (١)

جد الحد النوني (العام) لكل من المتتاليات الآتية:

$$(١) \quad ١, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$(٢) \quad ٥, ٨, ١١, ١٤, \dots$$

فكر وناقش

هل من الضروري أن يكون لكل متتالية حدّ عامّ؟ حاول أن تجد حدًا عامًّا لمتتالية الأعداد الأولية: ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ...

مثال (٢)

جد الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات الآتية:

$$(١) \quad \text{متتالية حدها العام ح}_n = \frac{(1-n)^n}{n^2}$$

$$(٢) \quad \text{متتالية حدها العام ح}_n = \text{جتا } (٩٠ \times n)$$

الحل

$$(١) \quad \text{ح}_١ = \frac{(1-1)^1}{1^2} = ٠, \quad \text{ح}_٢ = \frac{(1-2)^2}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ح}_٣ = \frac{(1-3)^3}{3^2} = \frac{8}{9}, \quad \text{ح}_٤ = \frac{(1-4)^4}{4^2} = \frac{81}{16}$$

$$(٢) \quad \text{ح}_١ = \text{جتا } ٩٠ = ٠, \quad \text{ح}_٢ = \text{جتا } ١٨٠ = ٠, \quad \text{ح}_٣ = \text{جتا } ٢٧٠ = ٠, \quad \text{ح}_٤ = \text{جتا } ٣٦٠ = ١$$

تدريب (٢)

جد الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات التي حدها العام كما يأتي:

$$(١) \quad \text{ح}_n = \frac{n}{1+n}, \quad (٢) \quad \text{ح}_n = ٢ - ١$$

تتكون المتتالية من حدود وتكون المجموعة من عناصر. ما الفرق بين المتتالية والمجموعة؟

مثال (٣)

اكتب المتتالية التي حدها العام h_n حيث:

$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & , \text{ إذا كانت } n \text{ عددًا فرديًا } \geq 1 \\ 1 - n & , \text{ إذا كانت } n \text{ عددًا زوجيًا } \geq 2 \end{cases}$$

الحل

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{1^2} = 1, & h_2 &= 1 - 2 = -1, & h_3 &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}, \\ h_4 &= 1 - 4 = -3, & h_5 &= \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, & h_6 &= 1 - 6 = -5, \\ \text{المتتالية هي: } & 1, -1, \frac{1}{9}, -3, \frac{1}{25}, -5, \dots \end{aligned}$$

مثال (٤)

تعلم

المتتالية التي جميع حدودها متساوية تسمى متتالية ثابتة.

اكتب الحد العام للمتتالية $6, 6, 6, 6, \dots$

الحل

$$h_n = 6$$

تدريب (٣)

اكتب المتتالية التي حدها العام h_n حيث:

$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \text{ إذا كانت } n \text{ عددًا فرديًا } \geq 1 \\ 1 - n & , \text{ إذا كانت } n \text{ عددًا زوجيًا } \geq 2 \end{cases}$$

هل المتتالية منتهية أم غير منتهية؟

نشاط

نبات دوار الشمس: تشكل بذور نبات دوار الشمس نمطين لخطوط حلزونية يسير أحدهما باتجاه عقارب الساعة و يسير الآخر بعكس اتجاه عقارب الساعة.

عدد الخطوط الحلزونية بالاتجاهين يُشكّل حدين متتاليين من متتالية فيبوناتشي، في الشكل (٣-٣) عدد الخطوط بعكس اتجاه عقارب الساعة ٢١ ومع عقارب الساعة ٣٤، وفي نباتات أخرى يكونان ٣٤، ٥٥ أو ٨٩، ١٤٤. ابحث في الانترنت عن نباتات أخرى غير دوار الشمس تتبع هذا النمط، واكتب تقريرًا واقراه أمام زملائك.



الشكل (٣-٣).

تمارين و مسائل

(١) اكتب الحد العام لكل من المتتاليات الآتية:

أ ($\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, \dots$)

ب ($1, -1, 1, -1, \dots$)

ج ($3, 3, 3, 3, \dots$)

(٢) اكتب الحدود الثلاثة الأولى لكل من المتتاليات الآتية واذكر في ما إذا كانت منتهية أم غير منتهية:

أ ($ح_n = 3 + 1$)

ب ($ح_n = \frac{1-n}{3+n}$)

ج ($ح_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, n \in \{1, 2, 3, 4\}$)



الشكل (٣-٢).

(٣) أجب عن المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٤) رُصدَ مذنب هالي من الأرض للمرة الأولى

في عام ١٧٥٨م، رُصدَ للمرة الثانية عام

١٨٣٤م، وللمرة الثالثة عام ١٩١٠م.

اكتب الحدود الستة الأولى من متتالية

سنوات رصد مذنب هالي.

(٥) عاش فيبوناتشي في الفترة (١١٧٥م - ١٢٥٠م)، وقد توصل في دراسته إلى المتتالية الآتية

التي عرفت في ما بعد باسمه: $ح_1 = 1, ح_2 = 1, ح_{n+2} = ح_n + ح_{n+1}$ اكتب الحدود العشرة الأولى منها.

تقوم بعض المحلات التجارية بعرض بضاعتها بأشكال مختلفة. في الشكل (٣-٤) مجموعة من عبوات العصير مرتبة فوق بعضها. يمكن التعبير عن أعداد العبوات في الصفوف بالمتتالية:

$$٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢ \text{ التي حدها العام } ح_n = ٢ن$$



الشكل (٣-٤).

مجموع حدود المتتالية ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢ هو:

$$٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٠ + ١٢$$

وهذا الشكل يُسمى **متسلسلة**. واضح أنك حصلت على هذه المتسلسلة بوضع إشارات جمع بين حدود هذه المتتالية.

لكتابة المجموع السابق بطريقة مختصرة استخدم الرياضيون الرمز $\sum$ (ويقرأ سيجما)، تكتب

$$\text{المتسلسلة على الصورة: } \sum_{n=1}^{٦} ٢ن$$

ويُقرأ مجموع الأعداد التي على الصورة ٢ن من $n=1$ إلى $n=٦$. لاحظ أن المتغير داخل رمز المجموع n ومن الممكن استبداله بأي حرف آخر مثل i ، k ، h ،... الخ. يسمى الحرف الذي أسفل الرمز بالدليل ويأخذ أعداداً صحيحة موجبة فقط. لتجد قيمة أي تعبير كُتب باستخدام رمز المجموع، عوض عن التعبير الذي داخل الرمز بالأعداد الصحيحة الموجبة جميعها ابتداءً من العدد الذي يقع أسفل الرمز إلى العدد الذي يقع أعلاه.

تعريف

إذا كانت $ح_1, ح_2, ح_3, ح_4, \dots, ح_n$ متتالية فإن:

$$\sum_{r=1}^n ح_r = ح_1 + ح_2 + ح_3 + ح_4 + \dots + ح_n, \text{ تسمى المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتالية.}$$

إذا كانت المتتالية منتهية فإن المتسلسلة المرتبطة بها منتهية، وإذا كانت المتتالية غير منتهية فإن المتسلسلة المرتبطة بها غير منتهية.

يستخدم الرمز $\sum_{r=1}^n ح_r$ ليدل على مجموع أول n حدا من حدود المتتالية. لاحظ أن $ح_n = ح_n - ح_{n-1}$

مثال (١)

اكتب المتسلسلة $\sum_{r=1}^4 (5n - 2)$ دون استخدام رمز المجموع.

الحل

$$ح_1 = 2 - 1 \times 5 = 3$$

$$ح_2 = 2 - 2 \times 5 = 8$$

$$ح_3 = 2 - 3 \times 5 = 13$$

$$ح_4 = 2 - 4 \times 5 = 18$$

فالمتسلسلة هي: $3 + 8 + 13 + 18$

مثال (٢)

استخدم الرمز $\sum$ للتعبير عن المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$$

الحل

$$\frac{1}{n^2} = ح_n \text{ الحد العام}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

استُخدم الرمز ∞ (مالا نهاية) ليدل على أن المتسلسلة غير منتهية.

تدريب (١)

(١) اكتب المتسلسلة $\sum_{i=1}^4 (1 - i)$ دون استخدام رمز المجموع .

(٢) اكتب المتسلسلة $1 + 8 + 27 + 64 + \dots$ باستخدام رمز المجموع .

مثال (٣)

استخدم الرمز $\sum$ للتعبير عن المتسلسلة $(3 \times 1) + (4 \times 2) + (5 \times 3) + (6 \times 4) + \dots$

الحل

$$ج_n = n(n+2)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (i+2) = (1+2) + (2+2) + (3+2) + (4+2) + \dots$$

مثال (٤)

إذا كان $ج_n = n^2 + 5n$ ، جد الحد النوني لهذه المتتالية

الحل

$$الحد\ النوني\ ج_n = ج_n - ج_{n-1}$$

$$= (n^2 + 5n) - ((n-1)^2 + 5(n-1))$$

$$= n^2 + 5n - (n^2 - 2n + 1 + 5n - 5)$$

$$= n^2 + 5n - n^2 + 2n - 1 - 5n + 5 = 2n - 1 + 5 = 2n + 4$$

تدريب (٢)

إذا كان $ج_n = 4n - 2$ ، فجد أول ٥ حدود من المتسلسلة.

تمارين و مسائل

(١) اكتب الحدود الثلاثة الأولى لكل من المتسلسلات الآتية:

$$(أ) \sum_{r=1}^{10} r^6 \quad (ب) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{1-k}$$

$$(ج) \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \quad (د) \sum_{r=1}^8 \frac{1-r}{3+r}$$

(٢) استخدم رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الآتية:

$$(أ) 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 \dots$$

$$(ب) \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots$$

$$(ج) (1 - \frac{1}{2}) + (2 - \frac{1}{3}) + (3 - \frac{1}{4}) + \dots$$

(٣) اكتب المتسلسلات الآتية دون استخدام رمز المجموع.

$$(أ) \sum_{i=1}^5 \frac{y}{3+y} \quad (ب) \sum_{k=1}^4 (1-k)^2 \quad (ج) \sum_{r=1}^{\infty} (8-r^2)$$

(٤) يريد عامر توفير مبلغ من المال لشراء جهاز حاسوب. وفّر في الأسبوع الأول ٤ دنانير وفي

الأسبوع الثاني ٨ دنانير وفي الأسبوع الثالث ١٢ ديناراً وهكذا لمدة ١٠ اسابيع. أجب عن

الآتي:

(أ) اكتب الحد العام لمتتالية توفير عامر.

(ب) جد المبلغ الذي وفره عامر في الأسبوع العاشر.

(ج) اكتب المتسلسلة التي تعبر عن المبلغ الذي وفره عامر بكتابة حدودها ثم باستخدام رمز

المجموع .

المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

Arithmetic Sequences and Series

الفصل الثاني

التجارب

- تتعرف المتتالية الحسابية.
- تجد مجموع متسلسلة حسابية.
- تحل مسائل حياتية ذات علاقة بالمتتاليات والمتسلسلات الحسابية.

Arithmetic Sequence

أولاً: المتتالية الحسابية

بدأ شخص قيادة سيارته من أعلى منحدر، فقطع في الثانية الأولى ٦ أمتار، وفي كل ثانية بعد ذلك قطع مسافة تزيد عن المسافة التي قطعها في الثانية السابقة لها مباشرة بمقدار ١,٥ مترًا. ما المسافة التي قطعها في الثانية العاشرة؟

إن المسافات التي يقطعها الشخص بالأمتار : ٦ ، ٧,٥ ، ٩ ، ١٠,٥ ، ...

لاحظ أن الفرق بين كل حدين متتاليين يكون ثابتاً دائماً ويساوي ١,٥ مترًا.

$$١ح - ٢ح = ٢ح - ٣ح = ٣ح - ٤ح = ١,٥ \text{ مترًا.}$$

تُسمى هذه **المتتالية حسابية** حدها الأول ٦ ، وأساسها ١,٥ ليدل على الفرق الثابت بين كل حدين متتاليين. أما كتابة المسافات المقطوعة على الصورة:

$$٦ + ٧,٥ + ٩ + ١٠,٥ + \dots \text{ فيشكل متسلسلة حسابية.}$$

تعريف

المتتالية الحسابية: متتالية يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية الحسابية ويرمز له بالرمز d ، ويرمز للحد الأول فيها بالرمز a ، وتُسمى المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية الحسابية متسلسلة حسابية.

مثال (١)

يُبين ما إذا كانت المتتاليات أو المتسلسلات الآتية حسابية أم لا، ثم جد أساس الحسابية منها.

$$(١) \quad ٥, ٢, -١, -٤, -٧, \dots \quad (٢) \quad ٨, ٧, ٨, ٧, \dots$$

$$(٣) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + ١ \right)$$

الحل

$$(1) \quad 3- = 5-2 = 1ح - 2ح$$

$$3- = 2-1- = 2ح - 3ح$$

$$3- = (1-)-4- = 3ح - 4ح$$

$$3- = 1+ن ح - 3- فالتتالية حسابية أساسها = 3-$$

$$(2) \quad \text{بما أن } 1- = 8-7 = 1ح - 2ح$$

$$3ح - 2ح = 7-8 = 1- . \text{ لا ضرورة لإكمال البحث، لأن}$$

$$3ح - 2ح \neq 1ح - 2ح ، \text{ فالتتالية ليست حسابية.}$$

$$(3) \quad 1ح = 1 + \frac{1}{3}ن ، \quad 1+ن ح = 1 + \frac{1}{3}(ن+1)$$

$$1+ن ح - 1ح = 1 + \frac{1}{3}(ن+1) - (1 + \frac{1}{3}ن) = \frac{1}{3}$$

$$\text{إذن التتالية حسابية أساسها } \frac{1}{3} .$$

تدريب (I)

بين ما إذا كانت المتتاليات أو المتسلسلات الآتية حسابية أم لا، ثم جد أساس الحسابية.

$$(1) \quad \frac{1}{2} ، \frac{3}{4} ، 1 ، \frac{1}{4} ، 1 ، \dots \quad (2) \quad ح = \frac{3-ن}{ن}$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (4ن+1)$$

لاحظ أنه يمكن كتابة المتتالية الحسابية التي حدها الأول أ وأساسها د على الصورة الآتية:

$$أ، أ+د، أ+2د، أ+3د، \dots \text{ حيث } أ، د \text{ عددان ثابتان.}$$

لاحظ أيضاً أن معامل الأساس د في أي حد يقل واحداً عن رتبة ذلك الحد. وهذا صحيح لكل حد

من حدود المتتالية الحسابية، وبذلك يكون:

$$\text{الحد العام للمتتالية الحسابية } ح = أ + (ن-1)د$$

حيث أ: الحد الأول في المتتالية ، د: أساس المتتالية.

فكر وناقش 

ما المعلومات التي تحتاجها لتعيين متتالية حسابية؟

مثال (٢)

جد عدد حدود المتتالية الحسابية الآتية:

$$٨، ٢، -٤، -١٠، ...، -١٦٦$$

الحل

أ = ٨ ، د = -٦ ، عدد حدود المتتالية (ن) وهو رتبة الحد الأخير فيها.

$$ح_n = أ + (ن - ١) د$$

$$-١٦٦ = -٦ \times (ن - ١) + ٨$$

$$-١٦٦ - ٨ = -٦ \times (ن - ١)$$

$$-١٨٠ = -٦ \times (ن - ١) \quad ، \quad ن = ٣٠ \text{ حدًا}$$

تمنّ بقاعدة الحد العام للمتتالية الحسابية: $ح_n = أ + (ن - ١) د$

$$= أ + ن د - د$$

$$ح_n = (أ - د) + ن د$$

$$= ن د + ب \text{ حيث } ب = أ - د \text{ وهي على صورة معادلة الخط المستقيم } ص = م س + ج$$

أي أن حدود المتتالية الحسابية تقع على خط مستقيم.

تدريب (٢)

جد عدد حدود المتتالية: ٤، ٧، ١٠، ١٣، ...، ١٨٤

مثال (٣)

وفّر تاجر ٦٠٠ دينار في السنة الأولى، وبدأ يزداد توفيره بمقدار ٢٠٠ دينار سنويًا عن السنة التي تسبقها مباشرة. اكتب الحد العام للمتتالية ثم جد ما يوفره التاجر في السنة العاشرة.

الحل

المبالغ التي يوفرها التاجر من ربحه في السنوات المختلفة تشكل متتالية حسابية فيها
 $٦٠٠ = د$ ، $٢٠٠ = أ$

فالحد العام للمتتالية هو: $ح_n = أ + (ن - ١) د = ٢٠٠ + (ن - ١) ٦٠٠$

والحد العاشر فيها هو: $ح_{١٠} = ٢٠٠ + ٩ ٦٠٠ = ٥٦٠٠$ دينار

تدريب (٣)

خرطوم مياه مصنوع من الجلد ملفوف على بكره، تستهلك اللفة الأولى ٦٠ سم من الخرطوم وتستهلك اللفة الثانية ٩٠ سم، وتستهلك اللفة الثالثة ١٢٠ سم وهكذا. إذا استهلكت إحدى اللفات ٣,٣ م ، ما ترتيب هذه اللفة؟

عرفت سابقاً أن المتوسط الحسابي لعددتين مثل ٨ ، ٢٠ هو $\frac{٢٠ + ٨}{٢} = ١٤$ ، أي أن الأعداد ٨ ، ١٤ ، ٢٠ تشكل متتالية حسابية.

وبصورة عامة: تُسمى الأعداد $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، ... ، أن متوسطات حسابية بين العددين $أ$ ، $ب$ إذا كانت $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، ... ، $أ_ن$ ، $ب$ متتالية حسابية.

عند إدخال $ن$ من المتوسطات الحسابية بين العددين $أ$ ، $ب$ يصبح عدد حدود المتتالية الناتجة $(ن + ٢)$ ويكون $ح_١ = أ$ ، $ح_{ن+٢} = ب$ ، الأساس $د = \frac{أ - ب}{١ + ن}$

مثال (٤)

أدخل ٥ متوسطات حسابية بين العددين ١٢ ، ٥٤ .

الحل

$$أ = ١٢ ، ب = ٥٤ ، ن = ٥ ، د = \frac{أ - ب}{١ + ن} = \frac{٤٢}{٦} = ٧$$

المتوسطات الحسابية هي : ١٩ ، ٢٦ ، ٣٣ ، ٤٠ ، ٤٧

تدريب (٤)

أدخل ٦ متوسطات حسابية بين العددين ٣٨ ، ١٠

تمارين و مسائل

- (١) أي المتاليات الآتية حسابية مع ذكر السبب؟
 أ (٩ ، $\frac{2}{3}$ ، ٣ ، $\frac{2}{3}$ ، ١ ، ٧- ، ...
 ب (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ،
 (٢) جد عدد حدود كلٍّ من المتالتين الحسابيتين الآتيتين .
 أ (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ١٠٠١
 ب (١٠ ، ٨ ، ٥ ، ٧ ، ... ، ٣٧٥
 (٣) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقبل القسمة على ٧ وأقل من ٤٥٠؟
 (٤) يوفرّ موظف ١٠٠ دينار من راتبه سنويًا زيادة عما يوفره في السنة التي قبلها، فإذا وفرّ ٢٠٠ دينار في السنة الأولى فأجب عما يأتي:
 أ (اكتب المتسلسلة التي تعبر عن مجموع ما يوفره الموظف خلال ١٠ سنوات بذكر الحدود ثم باستخدام رمز المجموع.
 ب (ما مقدار ما يوفره الموظف في السنة الثامنة؟
 (٥) وضع رجل مبلغ ٦٠٠ دينار في بنك بحساب الربح البسيط بفائدة سنوية مقدارها ٥٪.
 أجب عما يأتي:
 أ (جد فائدة المبلغ بعد ٤ سنوات.
 ب (جد جملة المبلغ بعد ١٢ سنة.
 (إرشاد: الربح البسيط = المبلغ × سعر الفائدة × الزمن بالسنوات)
 (٦) بين مع ذكر السبب أن المتالتين الآتيتين حسابيتانٍ دون إيجاد حدودهما:
 أ ($ح_n = ٤ + ن$ ب ($ح_n = \frac{1}{3} + ن$
 (٧) أدخل متوسطين حسابيين بين العددين ٢٤ ، ٦

(٨) يزيد الراتب الشهري لمندوب مبيعات ٣٠ ديناراً عند بداية كل سنة من خدمته. فإذا كان راتبه الشهري ٤٠٠ دينار في بداية السنة الأولى من عمله، فاكتب قاعدة الحد العام لرواتب الموظف الشهرية بعد ن سنة ثم اكتب رواتبه الشهرية في السنوات الخمس الأولى.

(٩) أ (إذا كانت قياسات زوايا مثلث تشكل متتالية حسابية وكان قياس الزاوية الكبرى في المثلث يساوي ٨٠، فجد قياس الزاويتين المتبقيتين.

ب) متوازي أضلاع ليس فيه زاوية قائمة، هل يمكن أن تشكل قياسات زواياه متتالية حسابية؟ مع ذكر السبب.

ج) إذا كانت قياسات زوايا شكل رباعي تشكل متتالية حسابية، فجد قياسات زوايا الشكل. هل يوجد أكثر من حل للمسألة؟

طلب معلم الصف الثالث الأساسي من طلابه جمع الأعداد الصحيحة ابتداءً من العدد ١ ولغاية العدد ١٠٠ معتقداً أن الطلاب سيحتاجون وقتاً طويلاً للحل، فُوجئ المعلم بأن أعطاه أحد الطلاب الإجابة سريعاً وقال المجموع ٥٠٥٠، كان هذا الطالب العالم الألماني المشهور جاوس (١٧٧٧-١٨٥٥) الذي ظهر نبوغه في الرياضيات في وقت مبكر. والسؤال ، كيف توصل جاوس إلى هذا المجموع بهذه السرعة ؟

كانت طريقة جاوس لجمع هذه الأعداد على النحو الآتي:

$$\text{ج} = ١ + ٢ + ٣ + \dots + ١٠٠ ، \text{ويمكن أيضا كتابة المجموع على الصورة}$$

$$\text{ج} = ١٠٠ + ٩٩ + ٩٨ + \dots + ١$$

و بالجمع ينتج أن:

$$٢ \text{ ج} = (١ + ١٠٠) + \dots + (١ + ١٠٠) + (١ + ١٠٠) + (١ + ١٠٠) ، \text{عدد الحدود } ١٠٠$$

$$٢ \text{ ج} = (١ + ١٠٠) ١٠٠$$

$$\text{ج} = \frac{(١ + ١٠٠) ١٠٠}{٢}$$

$$٥٠٥٠ = ١٠١ \times ٥٠ =$$

يمكن استخدام أسلوب جاوس للتوصل إلى قاعدة لحساب ج_ن من حدود متتالية حسابية كما يأتي:

$$\text{ج}_ن = أ + (أ + د) + (أ + ٢د) + \dots + ح_ن$$

$$\text{ج}_ن = ح_ن + (ح_ن - د) + (ح_ن - ٢د) + \dots + أ$$

$$٢ \text{ ج}_ن = (أ + ح_ن) + (أ + ح_ن) + \dots + (أ + ح_ن)$$

بما أن عدد الحدود ن

$$\text{فإن: } ٢ \times \text{ج}_ن = ن (أ + ح_ن)$$

$$\text{ج}_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ح_ن)$$

مجموع متسلسلة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ح_ن وعدد حدودها ن هو:

$$\text{ج}_ن = \frac{ن}{٢} (أ + ح_ن)$$

تُستخدم صيغة هذه القاعدة إذا عُلِمَ الحدان الأول والأخير من المتتالية. وإذا لم يكن الحد الأخير معلوماً نبحث عن صيغة أخرى وذلك بتعويض $ج_n = أ + (ن - ١) د$ ، للحصول على الصيغة الأخرى:

$$ج_n = \frac{ن}{٢} (أ + (ن - ١) د)$$

مثال (١)

جد مجموع المتسلسلة الحسابية:

$$٢ + ٥ + ٨ + ١١ + ١٤ + ١٧ + ٢٠ + ٢٣ + ٢٦$$

الحل

المتسلسلة حسابية حدها الأول ٢ وحدها الأخير ٢٦ وعدد حدودها ٩ .

$$\text{بتطبيق الصيغة } ج_n = \frac{ن}{٢} (أ + ح_n)$$

$$ج_٩ = \frac{٩}{٢} (٢ + ٢٦)$$

$$= \frac{٩}{٢} \times ٢٨ = ١٢٦$$

تدريب (١)

جد مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة ابتداءً من ١ ولغاية ٦٠ .

مثال (٢)

جد مجموع المتسلسلة الحسابية: $١٢ + \dots + ٦٠ + ٦٦ + ٧٢$

الحل

$$أ = ٧٢ ، ح_n = ١٢ ، د = -٦$$

$$\text{نجد عدد الحدود، } ح_n = أ + (ن - ١) د$$

$$١٢ = ٧٢ + (ن - ١) (-٦)$$

$$١٢ = ٧٢ - ٦(ن - ١)$$

$$٦٦ = ٦ن$$

$$١١ = ن$$

$$\text{وبتطبيق صيغة المجموع } ج_n = \frac{١}{٢} (١٢ + ٧٢) = ٤٦٢$$

تدريب (٢)

جد مجموع الأعداد الزوجية من ٢ ولغاية ١٠٠.

مثال (٣)

إذا كان جـ ن من متسلسلة حسابية هو ٣ ن - ٢ - ١٠ فما حدها العاشر؟

الحل

$$\begin{aligned} \text{ح } ١٠ &= ١٠ - ١٠ - ٩ \\ &= ٣(١٠) - ١٠ \times ١٠ - (٢٩ \times ٣) - (٩ \times ١٠) \\ &= ٣٠٠ - ١٠٠ - ٢٤٣ - ٩٠ = ٤٧ \end{aligned}$$

مثال (٤)

مسرح فيه ٢٠ صفًا من المقاعد، يتسع الصف الأول إلى ١٢ مقعدًا والصف الثاني إلى ١٤ مقعدًا والصف الثالث إلى ١٦ مقعدًا، ... وهكذا. جد عدد مقاعد المسرح.

الحل

$$\begin{aligned} \text{عدد مقاعد المسرح} &= ١٢ + ١٤ + ١٦ + \dots \text{ إلى } ٢٠ \text{ حد تكون متسلسلة حسابية فيها} \\ &= ١٢ = أ، ٢ = د، ٢٠ = ن \\ \text{بتطبيق القاعدة جـ} &= \frac{ن}{٢} (٢ + (١ - ن) د) \text{ ينتج:} \\ \text{جـ } ٢٠ &= \frac{٢٠}{٢} (٢ + (١ - ٢٠) ٢) \\ &= ١٠ (٣٨ + ٢٤) = ٦٢٠ = ٦٢ \times ١٠ = ٦٢٠ \text{ مقعدًا} \end{aligned}$$

تدريب (٣)

خزان ماء سعته ٦٧٥ م^٣. تسرب منه في اليوم الأول ١٠ م^٣ ويتسرب منه في كل يوم ٥ م^٣ زيادة على ما تسرب منه في اليوم السابق له مباشرة. أجب عما يأتي:

- (١) جد كمية الماء التي تتسرب من الخزان في اليوم الثاني عشر.
- (٢) بعد كم يوم يصبح الخزان فارغًا تمامًا؟

تمارين و مسائل

(١) جد مجموع كل من المتسلسلات الآتية:

أ ($٥ + ٨ + ١١ + \dots$ إلى ١٦ حدًا.

ب ($٨٤ + ٨٠ + ٧٦ + \dots + ٨$

ج ($\sum_{n=1}^{12} (٢-٣٠)$

(٢) تندرج كرة على منحدر طوله ١٠٠ متر، تقطع في الثانية الأولى ٤ سم وفي الثانية الثانية ١٢ سم وفي الثانية الثالثة ٢٠ سم، وهكذا. كم ثانية تحتاج الكرة للوصول إلى نهاية المنحدر؟

(٣) تتقاضى شركة لحفر الآبار ٣٠ دينارًا عن حفر المتر الأول و ٣٤,٥ دينارًا عن حفر المتر الثاني و ٣٩ دينارًا عن حفر المتر الثالث، وهكذا. جد:

أ (تكلفة حفر المتر الثاني عشر.

ب (مجموع ما تتقاضاه الشركة عن حفر بئر عمقه ٢٠ مترًا.

(٤) إذا كان $ج_n$ لمتسلسلة حسابية هو $٣٠ - ٦$ ، فما قيمة الحد السابع في المتسلسلة؟

(٥) كم متوسطًا حسابيًا يمكن إدخاله بين العددين ٢، ٥٠ بحيث يصبح مجموع المتسلسلة الحسابية الناتجة ٢٣٤؟

(٦) أثبت أن:

أ ($ج_n$ لمتسلسلة الأعداد الفردية الموجبة $١ + ٣ + ٥ + ٧ + \dots = ٢٠$

ب ($\sum_{r=1}^n \frac{(١+n)٢}{٢} = ر$ ج ($\sum_{r=1}^n ك = ٢٠ \times ك$ ، حيث ك عدد ثابت.

(٧) أثبت أنه إذا كان $ج_n$ مجموع متسلسلة حسابية عدد حدودها (ن) فإن قيمة الحد الأوسط فيها $\frac{ج_n}{٢}$ إذا كان عدد الحدود فرديًا، ومجموع الحدين الأوسطين $\frac{٢}{٢}$ ، إذا كان عدد الحدود زوجيًا.

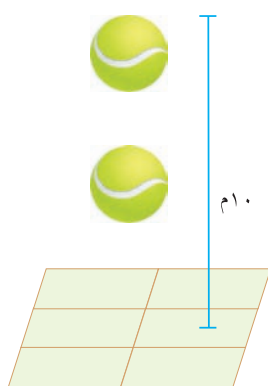
(ملاحظة: إذا كان عدد حدود متسلسلة (ن) فإنه يوجد للمتسلسلة حدًا أوسط واحد رتبته $\frac{١+ن}{٢}$ إذا كان ن فرديًا، وحدان أوسطان رتبتاهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$ إذا كان ن زوجيًا).

النتائج

- تتميز المتتاليات والمتسلسلات الهندسية.
- تجد مجموع متسلسلة هندسية منتهية.
- تجد مجموع متسلسلة هندسية تقاربية غير منتهية.
- تحل مسائل على مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية وغير المنتهية.

Geometric Sequences

أولاً: المتتالية الهندسية



سقطت كرة مطاطية من ارتفاع ١٠ م فوق سطح الأرض، إذا كانت الكرة ترتد بعد كل اصطدام بالأرض إلى ٥٠٪ من ارتفاعها السابق مباشرة. فكم سيكون ارتفاعها بعد اصطدامها الخامس؟

تأمل المتتالية ٢، ٦، ١٨، ٥٤، تلاحظ أن الحد الثاني يساوي ثلاثة أمثال الحد الأول والحد الثالث يساوي ثلاثة أمثال الحد الثاني وهكذا. أي أن النسبة بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوي مقداراً ثابتاً. $\frac{6}{2} = 3$ ، $\frac{18}{6} = 3$ ، $\frac{54}{18} = 3$ ، ... وهكذا. إن هذه المتتالية وأمثالها تسمى **متتالية هندسية**.

تعريف

المتتالية الهندسية: متتالية تكون فيها النسبة بين كل حد إلى الحد السابق له مباشرة نسبة ثابتة تسمى أساس المتتالية ويرمز لها بالرمز (ر) ويُرمز للحد الأول في المتتالية بالرمز (أ). تُسمى المتسلسلة المرتبطة بالمتتالية الهندسية متسلسلة هندسية.

لتعيين متتالية هندسية يكفي معرفة حدها الأول وأساسها.

مثال (١)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٣ وأساسها ٢.

الحل

الحد الأول = ٣ ، الحد الثاني = $٢ \times ٣ = ٦$ ، الحد الثالث = $٢ \times ٦ = ١٢$ ،

الحد الرابع = $٢ \times ١٢ = ٢٤$ ، الحد الخامس = $٢ \times ٢٤ = ٤٨$

تدريب (١)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٨ وأساسها $\frac{1}{3}$.

لاحظ أن المتتالية الهندسية التي حدها الأول (أ) وأساسها (ر) هي : أ، أر، أر^٢، أر^٣، ...

وبشكل عام الحد العام (ح_ن) للمتتالية الهندسية التي حدها الأول (أ) وأساسها (ر) هو : ح_ن = أر^{ن-١}

مثال (٢)

يُبين أن المتتالية ٦، ٢، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{9}$ ، ... هندسية ثم جد حدها السادس.

الحل

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{2}{9} = \frac{2}{3} \div 3 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

تدريب (٢)

جد الحد الخامس من متتالية هندسية حدها الأول ٤ وأساسها $\frac{1}{3}$.

فكر وناقش

هل يمكن أن يكون الصفر أحد حدود متتالية هندسية؟ وضح إجابتك.

مثال (٣)

اكتب المتسلسلة الهندسية $٤ + ٠,٨ + ٠,١٦ + \dots$ باستخدام رمز المجموع.

الحل

$$أ = ٤، ر = \frac{٠,٨}{٤} = ٠,٢$$

$$ح_n = أ ر^{n-١} = ٤ (٠,٢)^{n-١}$$

$$\dots + ٠,١٦ + ٠,٨ + ٤ = ٤ (٠,٢)^{n-١} \sum_{n=١}^{\infty}$$

تدريب (٣)

اكتب المتسلسلة الهندسية $٦٤ + ١٦ + ٤ + ١ + \frac{1}{٤} + \dots$ باستخدام رمز المجموع.

مثال (٤)

اشترى شخص سيارة بقيمة ٢٠٠٠٠ دينارٍ وخلال السنوات اللاحقة كانت السيارة تفقد ١٠٪ من قيمتها سنوياً.

(١) اكتب قاعدة الحد العام للمتتالية التي تعطي قيمة السيارة بعد ن سنة.

(٢) جد قيمة السيارة في بداية السنة السادسة لأقرب دينار.

الحل

بما أن السيارة تفقد ١٠٪ من قيمتها سنوياً، فإن قيمة السيارة في بداية كل عام تصبح ٩٠٪ من قيمتها في بداية العام السابق له.

(١) قيمة السيارة في بداية السنة الأولى = ٢٠٠٠٠ دينارٍ

" " " " " الثانية = $(٠,٩) \times ٢٠٠٠٠$

" " " " " الثالثة = $٢(٠,٩) \times ٢٠٠٠٠$

" " " " " ن = $١-n(٠,٩) \times ٢٠٠٠٠$

(٢) قيمة السيارة في بداية السنة السادسة = $٥(٠,٩) \times ٢٠٠٠٠ \approx ١١٨١٠$ دنانير.

قانون حساب جملة الربح المركب ج = م (١ + ر)^ن حيث:
ج: جملة المبلغ، م: المبلغ المودع، ر: النسبة المئوية للفائدة، ن: عدد السنوات .

مثال (٥)

أودع شخص مبلغ ١٠٠٠ دينار في بنك بحساب الربح المركب وبفائدة سنوية مقدارها ٤٪ سنوياً تضاف في نهاية كل سنة. يبين أن جملة المبلغ خلال سنوات الاستثمار تشكل متتالية هندسية ثم جد جملة المبلغ لأقرب دينار في نهاية السنة السادسة.

الحل

$$ح_١ = أ = ١٠٠٠، ر = ٤٪$$

$$ح_٢ = ١٠٠٠ (١ + ٠,٠٤)$$

$$ح_{٢+ن} = \text{جملة المبلغ بعد } ١+ن \text{ من السنوات} = ١٠٠٠ (١ + ٠,٠٤)^{١+ن}$$

$$ح_{١+ن} = \text{جملة المبلغ بعد } ن \text{ من السنوات} = ١٠٠٠ (١ + ٠,٠٤)^ن$$

$$١,٠٤ = ٠,٠٤ + ١ = \frac{١ + ٠,٠٤}{١ + ٠,٠٤} = \frac{ح_{٢+ن}}{ح_{١+ن}} \text{ إذن فالمتتالية هندسية أساسها } ١,٠٤$$

$$\text{جملة المبلغ في نهاية السنة السادسة} = ح_٦ = ١٠٠٠ (١ + ٠,٠٤)^٥ \approx ١٢١٧ \text{ ديناراً}$$

تدريب (٤)

أودع مبلغ ١٥٠٠ دينار لمدة ٨ سنوات لدى بنك يعطي فائدة مركبة مقدارها ٥٪ سنوياً تضاف في نهاية كل سنة جد جملة المبلغ لأقرب دينار.

في الدرس السابق أنشئت متتاليات حسابية بإدخال متوسطات حسابية بين عددين. ستكرر العملية في المتتاليات الهندسية ولكن بإدخال متوسطات هندسية. و بصورة عامة:

إذا كان أ ، ب عددين وأمكن إيجاد عدد من الحدود $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ بحيث تصبح
أ ، $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ ، ب متتالية هندسية، فإن $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ تسمى متوسطات هندسية.

مثال (٦)

أدخل ٣ متوسطات هندسية بين العددين ١٠ ، ١٦٠.

الحل

بعد إدخال المتوسطات الهندسية يصبح عدد حدود المتتالية $2 + 3 = 5$.
أ = ح_١ = ١٠ ، ح_٥ = أ_٤ ← ١٦٠ = أ_٤ ← ١٦ = أ_٣ ← ٢ = أ_٢ ← ٢ = أ_١
وهذا يعني وجود متتاليتين.

الأولى: عندما $r = 2$ وهي: ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ١٦٠.
والثانية: عندما $r = -2$ وهي: ١٠ ، ٢٠ - ، ٤٠ - ، ٨٠ - ، ١٦٠.

تدريب (٥)

أدخل متوسطين هندسيين بين $\frac{1}{4}$ ، ٣٢ .

فكر وناقش

(١) اعتمادًا على مثال (٦) وتدريب (٥) متى ينتج عن إدخال متوسطات هندسية متتاليتان، ومتى تنتج متتالية واحدة؟ برر إجابتك.

(٢) إذا كان أ ، ب عددين موجبين معًا أو سالبين معًا وكان ج متوسطهما الهندسي، فبين

$$أ \times ب = ج^2$$

تمارين و مسائل

- (١) بين أي المتتاليات الآتية هندسية ثم جد حدّها العام:
 أ (٢، ٦، ١٨، ٥٤، ...، ٤٨٦)
 ب (ل، ٣ل، ٩ل، ٢٧ل، ...، ل ≠ صفرًا .
 ج (-٣، -١٢، -٢٤، -٣٦، ...
 د (٩، -٣، ١، -١/٣، ١/٩)
- (٢) اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتاليات الهندسية الآتية:
 أ (٣٢ = أ، $r = \frac{1}{2}$)
 ب (٥٠ = أ، $r = -١,٠$)
 ج (٨١ = أ، $r = \frac{2}{3}$)
- (٣) اكتب المتسلسلة الهندسية ٢٤ + ١٢ + ٦ + ٣ + ... باستخدام رمز المجموع $\sum$.
- (٤) جد الأساس والحد العام للمتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^n$ (٢) ك .
- (٥) أدخل متوسطًا هندسيًا بين كل عددين في ما يأتي:
 أ (٣، ١٢) ب (-٢، -٨)
- (٦) أدخل ٤ متوسطات هندسية بين العددين ٨، ٢٥٦ بحيث تشكل الأعداد جميعها متتالية هندسية.
- (٧) يتزايد عدد سكان إحدى القرى الأردنية بمقدار ٢٪ سنويًا. إذا كان عدد سكان القرية في إحدى السنوات (أ)، فأثبت أن عدد سكانها بعد ن سنة ح = أ (١ + ٠,٠٢)^{n-١} وأن المتتالية هندسية.
- (٨) جد جملة مبلغ (٢٠٠٠) دينار استثمر في بنك بفائدة مركبة معدلها (٦ ٪) سنويًا لمدة ٥ سنوات.
- (٩) ورقة مربعة الشكل طول ضلعها متر واحد وسمكها ١ ملم ، طويت ١٠ مرات .
 أ (اكتب قاعدة الحد العام لمساحة الورقة بعد طيها .

(ج) جد مساحة وسمك الورقة بعد طيها ١٠ مرات.

إرشاد: $\left(\frac{أ-ب}{٢}\right)^٢ < ٠$.

(أ) ج ك_١ ، ج ك_٢ ، ج ك_٣ ، ... ، ج ≠ صفراً

(ب) ك^٢١، ك^٢٢، ك^٢٣، ...

(ج) $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{2}{3}$ ، ...

(١٢) أثبت أن المتتالية الناتجة من ضرب الحدود المتناظرة في متتاليتين هندسيتين تكون هندسية أيضا.

(١٣) إذا كانت س، ص، ع ثلاثة حدود لمتتالية هندسية فأثبت أن $\frac{1}{ص-س}$ ، $\frac{1}{ص}$ ، $\frac{1}{ص-ع}$ تشكل متتالية حسابية.

ثانيًا: مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية Sum of Finite Geometric Series

يعاني عامر من السمنة ويريد إنقاص وزنه، فقرر ممارسة الرياضة والالتزام ببرنامج غذائي لمدة ٦ شهور، من المتوقع أن يخسر من وزنه في الشهر الأول ١٠ كغ وفي الشهر الثاني ٥ كغ وفي الشهر الثالث ٢,٥ كغ وهكذا. جد مجموع ما خسره من وزنه في نهاية برنامجه.

مجموع ما خسره عامر من وزنه هو $١٠ + ٥ + ٢,٥ + \dots$ إلى الحد السادس.

إن إيجاد ناتج الجمع بالطريقة العادية يحتاج إلى وقت وجهد كبيرين إذا كان عدد حدود المتسلسلة كبيراً، لذلك لا بد من طريقة تُسهّل إيجاد المجموع.

افرض أن J_n مجموع أول n حدًا من المتسلسلة الهندسية: $أ + أر + أر^٢ + أر^٣ + \dots$

$$J_n = أ + أر + أر^٢ + \dots + أر^{n-١} \quad (١)$$

$$ر J_n = أر + أر^٢ + أر^٣ + \dots + أر^n \quad (٢) \quad \text{ضرب طرفي المعادلة في } ر$$

$$ر J_n - J_n = أر^n - أ \quad \text{بطرح المعادلة (٢) من المعادلة (١)}$$

$$J_n(ر - ١) = أر^n - أ \quad \text{إخراج } J_n \text{ عاملاً مشتركاً من الطرفين الأيمن و } أ \text{ من الطرف الأيسر}$$

$$J_n = \frac{أ(ر^n - ١)}{ر - ١} \quad \text{القسمة على } (ر - ١)$$

مجموع أول n حدًا من متسلسلة هندسية حدها الأول $(أ)$ وأساسها $(ر)$ يرمز له بالرمز J_n ويعطى بالعلاقة الآتية:

$$J_n = \begin{cases} \frac{أ(ر^n - ١)}{ر - ١} , & ر \neq ١ \\ ن أ , & ر = ١ \end{cases}$$

مثال (١)

جد جـه للمتسلسلة الهندسية التي حدها الأول ٦٤ وأساسها $\frac{1}{2}$.

الحل

$$128 = \frac{\left(\frac{31}{32}\right) 64 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{32}\right) 64}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) 64}{1 - \frac{1}{2}} = \text{جـه}$$

تدريب (١)

جد مجموع الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة الهندسية:
١٦ - ٨ + ٤ - ٢ ...

فكر وناقش

هل من الممكن أن تكون المتتالية حسابية وهندسية في آن واحد؟ أعط مثالا يدعم رأيك.

مثال (٢)

جد مجموع المتسلسلة $\sum_{k=1}^5 6(0,2)^k$

الحل

المتسلسلة هندسية حدها الأول $6(0,2) = 1,2$ وأساسها ٠,٢

$$1,5 \approx \frac{0,99968 \times 1,2 - \frac{1}{2}}{0,8 - \frac{1}{2}} = \frac{\left(1 - \left(0,2\right)^5\right) 1,2}{1 - 0,2} = \text{جـه}$$

تدريب (٢)

جد مجموع المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^6 8(0,3)^k$

تمارين و مسائل

(١) جد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية الآتية:

أ ($9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \dots$ إلى ٨ حدود

ب) الحد الأول = ١٢٨ ، الأساس $\frac{1}{4}$ ، عدد الحدود ١٠

ج) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ إلى ٦٠ حدًا .

(٢) جد المجموع لكل متسلسلة في ما يأتي:

أ $\sum_{n=1}^3 (2)^{n-1}$ ب $\sum_{n=1}^4 (\frac{1}{2})^n$

(٣) متسلسلة هندسية حدها الثاني $\frac{3}{4}$ وحدها الخامس ١٢ . جد مجموع الحدود الستة الأولى من المتسلسلة.

(٤) حلّ المسألة في بداية الدرس.

(٥) صُبَّ في خزان ماء ٢٥٦ لترا في اليوم الأول، وبعد ذلك كان يُصب فيه $\frac{3}{4}$ ما كان يصب فيه اليوم السابق له مباشرة . جد سعة الخزان إذا امتلأ بعد ٥ أيام.

ثالثاً: مجموع المتسلسلة الهندسية الانهائية Sum of Infinite Geometric Series

تعلمت سابقاً أن مجموع أول n حدٍّ من حدود متسلسلة هندسية حدها الأول (أ) وأساسها (ر) هو:

$$ج_n = \frac{أ(1 - ر^n)}{1 - ر} ، \quad ر \neq 1$$

والسؤال الآن هل يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية ؟

للإجابة عن السؤال السابق ادرس المتسلسلة الآتية:

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

لاحظ أنه كلما ازدادت قيمة n تتناقص قيم حدود المتسلسلة، وكذلك الأمر بالنسبة إلى $ر^n$.

$$\left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{1}{10} ، \quad \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} ، \quad \dots ، \quad \left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{1000000} \text{ وهكذا.}$$

والسبب لأن قيمة $1 - ر > 1$. يمكن القول أنه عندما تكبر قيمة n بحيث تقترب من ما لا نهاية قيمة $ر^n$ تصبح قريبة من الصفر ويمكن إهمالها وهذا يعني أنه يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية من هذا النوع ويصبح القانون:

$$ج_n = \frac{أ}{1 - ر} ، \quad ر \neq 1$$

$$\text{أي أن } 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

ومثل هذه المتسلسلات غير المنتهية تسمى **تقاربية** لأن مجموعها عدد حقيقي. وإذا لم تكن المتسلسلة تقاربية تُسمى غير تقاربية (**تباعدية**) ولا يمكن إيجاد مجموعها.

تكون المتسلسلة الهندسية غير المنتهية التي أساسها (ر) وحدها الأول (أ) تقاربية إذا كان

مجموعها عدد حقيقي وحيث $|ر| < 1$ ، وفي هذه الحالة يكون مجموعها:

$$ج_n = \frac{أ}{1 - ر}$$

أما إذا كانت $|ر| \geq 1$ ، فتكون المتسلسلة الهندسية غير المنتهية غير تقاربية (تباعدية)، لا يمكن إيجاد مجموع محدد لها.

مثال (١)

جد مجموع المتسلسلة $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots$

الحل

المتسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية فيها $u = 2$ ، $r = -\frac{1}{2}$

$$S_{\infty} = \frac{u}{1-r} = \frac{2}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

تدريب (١)

جد مجموع المتسلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} (-\frac{1}{4})^k$

مثال (٢)

اكتب الكسر العشري الدوري $0,6\overline{5}$ على صورة كسر.

الحل

يمكن كتابة الكسر العشري الدوري $0,6\overline{5}$ على الصورة:

$$0,6\overline{5} = 0,65 + 0,0065 + 0,000065 + \dots$$

وهذه متسلسلة هندسية لا نهائية تقاربية فيها: $u = 0,65$ ، $r = 0,01$ مجموعها:

$$S_{\infty} = \frac{u}{1-r} = \frac{0,65}{1 - 0,01} = \frac{0,65}{0,99} = \frac{65}{99}$$

تدريب (٢)

اكتب الكسر العشري الدوري $0,37\overline{5}$ على صورة كسر.

تمارين و مسائل

(١) جد مجموع المتسلسلات اللانهائية الآتية إن أمكن:

أ) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

ب) $4 + 4 + 4 + 4 + \dots$

ج) $8 + 0,8 + 0,08 + \dots$

د) $\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1 + \dots$

(٢) اكتب كلا من الكسور العشرية الدورية الآتية على صورة متسلسلة هندسية لا نهائية ثم حوّلها إلى كسر عادي .

أ) $0,3$ ب) $0,45$ ج) $1,35$

(٣) مربع طول ضلعه ١٦ سم، نصفت أضلاعه ووصل بين نقاط منتصفات أضلاعه المتجاورة بقطع مستقيمة فتكون مربع آخر، ثم كررت العملية إلى ما لانهاية. جد مجموع مساحات المربعات جميعها.

(٤) بيّن أن المتسلسلة الآتية هندسية ثم جد مجموعها.

$$\frac{1+k}{2k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{1+k} - \dots, \quad k < \text{صفر}.$$

(٥) جد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (0,2)^n$

(٦) سقطت كرة مطاطية من ارتفاع ٢٤ قدم على سطح أرض مستوية، فارتدت إلى $\frac{3}{5}$ ارتفاعها وهكذا في كل مرة تصطدم بها في الأرض. جد مجموع المسافات التي قطعتها الكرة.

أسئلة الوحدة

- (١) اكتب قاعدة الحد العام للمتتاليات الآتية:
- أ (٢، ٥، ١٠، ١٧، ...)
 ب (١، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{27}{8}$ ، ...)
 ج (٢، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{5}{4}$ ، ...)
- (٢) استخدم رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الآتية :
- أ (٣ + ٦ + ٩ + ... + ٨٧)
 ب (٢ - ٤ + ٨ - ١٦ + ...)
 ج ($\frac{1}{3 \times 1} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{5 \times 3} + \dots + \frac{1}{12 \times 10}$)
 د (١ - $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{9}$ - $\frac{1}{16}$ + ...)
- (٣) حدد نوع المتتالية من حيث كونها حسابية أو هندسية أو ليست كذلك، ثم جد الحدود الأربعة الأولى منها .
- أ ($ح_n = 4 - n$)
 ب ($ح_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1$)
 ج ($\frac{1+n}{2^n}$)
 د ($2 - 4, 8 - 16, \dots$)
- (٤) جد مجموع كل من المتسلسلات الآتية:
- أ ($8 + 10 + 12 + \dots + 58$)
 ب ($\sum_{n=1}^8 3(2)^n$)
 ج ($\sum_{n=1}^{\infty} (6, 0)^n$)
- (٥) جد عدد مضاعفات العدد ٤ التي تقع بين ١٠، ١٠٢ .
- (٦) أ (أدخل ٤ متوسطات حسابية بين العددين ١ - ٩ .)
 ب (أدخل ٤ متوسطات هندسية بين العددين ٣، ٧٢٩)
- (٧) شخص وزنه ١٠٠ كغم، يريد إنقاص وزنه بمعدل ٢ كغم شهرياً. بعد كم شهر يصبح وزنه ٨٢ كغم؟

٨) مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ١٦ سم، نصّفت أضلاعه ثم وُصل بينها بقطع مستقيمة فتشكل مثلث ثم نصفت أضلاع المثلث الجديد و وصل بينها فتكوّن مثلث آخر ... وهكذا إلى ما لا نهاية. جد:

أ) مجموع محيطات المثلثات الناتجة .

ب) مجموع مساحات المثلثات الناتجة.

٩) يتزايد عدد سكان مدينة بمعدل ٢,٥ ٪ سنوياً. إذا كان عدد سكان المدينة عام ٢٠١٤ يساوي ١٠٠٠٠٠ نسمة. فكم سيبلغ عدد سكانها بعد ٥ سنوات؟

١٠) أودع شخص مبلغ ١٠٠٠٠ دينار بحساب الربح المركب و بفائدة سنوية مقدارها ٦٪. هل تكفي جملة المبلغ بعد ١٠ سنوات لشراء سيارة ثمنها ١٧٩٠٠ دينار؟

١١) أ) في المتتالية التي حدها العام $ح_n = ٢ن + ن$ ، أثبت أن $ح_{ن+١} < ح_n$.

ب) في المتتالية التي حدها العام $ح_n = \frac{١}{٥}$ ، أثبت أن $ح_{ن+١} > ح_n$.

١٢) إذا كوّنّت الأعداد أ، ب، ج متتالية حسابية حيث $أ \neq ب \neq ج$ ، وكوّنّت الأعداد أ، ب - أ، ج - أ متتالية هندسية، فأثبت أن $أ = \frac{ب}{٣} = \frac{ج}{٥}$.

١٣) أ) إذا كوّنّت الأعداد ٢هـ + ك، ٣ك - ٥، ٥ + ك متتالية حسابية حيث هـ، ك $\neq ٠$ ، فما قيمة الثابتين هـ، ك؟ هل المتتالية وحيدة؟

ب) إذا كوّنّت الأعداد س - ٤، س + ٢، س + ١٤ متتالية هندسية فما قيمة س؟

١٤) أ) ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها - ٣ وحاصل ضربها ٢٤، ما هذه الأعداد؟

ب) ثلاثة أعداد تشكل متتالية حسابية مجموعها $\frac{٣}{٤}$ وحاصل ضربها $\frac{١}{٨}$ ، ما هذه الأعداد؟

١٥) سقطت كرة من ارتفاع ١٢ قدماً على سطح مستوٍ وكانت ترتد إلى $\frac{٣}{٥}$ ارتفاعها السابق عند اصطدامها بالأرض في كل مرة. جد مجموع المسافات التي قطعها الكرة.

١٦) يتكوّن هذا السؤال من تسع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) قاعدة الحد العام ح_n للمتتالية ٤، ٧، ١٠، ١٣، ... هي:

أ (٤) ن (ب) ٣ ن + ١ (ج) ن + ١ (د) ٥ ن - ١

(٢) ما عدد حدود المتسلسلة الحسابية: ٢ + ١، ٢ + ٠، ٤ - ٠، ٤ - ... - ٥، ٢ .

أ (٥) (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ١٠

(٣) الحد السادس في المتتالية ٩، - ٣، ١، - ١/٣، ...، هو:

أ (١/٢٧) - (ب) ١/٢٧ (ج) ١/٨١ (د) ١/٨١ -

(٤) الكسر العادي الذي يساوي الكسر العشري الدوري ٠,١٨ هو:

أ (٢٠/١١) (ب) ١/١١ (ج) ٢/١١ (د) ١١١/٥٥

(٥) المتوسط الهندسي للعددين - ٤، - ١٦ هو:

أ (١٢) (ب) - ١٠ (ج) - ٨ (د) ١٠

(٦) قيمة $\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$

أ (٢/٣) (ب) ٢ (ج) ٢/٣ - (د) ٢ -

(٧)* مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية $(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots)$ يساوي:

أ (٥/٨) (ب) ٢/٣ (ج) ٣/٢ (د) ∞

(٨) متتالية حسابية حدها السابع ١/٢ و حدها العاشر ٢١ فما أساسها؟

أ (١/٥) (ب) ٣ (ج) ١/١٦ (د) ٣/٥

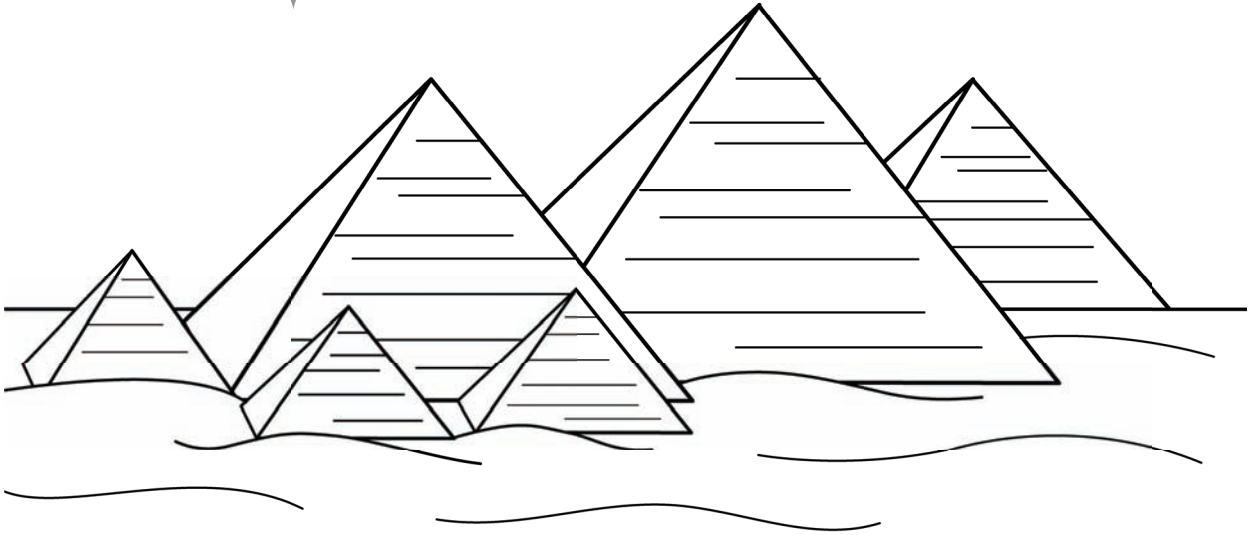
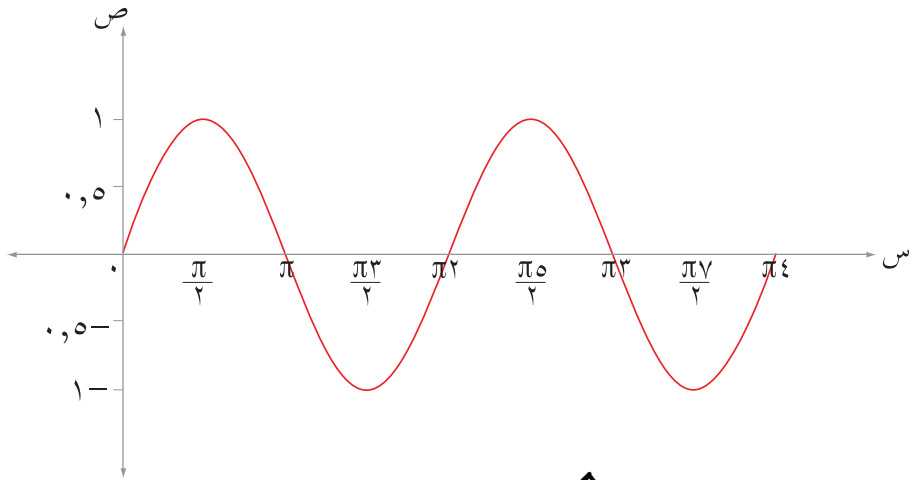
(٩) متتالية هندسية حدها الثاني ٣٢ و حدها الخامس ٤، فما حدها السابع؟

أ (٢) (ب) ١ (ج) ١/٢ (د) ١/٨

* من أسئلة الاختبارات الدولية.

الفصل الدراسي الثاني

منذ البدء اهتم العلماء بحساب المثلثات و كان أكثر اهتمامهم بالزوايا والأضلاع. وللمثلثات أهمية في المجالات كافة مثل الهندسة، الفلك، الملاحة، والمساحة ومع تطور علم الفيزياء، وظهور علم التكامل والتفاضل تطور علم المثلثات وزادت أهميته، و كان أول من اهتم بحساب المثلثات الفراعنة القدماء واستخدموا هذا العلم في بناء الأهرامات، ثم أصبح علماً مستقلاً بذاته، وأشهر العلماء المسلمين المهتمين به : (الزرقلي، ونصير الدين الطوسي، وأبو عبد الله البتاني).



Trigonometric Functions

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على:

- التمييز بين التقدير الدائري، و القياس الستيني، وحلّ مسائل عليهما.
- استقصاء خصائص الاقترانات المثلثية (الجيب ، جيب التمام ، والظل).
- رسم منحنيات الاقترانات المثلثية يدوياً وباستخدام التكنولوجيا.
- إيجاد الدورة والسعة والمجال والمدى للاقترانات المثلثية (جاه ، جتاه ، ظاهر)
(إن أمكن ذلك).
- وصف سلوك منحنى الاقتران تحت تأثير التحويلات (الانسحاب الرأسي و الأفقي).
- تحليل متطابقات مثلثية جبرياً (تشمل مجموع زاويتين والفرق بينهما، نصف الزاوية، وضعف الزاوية).
- برهنة المتطابقات المثلثية.
- حلّ معادلات مثلثية (الحلّ الأولي والحلّ العام) جبرياً.
- حلّ مشكلات تتعلق بالاقترانات المثلثية وتبرير الحل.

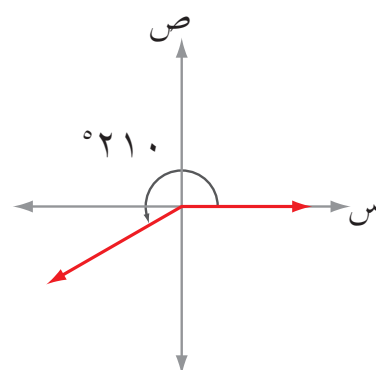
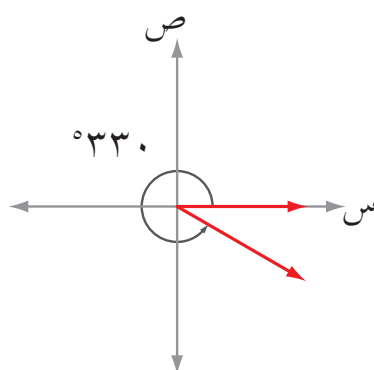
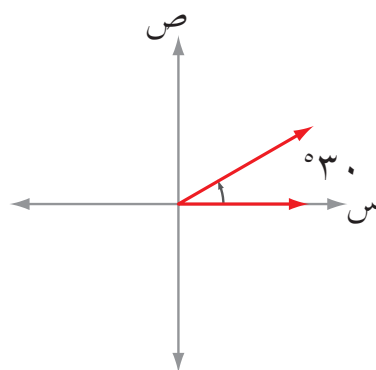
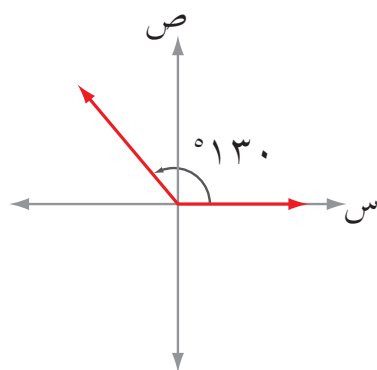
النتائج

- تميز بين التقدير الدائري والقياس الستيني وتحول بينهما.
- تستخدم التقدير الدائري لإيجاد طول قوس في دائرة.



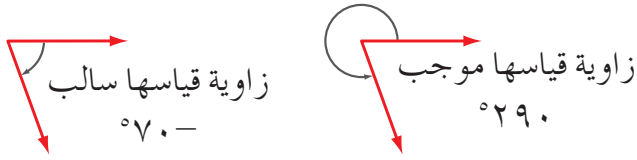
في لعبة للأطفال يمكن تركيب مضمار دائري لسباق سيارتين يتكون من (١٠) قطع متطابقة، كل واحدة منها تأخذ شكل قوس دائري بحيث يكون طول القوس الداخلي أقصر من طول القوس الخارجي بمقدار (٣,١٤) سم، ما عرض القطعة؟

تعلمت في الصفوف السابقة أن الزاوية عبارة عن شعاعين منطلقين من النقطة نفسها، يسمى



أحدهما ضلع الابتداء والضلع الآخر يسمى ضلع الانتهاء، فإذا كان ضلع ابتداء الزاوية منطبقاً على محور السينات الموجب ورأسها في نقطة الأصل، فإن هذه الزاوية تكون في الوضع القياسي لها، و الشكل (١-٤) يوضح بعض الأمثلة على هذه الزوايا.

الشكل (١-٤).



الشكل (٢-٤).

إذا كان اتجاه الدوران الذي تقاس به الزاوية عكس عقارب الساعة يكون قياس الزاوية موجب، أما إذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة يكون قياس الزاوية سالبًا، انظر الشكل (٢-٤).

وقد تشترك أكثر من زاوية في ضلع الانتهاء وذلك نتيجة لدوران ضلع الانتهاء أكثر من دورة حول نقطة الأصل.

ويعبر عن ذلك على الصورة $(هـ + ٣٦٠^\circ \times ن)$ حيث ن عدد صحيح، $٠ < هـ < ٣٦٠^\circ$.

مثال (١)

حدد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء (أو المحور الذي ينطبق عليه ضلع الانتهاء) لكل زاوية مما يأتي:

$$(١) ٥٤٠^\circ \quad (٢) ١٠١٨^\circ - \quad (٣) ١٥٣٠^\circ$$

الحل

$$(١) ٥٤٠^\circ - ٣٦٠^\circ = ١٨٠^\circ \text{ إذن ضلع الانتهاء ينطبق على محور السينات السالب.}$$

$$(٢) ١٠١٨^\circ - ٣٦٠^\circ = ٦٥٨^\circ, \quad ٦٥٨^\circ - ٣٦٠^\circ = ٢٩٨^\circ$$

ضلع الانتهاء لهذه الزاوية يقع في الربع الأول، وللتأكد

من ذلك فإنّ الزاوية الموجبة المقابلة لها هي:

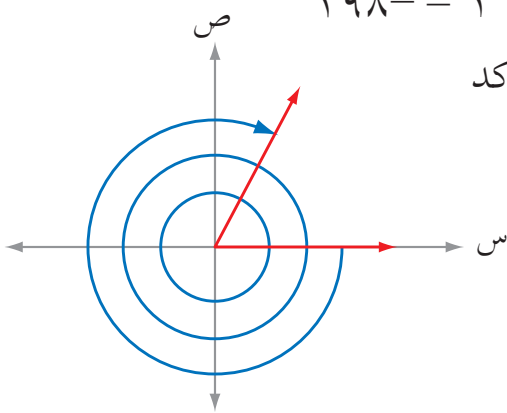
$$٢٩٨^\circ + ٣٦٠^\circ = ٦٥٨^\circ \text{ (لاحظ أنّ الزاوية}$$

أكملت دورتين وزيادة عليها ٢٩٨^\circ بالاتجاه

السالب انظر الشكل (٣-٤)).

$$(٣) ١٥٣٠^\circ - ٤ \times ٣٦٠^\circ = ١٤٤٠^\circ - ١٥٣٠^\circ = ٩٠^\circ$$

ينطبق ضلع الانتهاء لهذه الزاوية على محور الصادات الموجب.



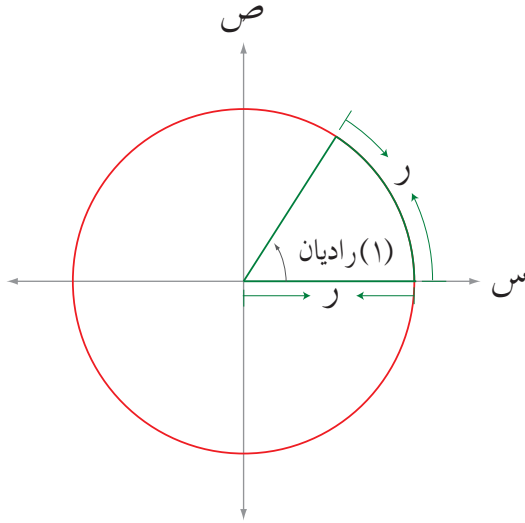
الشكل (٣-٤).

تدريب (١)

حدد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء (أو المحور الذي ينطبق عليه ضلع الانتهاء) لكل زاوية في ما يأتي:

- (١) 310° (٢) 90° (٣) 950°

لقياس وحدات الطول يوجد نظامان عالميان هما النظام المتري ووحدات قياسه المتر وأجزاؤه ومضاعفاته، والنظام الانجليزي ووحداته القدم وأجزاؤه ومضاعفاته. كذلك الزوايا يوجد لها نظامان للقياس، الأول القياس الستيني ووحداته الدرجة ($^\circ$) الدقيقة ($'$) والثانية ($''$).



الشكل (٤-٤).

والآخر **التقدير الدائري** ووحدة قياسه الراديان (Radian) (راد) بحيث يكون: ١ راد قياس زاوية مركزية مرسومة في دائرة الوحدة في الوضع القياسي تقابل قوساً طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة. ويرمز لقياسها بالرمز ١ راد. ولكن كيف يتم التحويل من التقدير الدائري إلى القياس الستيني وبالعكس؟

يعتمد هذا التحويل بشكل أساسي على التناسب،

حيث: 180° زاوية مركزية تقابل قوساً طوله π في دائرة الوحدة (علمًا بأن π هي النسبة التقريبية $\approx 3,14$).

مثال (٢)

حول الزوايا الآتية من القياس الستيني إلى التقدير الدائري:

$$^{\circ} 120 \quad (1) \quad ^{\circ} 700 \quad (2) \quad ^{\circ} 300 \quad (3)$$

الحل

$$\pi \longleftarrow ^{\circ} 180 \quad (1)$$

$$س \longleftarrow ^{\circ} 120$$

$$\frac{\pi 2}{3} = \frac{\pi \times ^{\circ} 120}{^{\circ} 180} = س$$

أي أنّ طول القوس المقابل للزاوية المركزية $^{\circ} 120$ في دائرة الوحدة هو $\frac{\pi 2}{3}$

$$\pi \longleftarrow ^{\circ} 180 \quad (2)$$

$$س \longleftarrow ^{\circ} 700$$

(تناسب)

(اختصار)

$$\frac{\pi 35}{9} = \frac{\pi \times ^{\circ} 700}{^{\circ} 180} = س$$

ملاحظة: يُمكن التحويل من القياس الستيني إلى التقدير الدائري بضرب الزاوية بالقياس الستيني

بالمقدار $\frac{\pi}{^{\circ} 180}$ (لماذا؟)

(باستخدام الملاحظة السابقة)

$$\frac{\pi 5}{3} = \frac{\pi}{^{\circ} 180} \times ^{\circ} 300 \quad (3)$$

مثال (٣)

حول الزوايا الآتية من التقدير الدائري إلى القياس الستيني:

$$\frac{\pi 3}{2} \quad (1) \quad \pi 5 \quad (2) \quad 7 \text{ راد} \quad (3)$$

الحل

(تناسب)

$$(١) \quad \pi \text{ راد} \longleftarrow 180^\circ$$

$$\text{س} \longleftarrow \frac{\pi 3}{2}$$

$$270^\circ = \frac{180^\circ \times \pi 3}{\pi \times 2} = \text{س}$$

(تناسب)

$$(٢) \quad \pi \longleftarrow 180^\circ$$

$$\pi 5 \longleftarrow \text{س}$$

(اختصار)

$$\text{س} = \frac{180^\circ \times \pi 5}{\pi} = 900^\circ$$

ملاحظة: يمكن التحويل من التقدير الدائري إلى القياس الستيني من خلال ضرب الزاوية بالقياس الدائري بالمقدار $\frac{180}{\pi}$. (لماذا؟)

$$(٣) \quad 7 \text{ راد} \times \frac{180}{\pi} = 7 \times 180 \times \frac{7}{22} = 540.54^\circ \quad (\text{باستخدام الملاحظة السابقة})$$

تدريب (٢)

(١) حول الزوايا الآتية من القياس الستيني إلى التقدير الدائري:

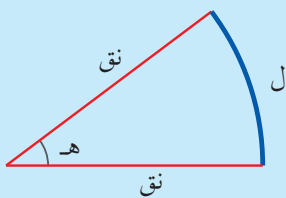
(أ) 225° (ب) 720° (ج) 330°

(٢) حول الزوايا الآتية من التقدير الدائري إلى القياس الستيني:

(أ) $\frac{7\pi}{6}$ راد (ب) $\frac{3\pi}{4}$ راد (ج) 7π راد

من تعريف الراديان يمكن استنتاج أن:

طول القوس المقابل للزاوية المركزية = نصف القطر $\times$ قياس الزاوية بالتقدير الدائري



$$ل = \text{نق} \times \text{هـ} \quad (\text{بالتقدير الدائري})$$

استخدم فكرة طول القوس لاستنتاج محيط دائرة نصف قطرها نق.

مثال (٤)

دائرة نصف قطرها يساوي ١٢ سم، احسب طول القوس المقابل للزاوية $\frac{\pi^3}{2}$ راد.

الحل

ل = نق × هـ (بما أن هـ بالقياس الدائري نعوض في القانون مباشرة)

$$= \frac{\pi^3}{2} \times 12 = \pi \times 18 \approx 3,14 \times 18 \approx 56,52 \text{ سم.}$$

مثال (٥)

دائرة طول القوس المقابل للزاوية $\frac{\pi^2}{3}$ راد يساوي ١٤ سم، ما طول نصف قطرها؟

الحل

$$ل = نق \times هـ$$

$$14 = نق \times \frac{\pi^2}{3}$$

$$نق = \frac{3}{\pi^2} \times 14$$

$$\text{ومنه نق} = \frac{7}{\pi^2} \times 21 \approx 6,68 \text{ سم.}$$

(تطبيق على القانون)

(ضرب بمقلوب $\frac{\pi^2}{3}$)

تدريب (٣)

دائرة نصف قطرها ٦ سم، احسب طول القوس المقابل للزاوية 120°

تمارين و مسائل

(١) حول كلاً مما يأتي من التقدير الدائري إلى القياس الستيني:

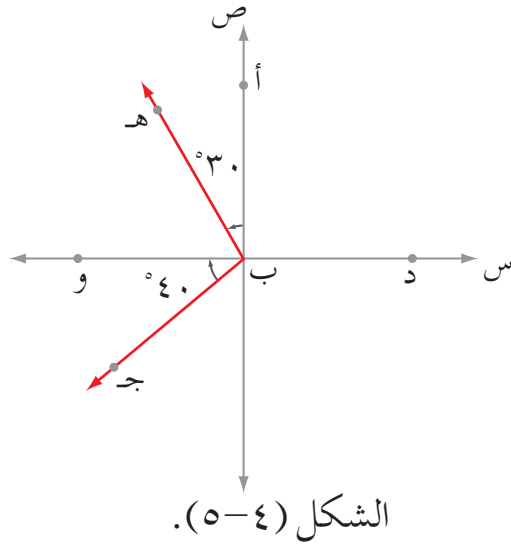
أ - ٢ راد (ب) $\frac{\pi 25}{2}$ راد (ج) $\frac{\pi 3}{2}$ راد

(٢) حول كلاً مما يأتي من القياس الستيني إلى التقدير الدائري:

أ - ٨٠° (ب) ٦١٠° (ج) ٣٢٥°

(٣) بالاعتماد على الرسم المجاور أجب عن كل مما يأتي:

أ (استخدم الزاوية أ ب هـ لإعطاء مثال على زاوية في الوضع القياسي مع ذكر قياسها.
ب) استخدم الزاوية ج ب و لإعطاء مثال على زاوية في الاتجاه السالب مع ذكر قياسها.



(٤) في إحدى الكليات ملعب دائري الشكل تقام عليه مسابقات الجري، مقسم إلى حارات



عرض كل منها ١م، نصف القطر الداخلي للحارة الأولى ٣٣م، ونصف القطر الداخلي للحارة الثانية ٣٤م، ما الفرق بين طول الحارتين الأولى والثانية عند إنهاء نصف لفة؟

(٥) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٦) احسب مساحة القطاع الدائري لدائرة نصف قطرها ٥ سم قياس زاويته المركزية يساوي $\frac{\pi}{5}$ راد (علماً بأنّ مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} r^2 \theta$ حيث θ مقدرة بالتقدير الدائري).

(٧) قوس في دائرة طوله ٧ سم يقابل زاوية مركزية قياسها 100° ، ما طول قطرها؟

(٨) طول قوس في قطاع دائري يساوي أربعة أمثال طول نصف القطر، هل من الممكن معرفة الزاوية المركزية؟

(٩) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٢ : ٣ : ٥، فما قياس كل من هذه الزوايا بالتقدير الدائري والقياس الستيني؟

قوانين الاقتترانات المثلثية The Laws of Trigonometric Functions

الفصل الثاني

النتائج

- تعرف الاقتترانات المثلثية وتجدها لزوايا معطاة.
- تحسب قيم الاقتترانات المثلثية باستخدام زاوية المرجع.

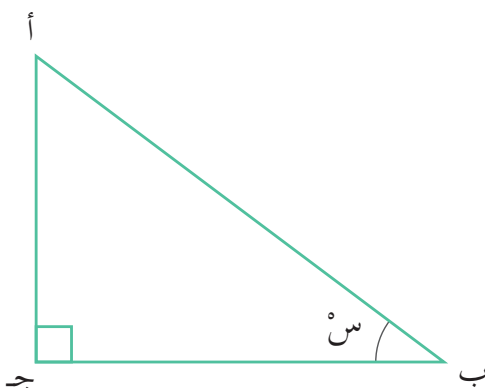


عمق الماء عند نقطة معينة في أحد الموانئ (د)
متر يرتبط بالزمن (ن) ساعة حسب العلاقة الآتية:
 $d = 8 - 3 \sin(0.5n)$ (ن < صفر)
احسب عمق الماء في الميناء في الحالات الآتية:
(١) عند المد (٢) عند الجزر

تعرفت فيما سبق على النسب المثلثية الستة وهي:

الجيب (جاه)، جيب تمام (جتاه)، الظل (ظاه)، ظل تمام (ظتاه)، القاطع (قاه)، قاطع تمام (قتاه).

انظر الشكل (٤-٦) و تذكر أنّ:



الشكل (٤-٦).

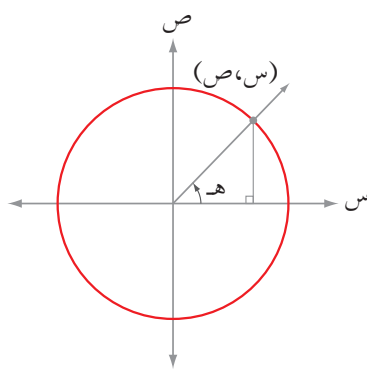
$$\sin \theta = \frac{\text{جاس}}{\text{أب}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{جتاس}}{\text{أب}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}, \quad \cot \theta = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} \quad (\text{جتاس} \neq 0)$$



يكون ظل الزاوية غير معرّف إذا كان قياسها يساوي $90^\circ + 180^\circ \times (ن)$ حيث $ن$ عدد صحيح، لماذا؟

وتعلمت أن $\frac{1}{\text{جتاس}} = \text{قئاس}$ ، $\frac{1}{\text{جاس}} = \text{قئاس}$ ، $\frac{1}{\text{ظئاس}} = \text{ظئاس}$.

ملاحظة: في كل الاقترانات الدائرية المعرفة بدلالة اقتران آخر في المقام - تُستثنى الزوايا التي تجعل المقام يساوي صفر أيما وردت.



الشكل (٧-٤).

في دائرة الوحدة (الدائرة التي نصف قطرها وحدة واحدة) إذا رسمت زاوية قياسها هـ في وضعها القياسي، فإن ضلع الانتهاء لها سيقطع الدائرة في نقطة وحيدة (س، ص). وطول الضلع المقابل للزاوية هـ في المثلث هو الإحداثي الصادي للنقطة، كما أن طول الضلع المجاور للزاوية هـ هو الإحداثي السيني للنقطة.

ينتج مما سبق أن جاه = ص ، جتا هـ = س (علمًا بأن نق = ١ وحدة).

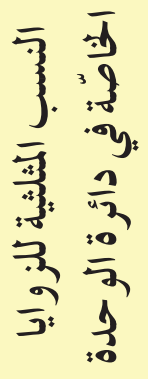


إذا اختلف طول نصف القطر عن وحدة واحدة هل تبقى هذه العلاقة صحيحة؟

مما تقدم بإمكاننا الوصول إلى التعريف الآتي:

تعريف

يسمى الاقتران الذي يربط العدد الحقيقي هـ بالإحداثي السيني لنقطة تقاطع ضلع انتهاء زاوية قياسها هـ مع دائرة الوحدة اقتران جيب التمام، ويرمز له ق(هـ) = جتا هـ، ويسمى الاقتران الذي يربط العدد الحقيقي هـ بالإحداثي الصادي لهذه النقطة اقتران الجيب، ويرمز له بالرمز ق(هـ) = جاهـ.



من الشكل (٤-٨) يتضح أن أعلى قيمة للجيب هي ١، وهي عند الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{2}$ راد، وأدنى قيمة للجيب هي -١، عند الزاوية $\frac{3\pi}{2}$ راد.

وأعلى قيمة لجيب التمام هي ١، عند الزاوية صفر، وأدنى قيمة لجيب التمام هي -١ وهي عند الزاوية π راد.

و بذلك يمكن التعبير عن اقتراني الجيب و جيب التمام بالصورة:

$$\text{ق: ح} \longleftarrow [1, -1] : \text{ق(س)} = \text{جاس} .$$

$$\text{ق: ح} \longleftarrow [1, -1] : \text{ق(س)} = \text{جتاس} .$$

فكر وناقش

هل بإمكانك إثبات أن $\text{جا}^2 \text{هـ} + \text{جتا}^2 \text{هـ} = 1$ ؟ استعن بالشكل (٤-٨).

مثال (١)

إذا كان ضلع انتهاء الزاوية هـ يقع في الربع الأول وكان جا هـ = $\frac{1}{4}$ ، فجد جتا هـ، ظا هـ، قاه، قتا هـ.

الحل

$$\text{جا}^2 \text{هـ} + \text{جتا}^2 \text{هـ} = 1$$

(متطابقة)

$$1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \text{جتا}^2 \text{هـ}$$

(بالتعويض عن قيمة جا هـ)

$$1 = \frac{1}{16} + \text{جتا}^2 \text{هـ}$$

(تبسيط)

$$\text{جتا}^2 \text{هـ} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

(طرح $\frac{1}{16}$ من الطرفين)

$$\text{جتا هـ} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \left(\begin{array}{l} \text{تُهمل الإجابة السالبة لأن ضلع الانتهاء للزاوية هـ يقع في الربع} \\ \text{الأول} \end{array} \right)$$

(تبسيط)

$$\frac{\text{جاه}}{\text{جته}} = \text{ظاه}$$

(تعريف الظل)

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{157}{4}} =$$

(التعويض عن قيم جاه، جته)

$$\frac{1}{157} =$$

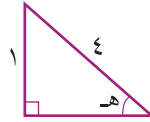
(تبسيط)

$$\frac{1}{4} = \text{قته} = \frac{1}{\text{جاه}}$$

$$\frac{4}{157} = \frac{1}{\text{جته}} = \text{قاه}$$

طريقة ثانية للحل:

يمكن حل مثال (١) باستخدام فكرة المثلث القائم الزاوية، وذلك بتكوين المثلث المجاور، ومنه



(نظرية فيثاغورس)

$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{1}{4} = \text{جاه}$$

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع}_1)^2 + (\text{الضلع}_2)^2$$

(تعويض)

$$16 = 1^2 + (\text{الضلع}_2)^2$$

(تبسيط)

$$15 = (\text{الضلع}_2)^2$$

$$\sqrt{157} = \text{الضلع}_2$$

(إهمال الإشارة السالبة (لماذا)؟)

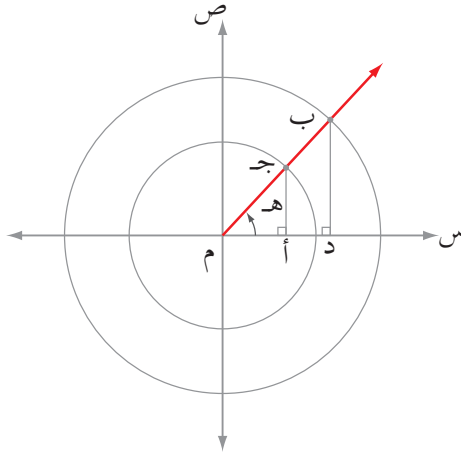
$$\sqrt{157} = \text{الضلع}_2$$

وإذا علمت أطوال أضلاع المثلث بالإمكان استخراج باقي النسب المثلثية.

تدريب (١)

إذا كان قته = ٥ ، فجد قيمة كلٍّ من: قاه ، جاه ، جته، ظاه .

يمكن حساب النسب المثلثية باستعمال أي دائرة أخرى غير دائرة الوحدة بالاعتماد على تشابه المثلثات، انظر الشكل الآتي (لماذا يتشابه المثلثان د ب م ، أ ج م؟)



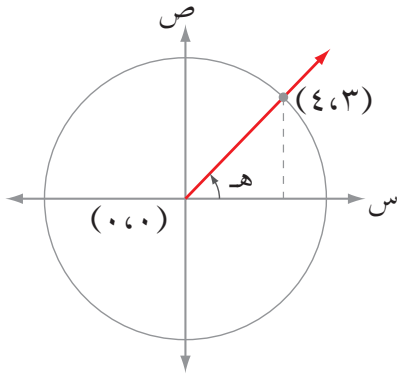
الشكل (٩-٤).

ينتج من تشابه المثلثين أن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية.
أي أن:

$$\frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب م}} = \text{جـ هـ}، \quad \frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{م د}}{\text{م ب}} = \text{جـ تـ هـ}،$$

وبالإمكان حساب باقي النسب المثلثية بالاعتماد على قيم جـ هـ و جـ تـ هـ.

مثال (٢)



الشكل (١٠-٤).

إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية قياسها هـ يمر بالنقطة (٤ ، ٣) احسب قيمة كلٍّ من: جـ هـ، جـ تـ هـ، ظـ هـ، ظـ تـ هـ، قـ هـ، قـ تـ هـ.

الحل

$$\frac{\text{ظـ هـ}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٤}{٣} \quad \text{ظـ تـ هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$$

لكن لحساب باقي النسب المثلثية يلزم معرفة نصف قطر الدائرة،

الدائرة التي مركزها (٠،٠) يُحسب طول نصف القطر باستخدام معادلة الدائرة

$$(\text{س} = ٣، \text{ص} = ٤ \text{ من إحداثيي النقطة})$$

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{ر}^2$$

(تعويض قيم س=٣ و ص=٤)

$$٢٥ = ٢(٤) + ٢(٣)$$

(ر=٥ مرفوضة لماذا؟)

$$٥ \pm = ر$$

$$٥ = ر$$

جاه = $\frac{٤}{٥}$ ، قتاھ = $\frac{٥}{٤}$ ، جتاھ = $\frac{٣}{٥}$ ، قاھ = $\frac{٥}{٣}$ (تعويض قيم س، ص، ر)
(لماذا أهملت جميع القيم السالبة؟)

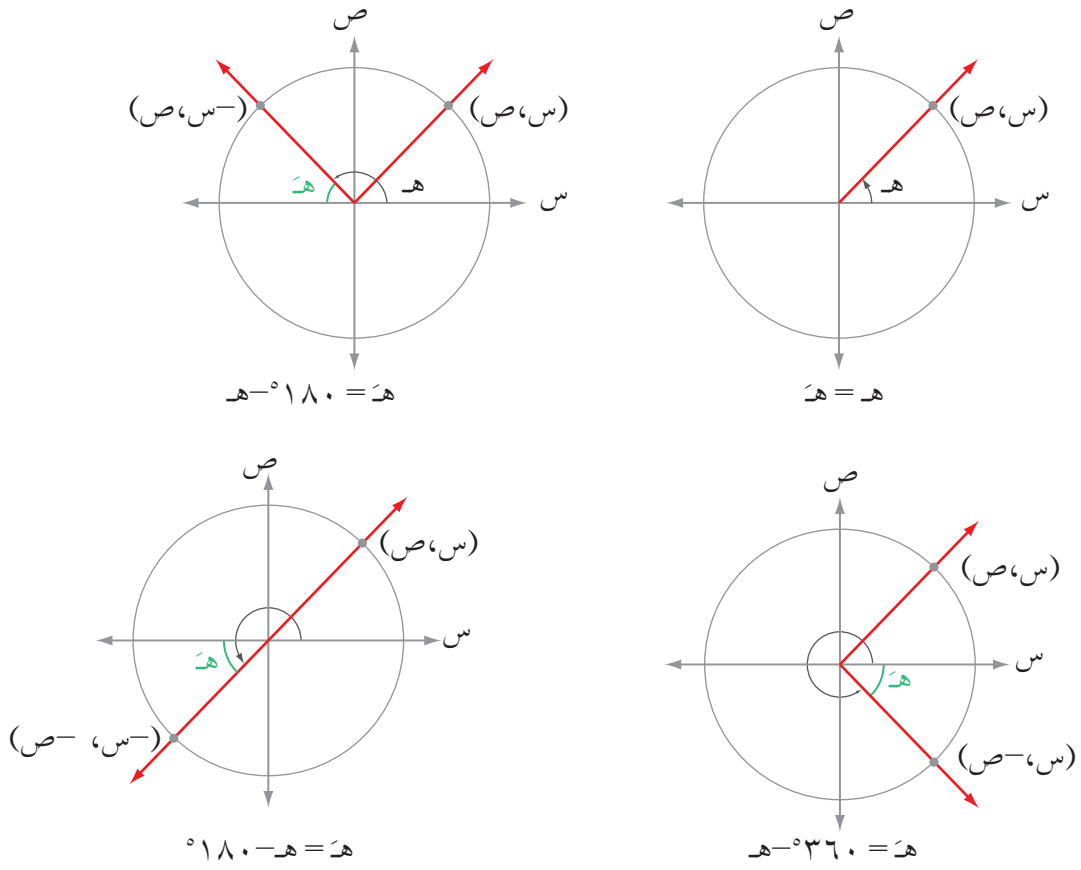
تدريب (٢)

إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية قياسها ه يمر بالنقطة (١٢، ٥) ، احسب قيمة كل من : جاھ، جتاھ، ظاھ، ظتاھ، قاھ، قتاھ.

تعلمت إيجاد النسب المثلثية إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية في وضعها القياسي في الربع الأول وبالإمكان حساب النسب المثلثية للزوايا التي يقع ضلع الانتهاء لها في الوضع القياسي في الأرباع الأخرى بالاعتماد على ما يعرف **بزاوية المرجع**، والشكل (٤-١١) يوضح زاوية المرجع للزاوية ه في الأرباع جميعها.

تعريف

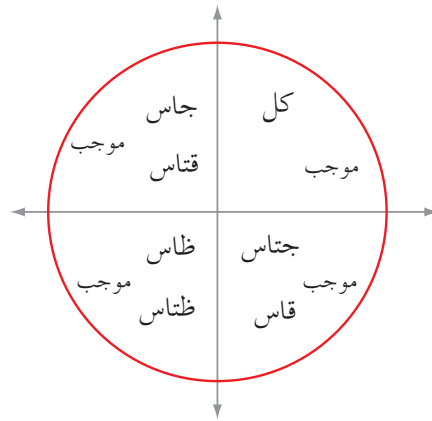
تسمى الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية ه ومحور السينات زاوية المرجع للزاوية ه ويرمز لقياسها بالرمز ه.



الشكل (١١-٤).

انظر الشكل (١٢-٤) ولاحظ العلاقة التي تحدد إشارة النسب المثلثية بالنسبة للربع الذي يوجد فيه ضلع انتهاء زاوية في وضعها القياسي، حيث يمكن استنتاج أن:

جا (س) = جاس - جتا (س) = جتاس ظا (س) = ظاس - ظتاس = ظتاس



الشكل (١٢-٤).

مثال (٣)

دون استخدام الآلة الحاسبة، جد قيمة كل مما يأتي:

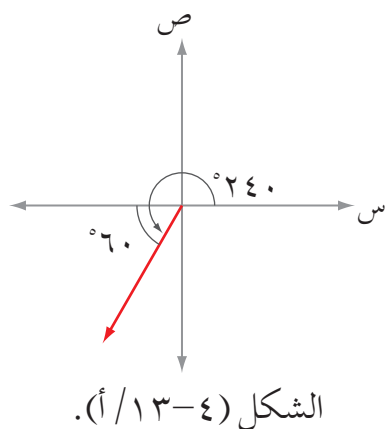
- (١) جتا 240° (٢) جا 330° (٣) ظا 135° (٤) جا 870°

الحل

(١) جتا $240^\circ = - \text{جتا } (180^\circ - 240^\circ)$

$= - \text{جتا } (60^\circ) = -0,5$

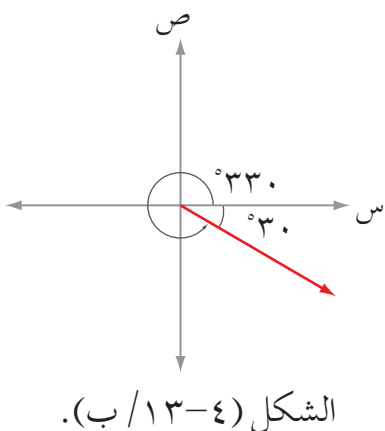
انظر الشكل (٤-١٣/أ)



(٢) جا $330^\circ = - \text{جا } (360^\circ - 330^\circ)$

$= - \text{جا } (30^\circ) = -0,5$

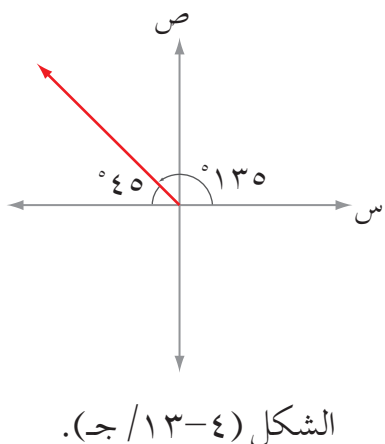
انظر الشكل (٤-١٣/ب)

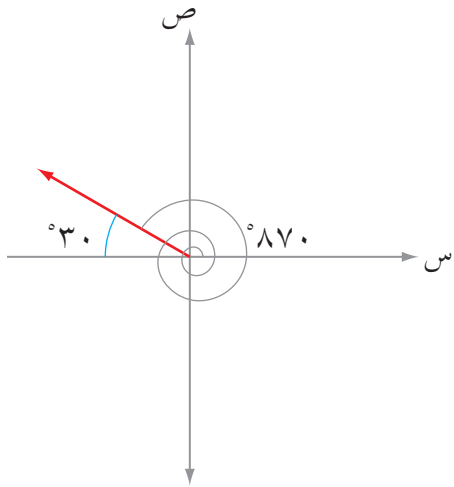


(٣) ظا $135^\circ = - \text{ظا } (180^\circ - 135^\circ)$

$= - \text{ظا } (45^\circ) = -1$

انظر الشكل (٤-١٣/ج)





الشكل (٤-١٣/د).

$$(٤) \text{ جا } ٨٧٠^\circ = \text{ جا } (٨٧٠^\circ - ٧٢٠^\circ)$$

$$= \text{ جا } ١٥٠^\circ$$

$$= \text{ جا } (١٨٠^\circ - ١٥٠^\circ)$$

$$= \text{ جا } (٣٠^\circ) = ٠,٥$$

انظر الشكل (٤-١٣/د)

تدريب (٣)

دون استخدام الآلة الحاسبة ، جد قيمة ما يأتي :

$$(١) \quad \text{قا } \frac{\pi ١١}{٣} \quad (٢) \quad \text{جتا } \frac{\pi ٣}{٦} \quad (٣) \quad \text{ظنا } ٣٠٠^\circ$$

فكر وناقش

(١) قامت طالبتان بتبسيط المقدار $\frac{(\text{جا}^2 \text{هـ})}{(\text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{جا}^2 \text{هـ})}$ كلٌّ على طريقتهما:

$$\text{كتبت الأولى: } \frac{\text{جا}^2 \text{هـ}}{\text{جتا}^2 \text{هـ}} + \frac{\text{جا}^2 \text{هـ}}{\text{جا}^2 \text{هـ}} = \text{ظا}^2 \text{هـ} + ١ = \text{قا}^2 \text{هـ}$$

$$\text{كتبت الثانية: } \frac{(\text{جا}^2 \text{هـ})}{(\text{جتا}^2 \text{هـ} + \text{جا}^2 \text{هـ})} = \frac{\text{جا}^2 \text{هـ}}{١} = \text{جا}^2 \text{هـ}$$

أي الحلين صحيح؟ برّر إجابتك .

أضف لمعلوماتك

تسمى العلاقات

$$\text{جا}^2 \text{هـ} + \text{جتا}^2 \text{هـ} = ١$$

$$\text{ظا}^2 \text{هـ} + ١ = \text{قا}^2 \text{هـ}$$

$$\text{ظنا}^2 \text{هـ} + ١ = \text{قتا}^2 \text{هـ}$$

متطابقات فيثاغورس (لماذا؟)

(٢) إذا كان ضلع الانتهاء للزاوية هـ في الوضع القياسي يقع في الربع الثاني، وكان جتاهـ = $\frac{1}{3}$ ، جـد جاهـ، ظاهر.

قام هاشم بحل المسألة بالطريقة الآتية:

فرض أن هـ هي زاوية المرجع للزاوية هـ

$$\text{إذن جتا هـ} = - \text{جتاهـ} = -\frac{1}{3}$$

رسم المثلث القائم المجاور، وباستخدام نظرية فيثاغورس

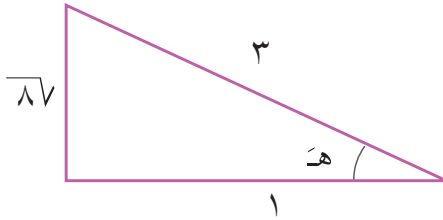
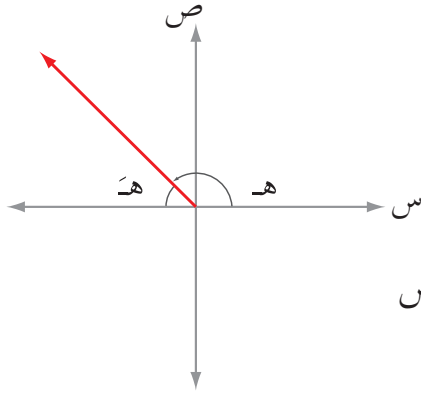
حسب طول الضلع المجاور للزاوية هـ هو $\sqrt{8}$ ،

وقال: بما أن هـ زاوية في الربع الثاني إذن:

$$\text{جاهـ} = \text{جاهـ} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\text{ظاهر} = - \text{ظاهر} = -\frac{\sqrt{8}}{1}$$

ما رأيك في طريقة هاشم في حل هذه المسألة؟



تمارين و مسائل

- (١) احسب قيمة كل مما يأتي:
- أ (جاه إذا علمت أن جتاه $= \frac{1}{3}$ ؛ $^{\circ} 270 > ه > ^{\circ} 360$)
- ب (قاه إذا علمت أن جاه $= \frac{2}{7}$ ؛ $^{\circ} 270 > ه > ^{\circ} 180$)
- ج (ظاه إذا علمت أن ظتاه $= 2$ ؛ $^{\circ} 270 > ه > ^{\circ} 180$)
- د (جاه، جتاه إذا علمت أن ظاه $= \frac{4}{3}$ ؛ $^{\circ} 90 > ه > 0$)

- (٢) أثبت ما يأتي:
- أ (ظاه + ١ = قاه)
- ب (ظتاه + ١ = قتااه)

- (٣) دون استخدام الآلة الحاسبة، جد قيمة كل مما يأتي:
- أ (جا $^{\circ} 300$ ب (جتا $^{\circ} 225$)
- ج (ظا $\frac{\pi 15}{4}$ د (قا $\frac{\pi 8}{3}$)

- (٤) عبر عن المقادير الآتية باستخدام نسب مثلثية أخرى:
- أ (جا $(\frac{\pi}{2} - ه)$)
- ب (جتا $(\frac{\pi}{2} - ه)$)
- ج (ظا $(\frac{\pi}{2} - ه)$)
- د (قتا $(^{\circ} 180 + ه)$)

هـ) ظتا (٣٦٠° - هـ)

و) جتا (π - هـ)

٥) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٦) بسّط كلّاً من المقادير الآتية :

أ) $\frac{\text{قتا هـ جا هـ}}{\text{ظتا هـ}}$

ب) $\frac{\text{قا هـ}}{\text{جا هـ}} \times (١ - \text{جتا}^٢ \text{هـ})$

ج) $\frac{\text{جتا} \frac{\pi}{٢} - ١}{\text{جا}(-\text{هـ}) + ١}$

٧) يعبر عن مبيعات أحد المصانع المنتجة للعصير بالعلاقة $ص = ١٣ + ٥,٥ \text{ جتا} \frac{\pi}{٦} ن$ ، حيث: $ص$ عدد العلب بالمئات، $ن$ الزمن بالأسابيع، احسب عدد العلب بعد مرور ٦ أسابيع.

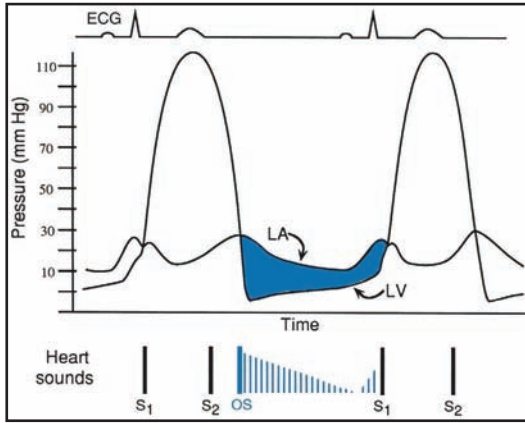
٨) قام أحد المصانع بإنتاج سلعة ما وعند عرضها في السوق وجد أن المبيعات من هذه السلعة تتبع المعادلة الآتية: $س = ٧٢,٤ + ٦١,٧ \text{ جا} \frac{\pi}{٦} ن$ ، حيث: $ن$ ترتيب الشهر (كانون ثاني = ١، شباط = ٢ وهكذا)، و $س$ تمثل عدد القطع بالآلاف. احسب المبيعات في الأشهر (نيسان، حزيران، تشرين أول، كانون أول) وأي الأشهر تكون فيها المبيعات نفسها (برر إجابتك).

اقتترانات (الجيب، جيب التمام، الظل) Sine, Cosine and Tangent Functions

الفصل الثالث

النتائج

- ترسم منحني اقتران كل من الجيب، جيب التمام، والظل يدويًا وباستخدام الحاسوب.
- تجد المجال والمدى والدورة والسعة لاقتران مثلثي (إن أمكن).
- تصف سلوك منحني الاقترانات المثلثية تحت تأثير التحويلات (الانسحاب الرأسى والأفقي).



الشكل المجاور يبين التخطيط الناتج عن جهاز لقياس نبضات القلب، والرسم الموجود يشبه إلى حد كبير رسومات الاقترانات المثلثية. وبذلك يتضح ارتباطها بالحياة العملية.

تعتبر الاقترانات المثلثية مثالاً على نوع من الاقترانات التي تُعرف **بالاقترانات الدورية** (اقترانات تكرر نفسها كل دورة معينة).

مثال (١)

ارسم منحني الاقتران ق(س) = جاس حيث $s \in [0, \pi/2]$

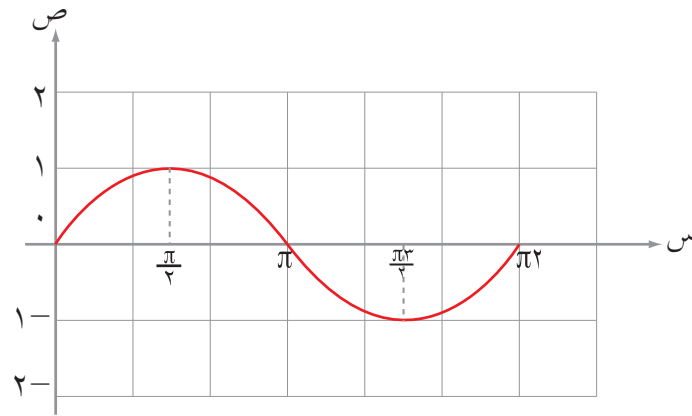
الحل

لرسم منحني الاقتران ق(س) = جاس على الفترة $[0, \pi/2]$ ، نكون جدولاً يحوي قيمًا للمتغير س ثم نجد قيم ق(س) المقابلة بتعويض قيم س في الاقتران ق(س):

الجدول (٤-١).

س	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
جاس	0	0.7	1	0.7	0	-0.7	-1	-0.7	0

بعد ذلك نعين النقط (س ، جاس) الناتجة في المستوى البياني ونصلها بخطّ منحنٍ أملس فنحصل على الشكل الآتي:



الشكل (٤-١٤).

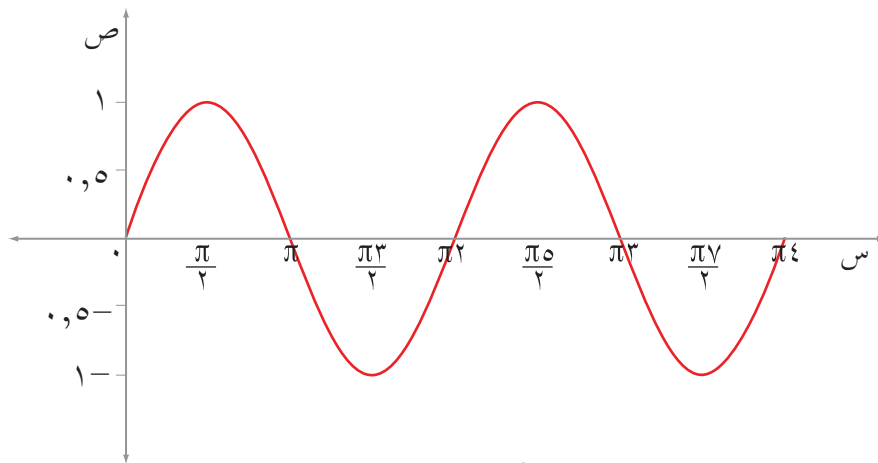
تدريب (١)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = جتاس على الفترة $[\pi^2, \pi^2]$.

مثال (٢)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = جاس على الفترة $[0, \pi^4]$.

الحل



الشكل (٤-١٥).

نطبق الخطوات السابقة

فينتج الشكل الآتي:

لاحظ أن الاقتران يكرر

نفسه كل 360° لذلك

سُمي اقتراناً دورياً.

لاحظ أن الزوايا (س + $2\pi \times n$)، حيث ن عدد صحيح، لها ضلع الانتهاء نفسه وبذلك يكون لها نفس النسب المثلثية للزاوية س .

تعريف

إذا كان $ق(س + أ) = ق(س)$ لكل $س$ في مجال $ق$ حيث $أ$ عدد ثابت، فإن $ق$ يُسمى اقتراناً دورياً، وتُسمى أصغر قيمة حقيقية موجبة للعدد $أ$ التي تحقق المعادلة السابقة دورة الاقتران $ق$.

لاحظ أن الاقتران جاس يمكن كتابته على الصورة $ق(س) = ج(س + \pi^2)$ فهو يكرر نفسه كل π^2 و دورته π^2 .

تعريف

إذا كان $ق(س)$ اقتراناً دورياً محدوداً فإن الفرق بين أعلى قيمة للاقتران وأصغر قيمة للاقتران مقسومة على ٢، يسمى سعة الاقتران، أي أن:

$$\text{السعة} = \frac{\text{أكبر قيمة للاقتران} - \text{أدنى قيمة للاقتران}}{2}$$

ويفضل قبل رسم أي منحنى لاقتران دوري إيجاد الدورة و السعة لتساعد في رسم الاقتران.

مثال (٣)

جد سعة الاقتران $ق(س) = ٢ \cdot جاس$.

الحل

بما أن أكبر قيمة للاقتران (جاس) هي ١ فإن أكبر قيمة للاقتران $ق(س) = ٢ \cdot جاس$ هي:

$$٢ = ١ \times ٢$$

وأصغر قيمة للاقتران (جاس) هي -١ فإن أصغر قيمة للاقتران $ق(س) = ٢ \cdot جاس$ هي:

$$٢ - = ١ - \times ٢$$

$$\text{وبذلك تصبح السعة} = \frac{(٢ -) - ٢}{2} = \frac{٤}{2} = ٢$$

مثال (٤)

احسب دورة الاقتران ص = ٣ جتا $\frac{\pi}{4}$.

الحل

بما أن جتا $\frac{\pi}{4}$ = جتا $(\frac{\pi}{4} + 2\pi n)$. فإن:

$$\text{ص} = ٣ = \frac{\pi + 2\pi n}{4} \text{ جتا } \frac{\pi}{4} \quad (\text{توحيد مقامات الزاوية})$$

إذن تتكرر كل قيمة من قيم ص = ٣ جتا $\frac{\pi}{4}$ كل π . إذن، دورة الاقتران π .

يمكن حساب دورة الاقتران السابق بطريقة مختلفة كما يأتي:

$$٠ < \frac{\pi}{4} < \pi \quad (\text{ضرب المتباينة بالعدد ٢})$$

$$٠ < \pi < ٢\pi, \text{ فتكون دورة الاقتران } \pi - \pi = ٠.$$

بشكل عام يمكن تحديد دورة الاقتران والسعة كما يأتي:

$$\text{إذا كان ق(س) = أ} \times \text{جا(ب س + ج)}, \text{ أو ق(س) = أ} \times \text{جتا(ب س + ج)} \text{ حيث أ} \neq \text{صفرًا}, \\ \text{ب} \neq \text{صفرًا فإن الدورة} = \frac{\pi}{|ب|}, \text{ السعة} = |أ|.$$

مثال (٥)

جد الدورة والسعة للاقتران ق(س) = ٢ جتا $(\frac{\pi}{4} + \text{س})$.

الحل

$$\text{السعة} = |٢| = ٢, \text{ الدورة} = \frac{\pi}{|١|} = \frac{\pi}{١}.$$

تدريب (٢)

جد دورة وسعة الاقتران ق(س) = ٥ جا $(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \text{س})$.

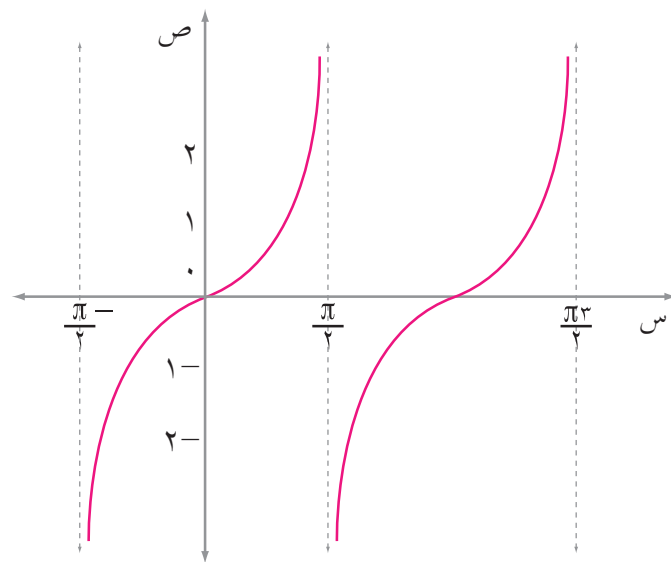
ارسم منحنى الاقتران ق(س) = ظاس، على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

الحل

لرسم منحنى اقتران الظل نكون الجدول الآتي، حيث نأخذ قيمًا للمتغير س ثم نجد قيم ق(س) المقابلة لها بتعويض قيم س في الاقتران ق(س).

س	$\frac{\pi-}{2}$	$\frac{\pi-}{3}$	$\frac{\pi-}{4}$	٠	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
ق(س)	غير معرف	١,٧-	١-	٠	١	١,٧	١	٠	١	١-	١	١,٧	غير معرف

نرسم ما يعرف بالمحاذاة العمودي للرسم عند كل من $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{4}$ ومضاعفاتها، ثم نعين النقاط في المستوى البياني ثم نصل بخط منحنٍ أملس فينتج الشكل الآتي:



الشكل (٤-١٦).

لمعرفة سلوك منحنى اقتران الظل عندما تقترب الزاوية من $\frac{\pi}{2}$ انظر الجدول الآتي:

س	°٨٩	°٨٩,٣	°٨٩,٦	°٨٩,٨	°٨٩,٩	°٨٩,٩٩	$\frac{\pi}{2}$
ظاس	٥٧,٢٩	٨١,٨٥	١٤٣,٢٤	٢٨٦,٤٨	٥٧٢,٩٦	٥٧٠٢٩,٥٨	غير معرف

نشاط

باستخدام برمجية إكسل ارسم منحنى الاقتران ق(س) = جاس ، $0^\circ \leq س \leq 360^\circ$.

- (١) نضع المؤشر في الخلية A1 ونقوم بإدخال البيانات التي تمثل الزوايا الأساسية وما يقابلها في الأرباع الأربعة في العمود الأول (A).
فتظهر القيم في العمود (A) كما هو موضح في الشكل (٤-١٧).

A	
0	1
30	2
45	3
60	4
90	5
120	6
135	7
150	8
180	9
210	10
225	11
240	12
270	13
300	14
315	15
330	16
360	17

الشكل (٤-١٧).

- (٢) ضع المؤشر في الخلية B1. واكتب قاعدة التحويل من القياس الستيني إلى التقدير

$$= (A1 * 22/7) / 180$$

كما في الشكل (٤-١٨). ثم اضغط Enter

$$f_x = (A1 * 22/7) / 180$$

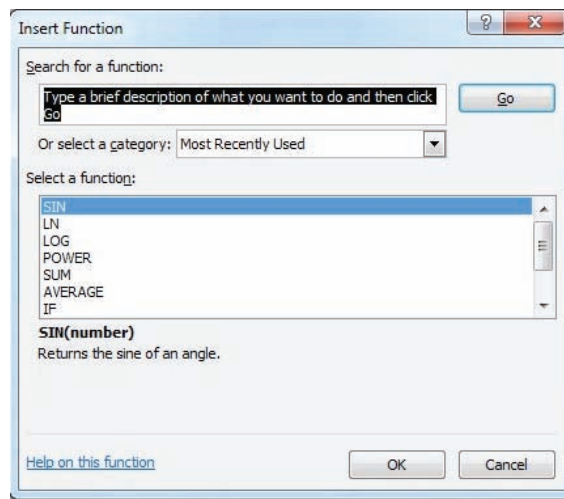
الشكل (٤-١٨).

٣) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبته ليظهر لك مجموعة القيم في العمود B. كما في الشكل (٤-١٩).

B	A	
0	0	1
0.524	30	2
0.786	45	3
1.048	60	4
1.571	90	5
2.095	120	6
2.357	135	7
2.619	150	8
3.143	180	9
3.667	210	1
3.929	225	1
4.19	240	1
4.714	270	1
5.238	300	1
5.5	315	1
5.762	330	1
6.286	360	1

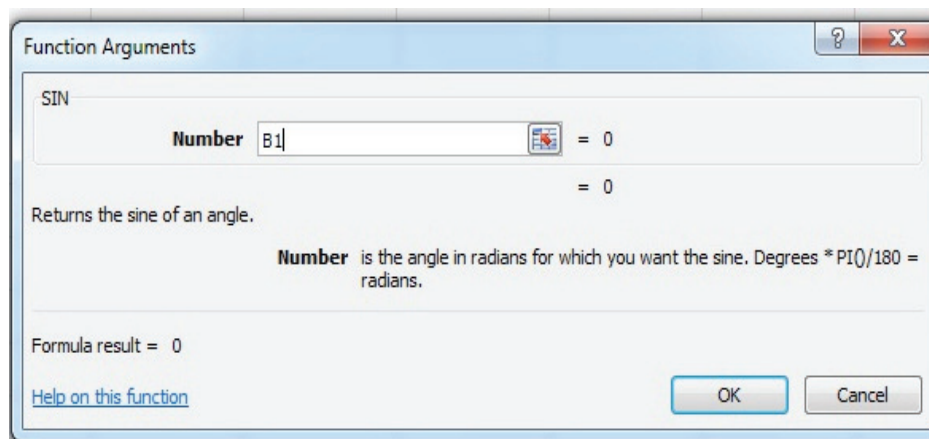
الشكل (٤-١٩).

٤) ضع المؤشر في الخلية C1 ، ومن تبوية الصيغ (Formulas)، اختر (إدراج) دالة، فيظهر لك صندوق حوار إدراج كما في الشكل (٤-٢٠).



الشكل (٤-٢٠).

٥) اختر الدالة (SIN) وانقر على موافق، يظهر لك صندوق حوار الدالة كما في الشكل (٤-٢٠)، اكتب B1 في مستطيل (Number)، كما في الشكل (٤-٢١).



الشكل (٤-٢١).

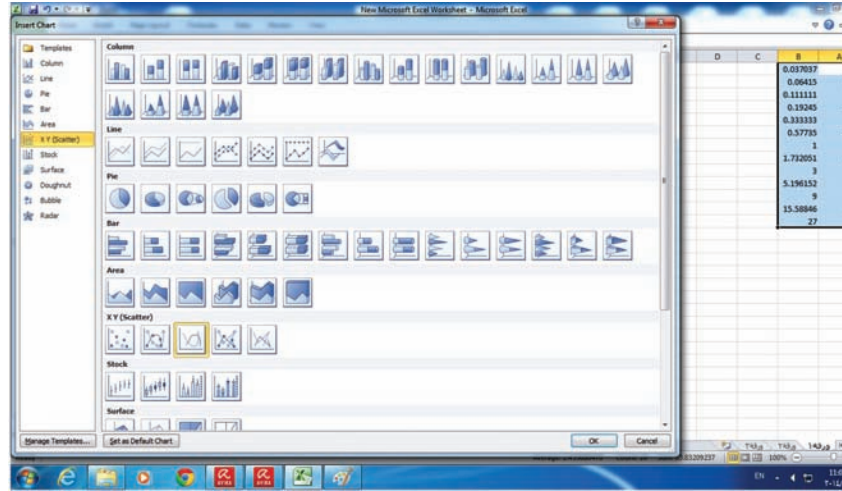
٦) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبته ليظهر لك مجموعة القيم في العمود C. كما في الشكل (٤-٢٢)

C	B	A	
0	0	0	1
0.500183	0.524	30	2
0.70733	0.786	45	3
0.866236	1.048	60	4
1	1.571	90	5
0.865604	2.095	120	6
0.706436	2.357	135	7
0.499087	2.619	150	8
-0.00126	3.143	180	9
-0.50128	3.667	210	10
-0.70822	3.929	225	11
-0.86687	4.19	240	12
-1	4.714	270	13
-0.86497	5.238	300	14
-0.70554	5.5	315	15
-0.49799	5.762	330	16
0.002529	6.286	360	17

الشكل (٤-٢٢).

٧) ظلل العمودين C، A ثم اختر من تبويبة إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط، (LINE) ثم اختر من الأشكال الشكل س، ص مبعثر (xy-Scatter) ثم اختر نوع

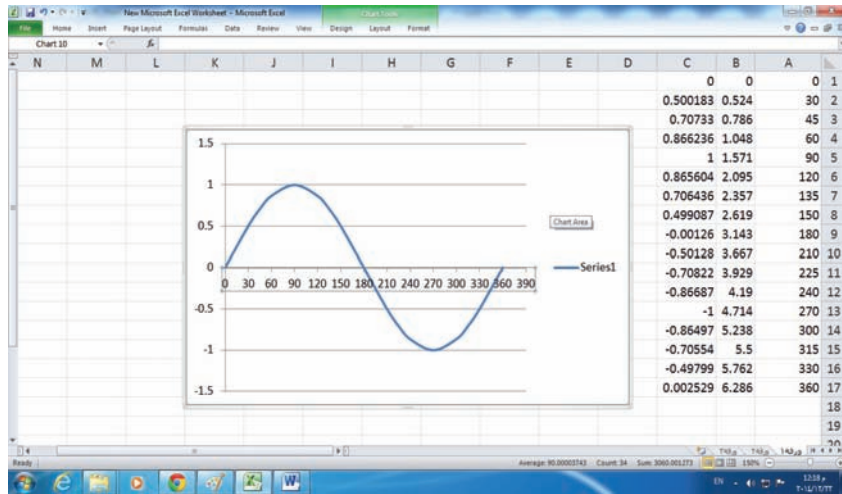
المنحنى كما في الشكل (٤-٢٣).



الشكل (٤-٢٣).

٨) اختر موافق ليظهر لك رسم منحنى الاقتران:

ق(س) = جاس حيث $0^\circ \leq \text{س} \leq 360^\circ$ كما في الشكل (٤-٢٤).



الشكل (٤-٢٤).

تدريب (٣)

استخدم برمجة إكسل لرسم منحنى كل من الاقترانات الآتية:

(١) ق(س) = جتا س على الفترة $[0, \pi/2]$

(٢) هـ(س) = ٢ جتا س، س $\in [0, \pi/2]$

(٣) هـ(س) = $\frac{1}{\pi}$ جتا س، س $\in [0, \pi/2]$



ماذا تلاحظ من خلال حلك لتدريب (٣)؟ ناقش مع زملائك ما توصلت إليه.

مثال (٧)

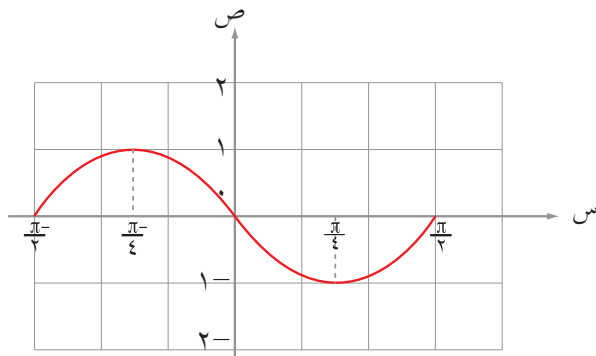
ارسم منحنى ق(س) = جا(٢س + π) وجد الدورة والسعة له، س $\in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^-}{2}]$

الحل

$$\text{السعة} = |أ| = ١ ، \text{الدورة} = \frac{\pi ٢}{|ب|} = \frac{\pi ٢}{٢} . \pi$$

(١) كَوْن جدولاً بقيم س ، ق(س)

س	$\frac{\pi^-}{2}$	$\frac{\pi^-}{4}$	صفر	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
ق(س)	٠	١	٠	-١	٠



الشكل (٤-٢٥).

(٢) عين النقاط التي حصلت عليها في المستوى البياني، ثم صل بينها بخط منحنٍ أملس كما في الشكل الآتي:



كيف تتوقع أن يكون شكل منحنى ل(س) = ٢ جا(٢س + π)، س $\in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^-}{2}]$

تدريب (٤)

ارسم منحنى كل من الاقتارات الآتية وجد الدورة والسعة لكل منها:

(١) ق(س) = ٣ جتا ٢س ، س $\in [\pi, ٠]$

(٢) ل(س) = جتا $\frac{\pi}{4}$ س ، س $\in [\pi ٤, ٠]$

(٣) هـ(س) = ٢ جتا(س + $\frac{\pi}{2}$) ، س $\in [\frac{\pi ٣}{2}, \frac{\pi^-}{2}]$

تمارين و مسائل

(١) جد الدورة و السعة لكل من الاقترانات الآتية:

أ (ل(س) = ٥ - ٣ جا (س - $\frac{\pi}{2}$)

ب (هـ(س) = ١ + ٤ جا (٣س + π)

ج (ك(س) = ٢ جتا ٣س

(٢) ارسم منحني الاقترانات الآتية ثم قارن منحني كل منها بمنحني الاقتران جاس أو جتاس:

أ (ق(س) = ٢ + ٣ جا ٣س ، س $\in [\frac{\pi}{3}, ٠]$

ب (ل(س) = جتا (س + π) ، س $\in [\pi, \pi -]$

ج (و(س) = ٢ جاس ، س $\in [\pi/2, ٠]$

د (هـ(س) = ٤ جا ٢س ، س $\in [\pi/2, ٠]$

هـ (ك(س) = جا (٢س + $\pi/2$) ، س $\in [٠, \pi -]$

و (ع(س) = $\frac{٥}{4}$ جا ($\frac{\pi}{4} - \frac{س}{4}$) ، س $\in [\pi/٥, \pi]$

(٣) ارسم منحني كل من الاقترانين ق (س) = - جتاس ، ل(س) = - جتا (س - $\frac{\pi}{4}$)

على المستوى البياني نفسه واكتب استنتاجاتك مع التبرير.

(٤) الجدول الآتي يوضح معدل ما دفعته أسرة أردنية ثمنًا لفواتير الكهرباء في إحدى السنوات

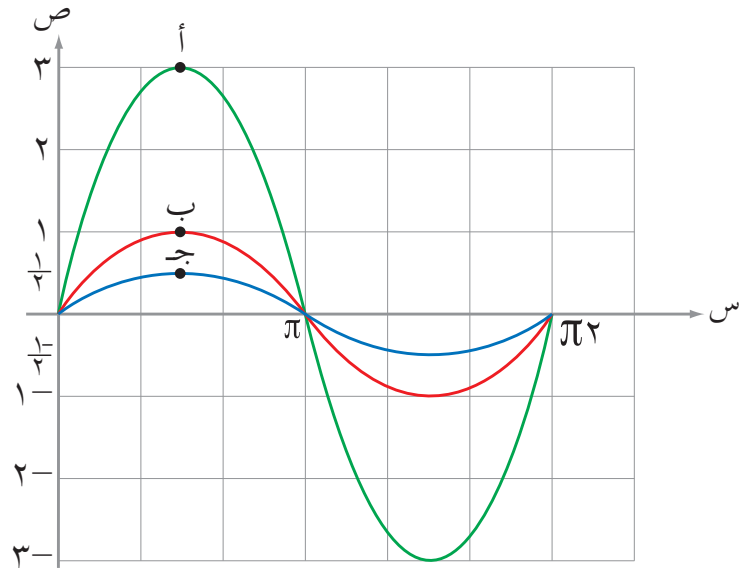
مقربًا لأقرب دينار أردني:

الشهر	كانون ثاني	شباط	آذار	نيسان	آيار	حزيران	تموز	آب	أيلول	تشرين أول	تشرين ثاني	كانون أول
فاتورة الكهرباء	٣٠	٣٢	٢٩	٢٤	٢٠	١٥	١٤	١٥	١٧	٢١	٢٥	٢٨

مثل نقاط الجدول (الشهر، فاتورة الكهرباء) في المستوى البياني وصل بينها بخطّ منحني

أملس، ثم اقترح اقترانًا يعتمد على اقتران الجيب بحيث يكون رسمه البياني يشبه الرسم الناتج.

٥) معتمداً على الشكل (٤-٢٦) اكتب رمز المنحنى الذي يُمثّل كل اقتران في الفترة $[0, \pi]$ في ما يأتي:



الشكل (٤-٢٦).

- أ) ق (س) $= \frac{1}{4}$ جاس ، رمز المنحنى هو
- ب) ب (س) $= 3$ جاس ، رمز المنحنى هو
- ج) هـ (س) $=$ جاس ، رمز المنحنى هو

النتائج

- تحليل متطابقات مثلثية تشمل مجموع زاويتين والفرق بينهما، وتبرهنها.
- تحليل وتبرهن متطابقات مثلثية جبرياً (تشمل ضعف الزاوية ونصفها).
- تحليل معادلة مثلثية من الدرجة الأولى والثانية.

Trigonometric Identities (1)

أولاً: المتطابقات المثلثية (١)



يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدارات الكهربائية،
ويعطى التيار ت بالعلاقة $V = 7 \sin(75^\circ - t)$ ،
حيث: t الزمن بالثواني، وقياس الزاوية بالدرجات.
هل تستطيع كتابة العلاقة السابقة بطريقة أخرى؟

تستخدم في مثل هذه الحالة متطابقات مجموع زاويتين (الفرق بينهما) لإيجاد قيم النسب المثلثية عند بعض الزوايا التي يمكن كتابتها على شكل حاصل جمع زاويتين أو الفرق بينهما، إذا علمت النسب المثلثية لكل منهما.

إذا كان A ، B قياسين لزاويتين فإن:

$$(1) \quad \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$(2) \quad \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$(3) \quad \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

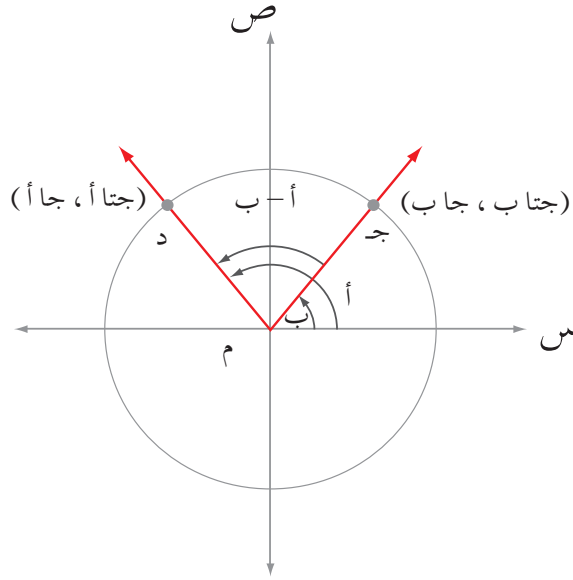
$$(4) \quad \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$(5) \quad \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$(6) \quad \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

برهان الفرع (١)

افترض أنّ زاويتين قياسهما أ و ب في دائرة الوحدة
كما في الشكل (٤-٢٤) فإنّ:



الشكل (٤-٢٤).

$$\begin{aligned}
 & \text{(قانون المسافة بين نقطتين)} \quad (ج د)^2 = (جتأ - جأ)^2 + (جتأ - جأ)^2 \\
 & = جتأ^2 - 2 جتأ جأ + جأ^2 + جتأ^2 - 2 جتأ جأ + جأ^2 = 2 جتأ^2 - 2 جتأ جأ + 2 جأ^2 \quad (\text{فك الأقواس}) \\
 & = (جتأ^2 + جأ^2) - 2 جتأ جأ + (جتأ^2 + جأ^2) = 2 - 2 جتأ جأ + 2 جأ^2 \quad (\text{تجميع حدود}) \\
 & = 2 - 2 جتأ جأ + 2 جأ^2 \quad (١) \dots\dots\dots (جتأ^2 + جأ^2 = ١) \\
 & (ج د)^2 = (م ج)^2 + (م د)^2 - 2 (م ج) (م د) \times جتا (أ - ب) \quad (\text{استخدام قانون جيب التمام}) \\
 & = ١ + ١ - 2 (١ \times ١ \times جتا (أ - ب)) \quad (\text{م ج = م د = ١ أنصاف أقطار}) \\
 & = 2 - 2 جتا (أ - ب) \dots\dots\dots (٢)
 \end{aligned}$$

من المعادلتين (١) و (٢) ينتج :

$$\begin{aligned}
 & 2 - 2 جتا (أ - ب) = 2 - 2 جتا جأ + 2 جأ^2 \quad (\text{طرح ٢ من الطرفين}) \\
 & 2 - جتا (أ - ب) = 2 - جتا جأ + جأ^2 \quad (\text{القسمة على ٢})
 \end{aligned}$$

ومن ذلك ينتج أن : جتا (أ - ب) = جتا جأ + جأ^2

مثال (١)

أثبت أن جتا (أ+ب) = جتا أ جتا ب - جاب أ جاب ب

الحل

لإثبات المتطابقات نبدأ من الطرف الأيمن لنصل إلى الطرف الأيسر (أو بالعكس).

الطرف الأيمن: جتا (أ+ب) = جتا (أ-(-ب)) (كتابة أ+ب على صورة أ-(-ب))

$$= \text{جتا أ جتا (-ب)} + \text{جا أ جاب (-ب)} \quad (\text{متطابقة (١)})$$

$$= \text{جتا أ جتا ب} + \text{جا أ جاب (-ب)} \quad (\text{جتا (-س)} = \text{جتا س، جا (-س)} = -\text{جا س})$$

$$= \text{جتا أ جتا ب} - \text{جا أ جاب ب}$$

وبذلك نكون حصلنا على الطرف الأيسر.

مثال (٢)

أثبت أن جا (أ+ب) = جا أ جتا ب + جاب أ جتا ب

الحل

الطرف الأيمن = جا (أ+ب)

$$\text{جتا } \left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - (أ+ب) \right) \right) = \text{جتا } \left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - أ - ب \right) \right) \quad (\text{جيب الزاوية = جيب تمام متممها})$$

$$= \text{جتا } \left(\frac{\pi}{4} - أ \right) \text{ جتا ب} + \text{جا } \left(\frac{\pi}{4} - أ \right) \text{ جاب ب} \quad (\text{المتطابقة (١)})$$

$$= \text{جا أ جتا ب} + \text{جاب أ جتا ب} \quad (\text{جيب الزاوية = جيب تمام متممها})$$

$$= \text{الطرف الأيسر}$$

تدريب (١)

أثبت أن (١) جا (س+π) = -جا س

(٢) جا (س - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - جتا س

(٣) جتا (س-π) = -جتا س

دون استخدام الآلة الحاسبة احسب قيمة كل مما يأتي، إذا علمت أن:

$$\text{جا } ٣٠ = \text{جتا } ٦٠ = ٠,٥ \quad , \quad \text{جتا } ٣٠ = \text{جا } ٦٠ = ٠,٨٧ \quad , \quad \text{جا } ٤٥ = \text{جتا } ٤٥ = ٠,٧$$

$$(١) \quad \text{جتا } ١٠٥ \quad (٢) \quad \text{جا } ٧٥$$

$$(٣) \quad \text{ظا } ١٥ \quad (٤) \quad \text{جتا } ٢٤ \text{ جتا } ٣٦ - \text{جا } ٢٤ \text{ جا } ٣٦$$

الحل

$$(١) \quad \text{جتا } (١٠٥) = \text{جتا } (٦٠ + ٤٥) = \text{جتا } ٦٠ \text{ جتا } ٤٥ - \text{جا } ٦٠ \text{ جا } ٤٥ \quad (\text{المتطابقة (٢)})$$

$$= ٠,٧ \times ٠,٥ - ٠,٨٧ \times ٠,٧ = ٠,٣٥ - ٠,٦٠٩ = -٠,٢٥٩$$

(تعويض القيم)

$$(٢) \quad \text{جا } (٧٥) = \text{جا } (٣٠ + ٤٥) \quad (٣٠ + ٤٥ = ٧٥)$$

$$= \text{جا } ٤٥ \text{ جتا } ٣٠ + \text{جا } ٣٠ \text{ جتا } ٤٥ \quad (\text{المتطابقة (٣)})$$

$$= ٠,٨٧ \times ٠,٧ + ٠,٥ \times ٠,٧ = ٠,٦٠٩ + ٠,٣٥ = ٠,٩٥٩$$

(تعويض القيم)

$$(٣) \quad \text{ظا } ١٥ = \text{ظا } (٤٥ - ٦٠) \quad (٤٥ - ٦٠ = ١٥)$$

$$= \frac{\text{ظا } ٤٥ - \text{ظا } ٦٠}{١ + \text{ظا } ٤٥ \times \text{ظا } ٦٠} \quad (\text{المتطابقة (٥)})$$

(تعويض القيم)

$$= \frac{٠,٧٤ - ١,٧٤}{١ + ١ \times ٠,٧٤} = \frac{-١}{١,٧٤} = -٠,٥٧٤$$

(تبسيط)

$$= -٠,٢٧$$

$$(٤) \quad \text{جتا } ٢٤ \text{ جتا } ٣٦ - \text{جا } ٢٤ \text{ جا } ٣٦ = \text{جتا } (٣٦ + ٢٤) \quad (\text{المتطابقة (٢)})$$

(تبسيط)

$$= \text{جتا } ٦٠$$

(تعويض)

$$= ٠,٨٧$$

تدريب (٢)

احسب قيمة كل مما يأتي دون استخدام الآلة الحاسبة:

$$(١) \text{ جتا } ٧٠^\circ \text{ جتا } ٢٥^\circ + \text{جا } ٧٠^\circ \text{ جا } ٢٥^\circ$$

$$(٢) \text{ جتا } ٧٥^\circ$$

$$(٣) \text{ ظا } ١٠٥^\circ$$

مثال (٤)

إذا كان $\text{جا } أ = ٠,٤$ ، $\text{جتا } ب = -٠,٣$ ، حيث: $٠^\circ > أ > ٩٠^\circ$ ، $٩٠^\circ > ب > ١٨٠^\circ$

احسب قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \text{ جا } (أ + ب)$$

$$(٢) \text{ جتا } (أ - ب)$$

الحل

نجد جتا $أ$ باستخدام المتطابقة $\text{جتا}^2 أ + \text{جا}^2 أ = ١$

$$(٠,٤)^2 + \text{جتا}^2 أ = ١$$

(تعويض $\text{جا } أ = ٠,٤$)

$$\text{جتا}^2 أ = ١ - ٠,١٦$$

(طرح $٠,١٦$ من الطرفين)

$$= ٠,٨٤$$

(نأخذ الجذر للطرفين)

$$\text{جتا } أ = ٠,٩١$$

(لأن $أ$ في الربع الأول)

نجد $\text{جا } ب$ باستخدام المتطابقة $\text{جتا}^2 ب + \text{جا}^2 ب = ١$

$$\text{جا}^2 ب + (-٠,٣)^2 = ١$$

(تعويض $\text{جتا } ب = -٠,٣$)

$$\text{جا}^2 ب = ١ - ٠,٠٩$$

(طرح $٠,٠٩$ من الطرفين)

$$\text{جا}^2 ب = ٠,٩١$$

(نأخذ الجذر للطرفين)

$$\text{جا } ب = ٠,٩٥$$

(ب في الربع الثاني)

يمكن الآن حساب المطلوب بتعويض القيم المعطاة والمحسوبة:

$$(١) \text{ جا } (أ + ب) = \text{جا } أ \text{ جتا } ب + \text{جا } ب \text{ جتا } أ$$

(المتطابقة (٣))

(تعويض القيم)

$$0,91 \times 0,95 + 0,3 - 0,4 =$$

(تبسيط)

$$(0,86 + 0,12) =$$

$$0,74 =$$

(المتطابقة (١))

(٢) جتا (أ-ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

(تعويض القيم)

$$0,95 \times 0,4 + 0,3 - 0,91 =$$

(تبسيط)

$$0,38 + 0,27 -$$

$$0,11 =$$

تدريب (٣)

إذا كان جاس $= -\frac{3}{5}$ ، $180^\circ < س < 270^\circ$ ،

جتا ص $= -\frac{12}{13}$ ، $180^\circ < ص < 270^\circ$ ،

فاحسب قيمة كل مما يأتي:

(١) جا (س-ص)

(٢) جتا (س+ص)

(٣) ظا (س-ص)

نحتاج أحياناً أن نكتب الجيب وجيب التمام لزاويتين كحاصل ضرب وهذه المتطابقات تجعل العمليات الحسابية سهلة، والنظرية الآتية تستخدم حاصل ضرب الجيب وجيب التمام لحاصل جمع جيبين أو جيبين تمام:

$$(١) \text{ جاس } + \text{ جا ص } = ٢ \text{ جا } \frac{س+ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س-ص}{٢}$$

$$(٢) \text{ جاس } - \text{ جا ص } = ٢ \text{ جتا } \frac{س+ص}{٢} \text{ جا } \frac{س-ص}{٢}$$

$$(٣) \text{ جتاس } + \text{ جتا ص } = ٢ \text{ جتا } \frac{س+ص}{٢} \text{ جتا } \frac{س-ص}{٢}$$

$$(٤) \text{ جتاس } - \text{ جتا ص } = ٢ - \text{ جا } \frac{س+ص}{٢} \text{ جا } \frac{س-ص}{٢}$$

لبرهنة المتطابقة الأولى جاس + جا ص = ٢ جا $\frac{ص + ص}{٢}$ جتا $\frac{ص - ص}{٢}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{نفرض أن : } س + أ = ب \\ \text{ص} = أ - ب \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \frac{ص + ص}{٢} = أ \\ \frac{ص - ص}{٢} = ب \end{array} \quad (\text{لماذا؟})$$

جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جاب جتا أ (١) (المتطابقة (٣))

جا (أ - ب) = جا أ جتا ب - جاب جتا أ (٢) (المتطابقة (٤))

٢ جا أ جتا ب = (جمع المعادلة (١) + (٢) وتبسيط)

(تعويض قيم أ ، ب المحسوبة)

$$\text{جاس} + \text{جا ص} = ٢ \text{ جا } \frac{ص + ص}{٢} \text{ جتا } \frac{ص - ص}{٢}$$

وهو المطلوب

تدريب (٤)

أثبت باقي أجزاء المتطابقات في صفحة ١٩٢ .

تدريب (٥)

أثبت أن:

$$(١) \quad \frac{\text{جا}(س + ص)}{\text{جتاس جتا ص}} = \text{ظا س} + \text{ظا ص}$$

$$(٢) \quad \frac{\text{ظا س} - \text{ظا ص}}{١ - \text{ظاس ظا ص}} = \frac{\text{جا}(س - ص)}{\text{جتا}(س + ص)}$$

مثال (٥)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ظا } ٧٨^\circ - \text{ظا } ٤٨^\circ}{1 + \text{ظا } ٧٨^\circ \text{ ظا } ٤٨^\circ} \text{ : بيّن أن:}$$

الحل

$$\text{نبدأ من الطرف الأيمن } \frac{\text{ظا } ٧٨^\circ - \text{ظا } ٤٨^\circ}{1 + \text{ظا } ٧٨^\circ \text{ ظا } ٤٨^\circ} = \text{ظا } (٧٨^\circ - ٤٨^\circ) \quad (\text{المتطابقة (٥)})$$

$$= \text{ظا } (٣٠^\circ) \quad (\text{تبسيط})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{تعويض}) \quad \text{الطرف الأيسر}$$

تدريب (٦)

$$\text{أثبت أن } \frac{\text{جا } ٧٥^\circ + \text{جا } ١٥^\circ}{\text{جتا } ٧٥^\circ - \text{جتا } ١٥^\circ} = \sqrt{3}$$

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة : $\text{ظا } (٤٥^\circ - \text{ج}) \times \text{ظا } (٤٥^\circ + \text{ج}) = ١$ (ج $\neq ٤٥^\circ, ٢٢٥^\circ$)

حيث $٠^\circ \leq \text{ج} \leq ٣٦٠^\circ$

الحل

نبدأ بالطرف الأيمن: $\text{ظا } (٤٥^\circ - \text{ج}) \times \text{ظا } (٤٥^\circ + \text{ج})$

$$= \frac{\text{ظا } ٤٥^\circ - \text{ظا ج}}{1 + \text{ظا } ٤٥^\circ \text{ ظا ج}} \times \frac{\text{ظا } ٤٥^\circ + \text{ظا ج}}{1 - \text{ظا } ٤٥^\circ \text{ ظا ج}} \quad (\text{المتطابقات (٥, ٦)})$$

$$= \frac{(1 + \text{ظا ج})}{1 - \text{ظا ج}} \times \frac{(1 - \text{ظا ج})}{1 + \text{ظا ج}} \quad (\text{تعويض ظا } ٤٥^\circ = ١)$$

$$= ١ \quad (\text{تبسيط})$$

(الطرف الأيسر)

تمارين و مسائل

(١) دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة كل مما يأتي:

أ) $\text{جتا } ٥٠^\circ - \text{جتا } ١٠^\circ - \text{جا } ٥٠^\circ \text{ جا } ١٠^\circ$

ب) $\text{جا } ٣٥^\circ \text{ جتا } ٢٥^\circ + \text{جا } ٢٥^\circ \text{ جتا } ٣٥^\circ$

ج) $-\text{جا } ٧٥^\circ \text{ جا } ١٥^\circ + \text{جتا } ٧٥^\circ \text{ جتا } ١٥^\circ$

د) $\text{جا } \frac{\pi}{٣} \text{ جتا } \frac{\pi}{٦} - \text{جا } \frac{\pi}{٦} \text{ جتا } \frac{\pi}{٣}$

(٢) بسّط المقادير الآتية:

أ) $\text{جتا } ٢\text{س جا } ٣\text{ص} - \text{جتا } ٣\text{ص جا } ٢\text{س}$

ب) $\text{جا س جتا } ٢\text{ص} + \text{جا } ٢\text{ص جتا س}$

ج) $\text{جتا س جتا } ٣\text{س} + \text{جا س جا } ٣\text{س}$

د) $\text{جا } ٣\text{س جتا س} - \text{جتا } ٣\text{س جا س}$

هـ) $\text{جتا } ٧\text{ص جتا } ٣\text{ص} - \text{جا } ٧\text{ص جا } ٣\text{ص}$

و) $\frac{\text{ظا(س-ص)} + \text{ظا ص}}{١ - \text{ظا(س-ص)} \text{ ظا ص}}$ ، (ملاحظة: تستثنى الزوايا التي تجعل المقام صفرًا أو غير معرف).

(٣) برهن صحة كل مما يأتي:

أ) $\text{جتا } ٣\text{س} = \text{جتا } ٣\text{س} - \text{جا } ٣\text{س جا س جتا س}$

ب) $\text{جا } ٤\text{س} + \text{جا } ٢\text{س} = \text{جا } ٢\text{س جا } ٣\text{س جتا س}$

ج) $(\text{جتا س} + \text{جا س})^٢ - (\text{جتا س} - \text{جا س})^٢ = ٤ \text{ جا س جتا س}$

د) $(١ - \text{جا س})(١ + \frac{١}{\text{جا س}}) = \frac{\text{جتا } ٢\text{س}}{\text{جا س}}$

هـ) $٢ \text{ ظا س} = \frac{\text{جتا س}}{١ + \text{جا س}} - \frac{\text{جتا س}}{١ - \text{جا س}}$

$$(و) \frac{\text{ظا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{ص}}{1 - \text{ظا}^2\text{س} \text{ظا}^2\text{ص}} = \text{ظا} (\text{س} + \text{ص}) \text{ظا} (\text{س} - \text{ص}), (\text{س} \neq \frac{\pi}{4}, \text{ص} \neq \frac{\pi}{4})$$

أو مضاعفات $\frac{\pi}{4}$ ، أو ما يجعل المقام صفرًا

$$(ز) \frac{\text{جا}(\text{س} + \text{ص})}{\text{جا}(\text{س} - \text{ص})} = \frac{\text{ظاس} + \text{ظا ص}}{\text{ظاس} - \text{ظا ص}} (\text{س} \neq \text{ص})$$

$$(٤) \text{أب جـ مثلث فيه جا أ} = \frac{1}{2}, \text{جا ب} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ حيث أ، ب} \in [\frac{\pi}{2}, 0], \text{برهن أن:}$$

$$\text{جا جـ} = 1$$

$$(٥) \text{إذا كان قياس أ + ب} = \frac{\pi}{4}, \text{ظا أ} = \frac{1}{11} \text{ فجد ظا ب.}$$

$$(٦) \text{إذا كانت أ، ب، جـ زوايا مثلث فأثبت أن:}$$

$$\text{ظا أ} + \text{ظا ب} + \text{ظا جـ} = \text{ظا أ ظا ب ظا جـ}$$

$$(٧) \text{جد مفكوك كل مما يأتي:}$$

$$\text{أ) } \text{جا} (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})$$

$$\text{ب) } \text{جتا} (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})$$

$$\text{جـ) } \text{ظا} (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})$$

$$(٨) \text{حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس إذا علمت أن الزمن ١ ثانية.}$$



تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا، ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته؛ فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة θ وزاوية مقدارها θ مع خط الأفق فإن المعادلتين الآتيتين تحددان أقصى ارتفاع يصل إليه الماء L ، والمسافة الأفقية D :

$$L = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad D = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

جـ ثابت الجاذبية الأرضية، اكتب النسبة بين L و D في أبسط صورة.

اعتمادًا على المتطابقات في الدرس السابق يمكن التعبير عن $\sin 2\theta$ بصورة أخرى:

$$(\sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta)$$

(باستخدام متطابقة جيب مجموع زاويتين)

(تجميع حدود متشابهة)

$$\sin 2\theta = (\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta)$$

$$= \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta$$

وهذا يمثل برهان الفرع (٢) من المتطابقات الآتية:

متطابقات ضعف الزاوية:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & \sin 2\theta = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta \\ & \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ & \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ & \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$(2) \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$(3) \quad \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$$

استخدم الأسلوب نفسه لبرهنة فرعي (١)، (٣).

إذا علمت أن جاس = $\frac{2}{3}$: صفر $> س > \frac{\pi}{4}$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

(١) جتا^٢س (٢) جا^٢س (٣) ظا^٢س

الحل

(١) جتا^٢س = ١ - ٢ جا^٢س (متطابقة ضعف الزاوية (١))

(تعويض قيمة جاس) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 2 - 1 =$

(تبسيط) $\frac{1}{9} = \frac{8}{9} - 1 = \frac{4}{9} \times 2 - 1 =$

(٢) و لحساب جا^٢س يلزم إيجاد جتا س :

(متطابقة) $جا^2 س + جتا^2 س = 1$

(تعويض قيمة جاس) $1 = جتا^2 س + \left(\frac{2}{3}\right)^2$

(تبسيط) $1 = جتا^2 س + \frac{4}{9}$

(طرح $\frac{4}{9}$ من الطرفين) $جتا^2 س = \frac{5}{9}$

(نأخذ الجذر للطرفين) $جتا س = \sqrt{\frac{5}{9}}$

(السالب يُهمل لأن الزاوية في الربع الأول) $جتا س = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(متطابقة جيب ضعف الزاوية) $جا ٢س = ٢ جاس جتا س$

$جا ٢س = ٢ \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} =$

(تبسيط) $\frac{\sqrt{5}}{9} \times 4 =$

(٣) لحساب ظا^٢س $\frac{جا ٢س}{جتا ٢س} =$

(تعويض ثم تبسيط) $\frac{\sqrt{5}}{9} \times 4 = \frac{1}{9} \div \frac{\sqrt{5}}{9} \times 4 =$

تدريب (١)

إذا علمت أن $\frac{1}{3} = \text{جتا س}$ ، $\frac{\pi}{2} > \text{س} > \frac{\pi}{3}$ ، فجد قيمة كلٍّ من:

(١) جتا ٢س (٢) جتا ٢س

مثال (٢)

دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة: جتا ٢٢,٥° جتا ٢٢,٥°

الحل

(متطابقة جيب ضعف الزاوية)

$$(\text{جتا } 45^\circ = 2 \times \text{جتا } 22,5^\circ)$$

(تعويض ثم تبسيط)

$$\text{جتا } 2\text{س} = 2 \text{ جتا س جتا س}$$

$$\text{جتا } 22,5^\circ = \frac{1}{2} = \text{جتا } 22,5^\circ \text{ جتا } 22,5^\circ$$

$$\frac{1}{2 \times \text{جتا } 22,5^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\text{جتا } 22,5^\circ} =$$

تدريب (٢)

دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة: (جتا ١٥°).

متطابقات نصف الزاوية

$$(1) \text{ جتا } \frac{\text{س}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \text{جتا س}}{2}} \quad \text{ومنها } 1 - \text{جتا س} = 2 \text{ جتا } \frac{\text{س}}{2}$$

$$(2) \text{ جتا } \frac{\text{س}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا س}}{2}} \quad \text{ومنها } 1 + \text{جتا س} = 2 \text{ جتا } \frac{\text{س}}{2}$$

$$(3) \text{ ظا } \frac{\text{س}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}}$$

إثبات فرع (٢) من متطابقات نصف الزاوية:

البرهان

(متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام)

(تعويض س بدل ٢ س في المتطابقة)

(تبسيط)

(جذر الطرفين)

$$\text{جتا}^2 \text{س} = ٢ - \text{جتا}^2 \text{س} - ١$$

$$\text{جتاس} = ٢ - \text{جتا}^2 \frac{\text{س}}{٢} - ١$$

$$\text{جتا}^2 \frac{\text{س}}{٢} = \frac{١ + \text{جتاس}}{٢}$$

$$\text{جتا} \frac{\text{س}}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ + \text{جتاس}}{٢}} \text{ وهو المطلوب}$$

تدريب (٣)

$$\text{أثبت أن جتا} \frac{\text{س}}{٢} = \pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتاس}}{٢}}$$

مثال (٣)

إذا علمت أن ظاهر $\frac{٤}{٣} =$ ، $\frac{\pi}{٢} > \text{هـ} > \frac{\pi}{٣}$ ، فجد جتا $\frac{\text{هـ}}{٢}$

الحل

بما أن هـ تقع في الربع الثالث فإن $\frac{\text{هـ}}{٢}$ تقع في الربع الثاني. (لماذا؟)

ظاهر $\frac{٤}{٣} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ← ص = ٤ ، س = ٣ (تكافؤ الكسور، الزاوية هـ في الربع الثالث)

(معادلة الدائرة)

(تعويض قيم س، ص)

(جذر الطرفين)

$$\text{ر}^2 = \text{س}^2 + \text{ص}^2$$

$$\text{ر}^2 = (٣ -)^2 + (٤ -)^2$$

$$\text{ر} = ٥$$

$$\text{جتاه} = \frac{\text{س}}{\text{ر}} = -\frac{٣}{٥}$$

$$\text{جتا} \frac{\text{هـ}}{٢} = -\sqrt{\frac{١ + \text{جتاه}}{٢}}$$

(القيمة سالبة لأن الزاوية $\frac{\text{هـ}}{٢}$ في الربع الثاني)

$$\text{جتا} \frac{\text{هـ}}{٢} = -\sqrt{\frac{١ - \frac{٣}{٥}}{٢}} = -\sqrt{\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٥}} = -\sqrt{\frac{١}{٥}}$$

(تبسيط)

تدريب (٤)

إذا علمت أن $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، فجد قيمة $\cos \theta$.

مثال (٤)

$$\cos \theta = \pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}}$$

الحل

$$\text{الطرف الأيمن: } \cos \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}}$$

(متطابقة الظل)

(تعويض متطابقات نصف الزاوية)

$$\cos \theta = \pm \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}$$

(الضرب بالمرافق)

$$\cos \theta = \pm \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}$$

= (الطرف الأيسر)

تدريب (٥)

$$\cos \theta = \pm \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta}}$$

تمارين و مسائل

(١) دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة كل مما يأتي:

أ (جتا ٥٠° جا ٨٠° - جا ٥٠° جا ١٠°)

ب (جتا ٧٠° جتا ٢٥° + جا ٧٠° جتا ٦٥°)

ج (جتا ٢ جتا $\frac{\pi}{12}$ - ١)

د (جا $\frac{\pi}{8}$)

هـ (ظا $\frac{\pi}{12}$)

(٢) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٣) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ (جتا $٢س$ = $\frac{ظتاس - ١}{ظتاس + ١}$)

ب (ظا $س$ = $\frac{١ - جتا٢س}{جا٢س}$)

ج (ظا $٢س$ = $\frac{٢}{ظتاس - ظتاس}$)

هـ (قاس = $\frac{جاس}{ظتاس + ظتاس}$)

ز (ظتا $\frac{س}{٢}$ = $\pm \frac{١ + جتاس}{جاس}$)

د (٤ جتا $٢س$ - جا $٢س$ = ٤ جتا $س$)

و (١ - جتاه = $\frac{١ - جتاه}{١ + جتاه}$)

ح (جا $٢ج$ = $\frac{جتاج}{١ + جتاج} \times \frac{١ + جتا٢ج}{١ + جتا٢ج}$)

(٤) إذا كان ظا $٢ج$ = $\frac{٧}{٣٥}$ ، فجد قيم ظا ج .

(٥) إذا كان جتاه = $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{\pi}{٢} > هـ > \pi$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ (جتا $٢هـ$) ب (جا $٢هـ$) ج (ظا $٢هـ$)

د (جا $\frac{هـ}{٢}$) هـ (جتا $\frac{هـ}{٢}$) و (ظا $\frac{هـ}{٢}$)

(٦) إذا كان جتا $أ$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا $ب$ = $\frac{٤}{٥}$ ، أو ب زاويتان حادثان فجد قيمة جتا $(\frac{أ - ب}{٢})$

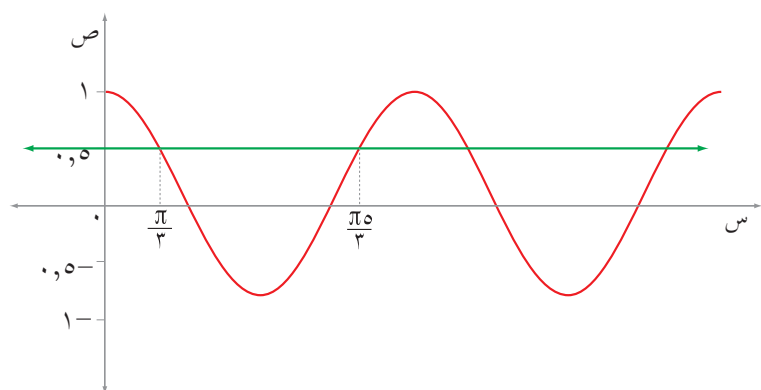
(دون استخدام الآلة الحاسبة)



ناعورة ماء دوارة قطرها ٢٠ م تدور بمعدل ٢,٥ دورة في الدقيقة، تم رصد دلو ماء مركب عليها، فإذا كان ارتفاع الدلو عن سطح الأرض يعطى بالمعادلة $ل = ٢٠ - ٢١$ جتا $٣\pi ن$ ، حيث $ل$ الارتفاع، $ن$ الزمن بالدقيقة. بعد كم دقيقة يكون ارتفاع الدلو ١١ م؟

تعرّف **المعادلة المثلثية** على أنها المعادلة التي تحوي اقتراناً مثلثياً أو أكثر، وحلّ المعادلة المثلثية يعني إيجاد قيم المتغير فيها، إما هندسياً أو جبرياً.

مثال (١)



الشكل (٤-٢٥).

حل المعادلة جتاس $= \frac{1}{4}$.

الحل

نقوم برسم الاقتران

ق(س) = جتاس، ورسم خط أفقي

يمثل المستقيم $ص = \frac{1}{4}$.

يتضح من الرسم أن منحنى الاقتران ق(س) = جتاس و المستقيم $ص = \frac{1}{4}$ يتقاطعان في النقاط

التي إحداثياتها السينية هي: $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{5\pi}{3}$ ، فتكون مجموعة الحل في الفترة $[0, 2\pi]$ هي

$\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$ ، و الحل في الفترة $[2\pi, 4\pi]$ يُسمى **الحل الأولي** للمعادلة.

ويمكن تعميم الحل على مجموعة الأعداد الحقيقية، ليصبح الحل:

$\{س: س = \frac{\pi}{3} + 2\pi ن، \frac{5\pi}{3} + 2\pi ن : ن \in \mathbb{Z}\}$ حيث 2π هي دورة الاقتران ق(س) = جتاس،

وهذا ما يعرف **بالحل العام**.

تدريب (١)

حلّ المعادلة الآتية:

$$\text{جا } 2\text{س} = 0,5 \text{ هندسيًا.}$$

مثال (٢)

حلّ المعادلة جا ٤س = ١ جبريًا.

الحل

بالبحث عن الزاوية التي جيبها = ١

$$\text{نجد أن } \frac{\pi}{2} = \text{س } 4$$

س = $\frac{\pi}{8}$ وهذا هو الحل الأولي.

دورة الاقتران ق(س) = جا ٤س هي $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

فالحل العام : $\{ \text{س} : \text{س} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \text{ ن، ن } \frac{\pi}{2} \}$

(قسمة الطرفين على ٤)

تدريب (٢)

$$\text{حلّ المعادلة جتا } 2\text{س} = 0,5, \text{ س } \in [\pi, 0]$$

مثال (٣)

حلّ كلاً من المعادلات الآتية حلًا عامًا:

$$(1) \text{ جا } 2\text{س} - \text{جاس} = 2$$

$$(2) \text{ جا } 2\text{س} + \text{جاس} = \text{صفرًا}$$

الحل

$$(1) \text{ جا } 2\text{س} - \text{جاس} = 2$$

(طرح ٢ من الطرفين)

جا ٢س - جاس - ٢ = صفرًا تحليل كأي معادلة تربيعية فينتج :

(تحليل الطرف الأيمن)

(خاصية الضرب بصفر)

تُهمل (لماذا)؟

$$(جاس - ٢) (جاس + ١) = صفرًا$$

$$\text{إما } (جاس - ٢) = صفرًا$$

$$\text{ومنه جاس} = ٢$$

$$\text{أو جاس} + ١ = صفرًا$$

$$\text{جاس} = -١$$

$$س = \frac{\pi^3}{٢} \text{ الحل الأولي}$$

$$\text{الحل العام: } \{س: س = \frac{\pi^3}{٢} + \pi ن٢, ن \in \mathbb{Z}\}$$

$$(٢) \text{ جاس} + \text{جاس} = صفرًا$$

$$\text{جاس} (جاس + ١) = صفرًا$$

$$\text{إما جاس} = صفرًا$$

$$س = صفرًا \text{ أو } \pi$$

$$\text{أو جاس} = -١$$

$$س = \frac{\pi^3}{٢}$$

وبذلك تصبح مجموعة الحل الأولي هي : $\{ \frac{\pi^3}{٢}, \pi, \text{صفر} \}$

أما الحل العام فهو: $\{ \text{صفر} + \pi ن٢, \pi ن٢ + \pi, \frac{\pi^3}{٢} + \pi ن٢, ن \in \mathbb{Z} \}$

تدريب (٣)

$$\text{حلّ المعادلة الآتية : جاس} - \text{جا} \frac{س}{٢} = \text{صفر حيث صفر} > س > \pi^٢$$

مثال (٤)

حلّ المعادلة:

$$٢ \text{جتا}^٢ س + ٢ \text{جا}^٢ س = \text{جتاس} , \text{ حلًا أوليًا.}$$

الحل

نكتب المعادلة بدلالة اقتران مثلثي واحد فتصبح المعادلة:

$$\begin{cases} (جتا^2 س = 2 جتا^2 س - 1) \\ (جا^2 س = 1 - جتا^2 س) \end{cases}$$

(فك الأقواس)

(اختصار)

(إخراج جتا س عاملاً مشتركاً)

$$4 جتا^2 س - 2 - 2 + 2 جتا^2 س - جتا س = صفرًا$$

$$2 جتا^2 س - جتا س = صفرًا$$

$$جتا س (2 جتا س - 1) = صفرًا$$

$$\text{إما جتا س} = صفرًا$$

$$\text{ومنه س} = \frac{\pi}{2} \text{ أو س} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{أو } (2 جتا س - 1) = صفرًا$$

$$جتا س = \frac{1}{2}$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \text{ وبذلك يكون الحل الأولي } \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

مثال (٥)

$$\text{حلّ المعادلة جاس} - \sqrt[3]{3} جتا س = صفر ، 0 \leq س \leq \pi$$

الحل

نحوّل صورة المعادلة السابقة إلى ظاس بقسمة المعادلة على جتا س حيث جتا س $\neq$ صفرًا، فتصبح المعادلة على النحو الآتي:

(قسمة الطرفين على جتا س)

(تبسيط)

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}} - \sqrt[3]{3} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س}}$$

$$\text{ظاس} - \sqrt[3]{3} = صفرًا$$

$$\text{ظاس} = \sqrt[3]{3} ، 0 \leq س \leq \pi$$

$$\text{س} = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{مجموعة الحل الأولي هي: } \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right\}$$

تمارين و مسائل

(١) جد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} \text{أ) } & \text{جاس جتاس} - \frac{1}{4} \text{جتاس} = \text{صفرًا} & \text{ب) } & \text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = \text{صفرًا} \\ \text{ج) } & \text{جتا}^2 \text{س} + \text{جتاس} + 1 = \text{صفرًا} & \text{د) } & 2 \text{جا}^2 \text{س} - 1 = \text{صفرًا} \\ \text{هـ) } & \text{جتاس} - 2 \text{جتاس جاس} = \text{صفرًا} & \text{و) } & \text{جاس} + \text{جا}^{\frac{3}{4}} = 0 \\ \text{ز) } & \frac{1 + \text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{1 + \text{جاس}} = 4 & \text{ح) } & \text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س} + 2 = \text{صفرًا} \end{aligned}$$

(٢) اكتب كل معادلة من المعادلات المثلثية الآتية بدلالة اقتران مثلثي واحد:

$$\begin{aligned} \text{أ) } & 2 \text{جتا}^2 \text{س} = \text{جاس} + 1 & \text{ب) } & \text{جاس} = \text{جتاس} \\ \text{ج) } & 5 \text{ظا}^2 \text{س} = 6 \text{قاس} - 5 & \text{د) } & 1 + \text{ظتا}^2 \text{س} = 3 \text{قتاس} \end{aligned}$$

(٣) دون اللجوء إلى الحل، اذكر عدد الحلول الممكنة لكل معادلة إذا علمت أن $0 < \text{س} < \pi$ ، مبرراً إجابتك :

$$\begin{aligned} \text{أ) } & 3 \text{جاس} = 4 & \text{ب) } & \text{ظاس} = 1 \\ \text{ج) } & \text{ظاس} + \text{ظتاس} = \text{صفر} \end{aligned}$$

(٤) إذا علمت أن: $\text{ب جا هـ} = \sqrt{3}$ ، $\text{ب جتا هـ} = 1$ ، فاحسب:

أ) قيم هـ التي تحقق العلاقتين معاً. ب) قيم ب الممكنة.

(٥) إذا كان $\text{ق(س)} = \text{جاس}$ ، $\text{هـ(س)} = \text{جا}^2 \text{س}$

أ) مثل كلاً من الاقترانين بيانياً.

ب) جد نقاط تقاطع المنحنيين.

ج) حل المعادلة $\text{جاس} = \text{جا}^2 \text{س}$ جبرياً. ماذا تلاحظ؟

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

أسئلة الوحدة

(١) حول الزوايا الآتية من القياس الستيني إلى التقدير الدائري:

(أ) 75° (ب) $22,5^\circ$

(٢) حول الزوايا الآتية من التقدير الدائري إلى القياس الستيني:

(أ) $\frac{\pi}{10}$ (ب) $\frac{\pi 7}{6}$

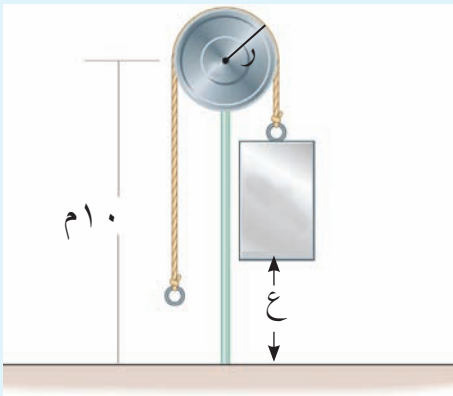
(٣) بسّط العبارات الآتية:

(أ) $\text{جتا}^2 \text{هـ} - \text{ظتا}^2 \text{هـ}$ (ب) $\frac{\text{جتا} \text{هـ} \times \text{قتا} \text{هـ}}{\text{ظاه}}$
 (ج) $\text{قاه} \text{ظا}^2 \text{هـ} + \text{قاه}$ (د) $(1 - \text{جاه}) (1 + \text{جاه})$

(هـ) $2 - 2 \text{جا}^2 \text{هـ}$ (و) $\frac{\text{جتا} (-\text{هـ})}{\text{جا} (-\text{هـ})}$

(٤) عبر عن المقادير الآتية باستخدام (الجيب) فقط:

(أ) $\text{ظاه} \text{جتا}^2 \text{هـ}$ (ب) $\text{جاه} (1 - \text{جتا}^2 \text{هـ})$
 (ج) $\text{جتا} (\frac{\pi}{4} - \text{هـ}) \text{قتا}^2 \text{هـ}$ (د) $\text{ظتا}^2 \text{هـ} - \text{ظا}^2 \text{هـ}$



الشكل (٤ - ٢٦).

(٥) تُرفع بعض الأثقال عن سطح الأرض باستخدام

بكرة نصف قطرها r ، وارتفاعها عن سطح

الأرض 10 م إذا علمت أن البكرة تدور هـ،

فاحسب ارتفاع الثقل في الحالات الآتية:

(أ) $720^\circ = \text{هـ}$ $r = 4 \text{ سم}$

(ب) $180^\circ = \text{هـ}$ $r = 2 \text{ م}$

(ج) $\frac{\pi}{4} = \text{هـ}$ $r = 2 \text{ م}$

(د) $\frac{\pi}{4} = \text{هـ}$ $r = 3 \text{ م}$

(٦) يقوم لاعب بركل كرة بزاوية قياسها $٢٢,٥^\circ$ مع سطح الأرض بسرعة ابتدائية متجهة مقدارها ١٠ م/ث إذا كانت المسافة التي تقطعها الكرة تعطى بالصيغة

$$د = \frac{٢ع جاس جتاس}{ج} \quad \text{حيث ج ثابت الجاذبية الأرضية} = ١٠ \text{ م/ث}^٢, \text{ ع سرعة الكرة}$$

فأجب عن كلِّ مما يأتي:

أ (بسّط المقدار السابق

ب) استخدم التبسيط في حساب المسافة.

(٧) أثبت كلاً مما يأتي:

$$أ \quad \frac{١+جاس}{جتاس} = \frac{جاس-جتاس}{١-جتاس} + ١$$

$$ب \quad \frac{ظاس+قاس}{١+ظاس-قاس} = ظاس + قاس$$

$$ج \quad قاس^٢ س + قاس^٢ س = قاس^٢ س \times قاس^٢ س$$

$$د \quad (جاس+جتاس)^٢ + (جاس-جتاس)^٢ = ٢$$

$$هـ \quad \frac{جاس^٢}{١-جتاس} + ١ = جتاس$$

$$و \quad (٢ ب جاس جتاس)^٢ + (جتاس-جاس)^٢ = ٢ ب^٢$$

$$ز \quad ٨ جاس = ٨ جاس جتاس جتاس جتاس$$

$$ح \quad (جاس+٢جتاس)^٢ + (٢ جاس-جتاس)^٢ = ٥$$

(٨) حلّ كلاً من المعادلات الآتية :

$$أ \quad ٢جتاس + جاس - ١ = \text{صفرًا}$$

$$ب \quad ٢ - جاس = ٢جتاس$$

$$ج \quad جاس + جتاس^٢ = ١$$

د (قاس - ظاس = ١ -)

هـ (٤ جاس = ٤ قتاس)

و (٢ جاس - جتاس = صفرًا)

ز (جاس + جتا٢س - جا٣س = صفرًا)

٩) أثبت أن:

أ (قتا٢س - ظتا٢س = ظتاس ظاس)

ب (ظتا٢س - جتا٢س = ظتا٢س جتا٢س)

جـ (جتاس × جتا(- س) - جاس × جا(- س) = ١)

د (قاس × قتاس = ظاس + ظتاس)

هـ (قتاس - جاس = جتاس ظتاس)

و (جاس قتاس + ظتا٢س = قتا٢س)

١٠) إذا كانت $أ + ب = ٢٢٥^\circ$ ، أثبت أن $\frac{\text{ظتا } أ}{\text{ظتا } أ + ١} \times \frac{\text{ظتاب}}{\text{ظتاب} + ١} = ٠,٥$.

١١) سيارة سرعتها ٦ كم/ساعة تسير على طريق دائري طول نصف قطره ٧ كم، ما قياس

الزاوية المركزية التي تقابل مسار السيارة بعد مرور ٢٢ دقيقة؟

١٢) يمثل الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران $ق(س) = جا(س + م)$

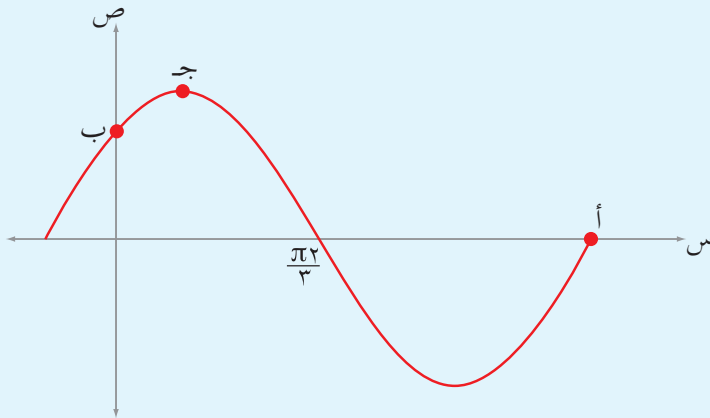
جد كلاً ممّا يأتي:

أ (قيمة أ)

ب (إحداثيا النقطة جـ .)

جـ (أصغر قيمة لـ م .)

د (إحداثيا النقطة ب .)



الشكل (٤ - ٢٧).

١٣) يتكون هذا السؤال من أربع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) قيمة جا $\frac{\pi}{6}$ =

أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (د) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(٢) سعة الاقتران ق (س) = ٢ جا ٥ س:

أ) ٥ (ب) ٢ (ج) $\frac{\pi 2}{5}$ (د) π

(٣) طول قوس الدائرة التي نصف قطرها ٣٠ سم و الذي يقابل زاوية مركزية قياسها 30° =

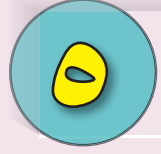
أ) $\frac{5}{\pi}$ (ب) $\frac{\pi}{3}$ (ج) $\pi 5$ (د) ٥

(٤) زاوية المرجع للزاوية (-700°) هي:

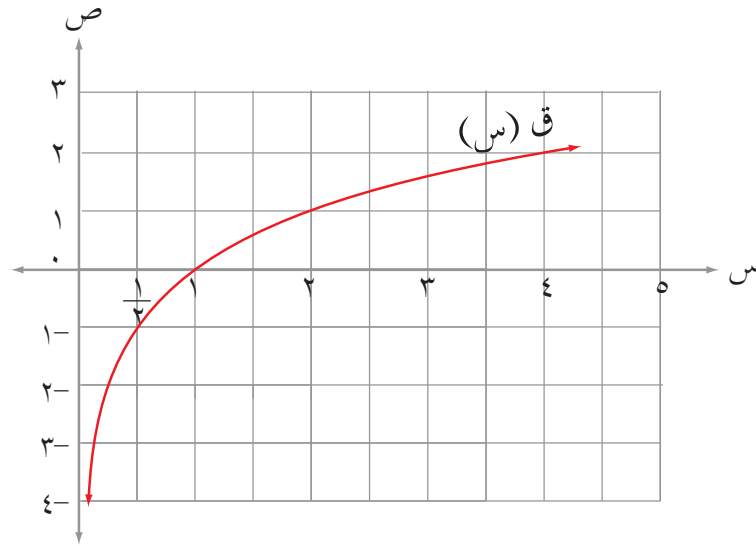
أ) 700° (ب) -20° (ج) 20° (د) 300°

الاقتدرات الأسية واللوغاريتمية

الوحدة الفامسة



نواجه في حياتنا مسائل تتضمن مقادير حسابية يصعب التعامل معها بالطرائق التقليدية، وعليه لابد من البحث عن طرائق وقوانين جديدة لتسهيل الحسابات، سنتعرف في هذه الوحدة الاقتدرات الأسية واللوغاريتمية التي نستفيد منها في تبسيط المقادير الحسابية من خلال قوانين الأسس واللوغاريتمات وتطبيقاتها الفيزيائية والبيولوجية ومعادلات النمو والاضمحلال وغيرها من التطبيقات.



Exponential and Logarithmic Functions

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على:

- تحويل الاقترانات من الصيغة الأسية إلى الصيغة اللوغاريتمية وبالعكس.
- توضيح العلاقة بين قوانين الأسس وقوانين اللوغاريتمات.
- حلّ معادلات أسية ولوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية بيانياً.
- تحويل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية (التي أساسها $b > 0$) إلى اقترانات أسية ولوغاريتمية أساسها (ه).
- برهنة متطابقات أسية ولوغاريتمية.
- استخدام الاقترانات الأسية واللوغاريتمية في حل مسائل حياتية.
- توظيف التكنولوجيا في حساب لوغاريتمات الأعداد.

النتائج

- تتعرف الاقتران الأسية.
- تمثل الاقتران الأسية وتستقصي خصائصه.
- تثبت صحة متطابقات أسية.
- تحل معادلات أسية.
- تتعرف المتطابقة الأسية.

Exponential Functions

أولاً: الاقتارات الأسية

يتزايد ثمن قطعة أرض بمعدل ٥٪ سنوياً، إذا كان سعرها حالياً ٨٠٠٠٠ دينار، فما ثمن

القطعة بعد ٨ سنوات؟

يمكن حل هذه المسألة بتكوين الجدول الآتي:

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
القيمة								

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة في الحل.

إن لعبة الشطرنج هي لعبة الأذكاء، واكتشاف الشطرنج يدل على عبقرية مخترع هذه اللعبة، حيث إنّه طلب مكافأة من الملك على الشكل التالي: أن يحصل على حبة قمح واحدة عن المربع الأول، وحبتيْن من القمح عن المربع الثاني، وأربع حبات من القمح عن المربع الثالث، وثمان حبات عن المربع الرابع وهكذا.

هل باستطاعتك معرفة عدد حبات القمح في المربع رقم ٢٠؟ رقم ٦٠؟

هل باستطاعتك تعريف اقتران يعبر عن عدد حبات القمح الموجودة في كل مربع من مربعات رقعة الشطرنج؟

لا بد أنك لاحظت أن عدد حبات القمح في المربع رقم ١ هو $2^0 = 1$

وأن عدد حبات القمح في المربع رقم ٢ هو: $2^1 = 2$

وأن عدد حبات القمح في المربع رقم ٣ هو: $2^2 = 4$

وأن عدد حبات القمح في المربع رقم ٤ هو: $2^3 = 8$ وهكذا....

لهذا يمكن القول بأن عدد حبات القمح في المربع رقم s هو 2^{s-1}

إذن يمكن تعريف الاقتران الدال على عدد حبات القمح التي حصل عليها مخترع لعبة الشطرنج عن كل مربع من مربعات رقعة الشطرنج بالقاعدة:

$$ق(س) = 2^{1-s}$$

وبناءً على ذلك فإن عدد حبات القمح في المربع رقم ٢٠ هي 2^{1-20} وعدد حبات القمح في المربع رقم ٦٠ هي 2^{1-60}

لاحظ أن مثل هذا الاقتران أسه متغير لذلك يسمى مثل هذا الاقتران **الاقتران الأسّي**.

تعريف

يسمى الاقتران المعرّف بالقاعدة $ق(س) = أ \times ب^{ل(س)}$ + ج اقتراناً أسياً، حيث $ل(س)$ اقتران حقيقي، $أ، ب، ج \in \mathbb{R}$ ، $أ \neq 0$ ، $ب < 0$ ، $ب \neq 1$ ، وهو اقتران يكون فيه $ل(س)$ أساً ويسمى العدد الثابت $ب$ أساس الاقتران $ق$.

ومن الأمثلة على الاقترانات الأسية ما يأتي:

$$\begin{aligned} (1) \quad ق(س) &= 4(3)^س & (2) \quad م(س) &= 2 + 3^س \\ (3) \quad هـ(س) &= \left(\frac{1}{2}\right)^س & (4) \quad و(س) &= \left(\frac{2}{5}\right)^س \\ (5) \quad هـ(س) &= 3 \times (5)^{2-س} & (6) \quad ل(س) &= \left(\frac{1}{5}\right)^{2+س} \end{aligned}$$

مثال (١)

أي من الاقترانات الآتية يعد اقتراناً أسياً:

$$\begin{aligned} (1) \quad ق(س) &= 15^{1-س} & (2) \quad م(س) &= 5 + 2^س \\ (3) \quad هـ(س) &= \sqrt[3]{س} & (4) \quad ك(س) &= 5 \times 3^{(س)} + 7 \\ (5) \quad ل(س) &= \left(\frac{3}{2}\right)^{2+س} \end{aligned}$$

الحل

جميع الاقترانات السابقة أسية باستثناء الاقتران هـ (لماذا؟)

تدريب (١)

أيُّ من الاقترانات الآتية يعد اقترانا أسيًّا:

- (١) ق (س) = $7 - 5^s$ (٢) م (س) = 2^{s-5}
 (٣) هـ (س) = $\sqrt[7]{7 + s}$ (٤) ك (س) = $5 \times 3^{s+6}$
 (٥) ل (س) = $12 - \left(\frac{2}{5}\right)^s$

فكر وناقش

ما قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران ق (س) = $(3^s + 2^s)$ اقترانًا أسيًّا؟

للتعرف على التمثيل البياني للاقتران الأسّي ندرس المثال الآتي:

مثال (٢)

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = 3^s

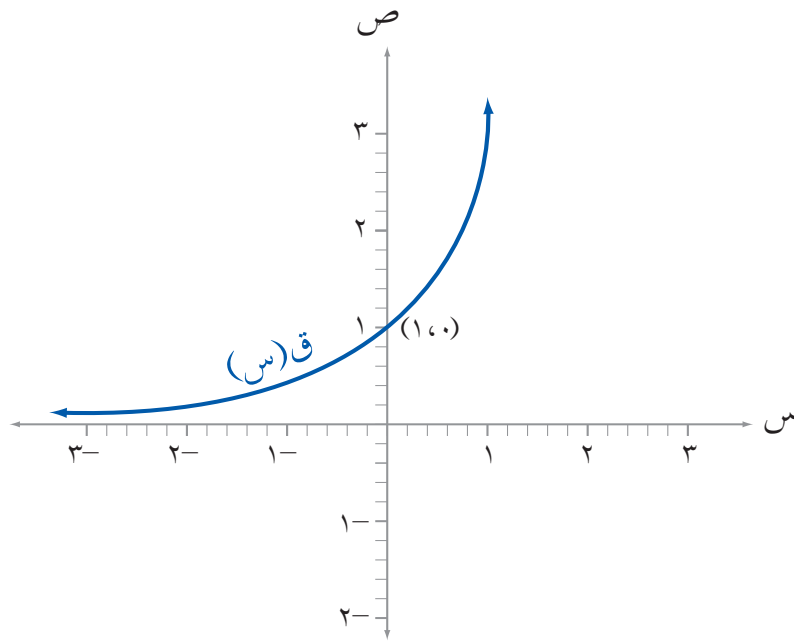
الحل

- (١) نختار قيمًا للمتغير س لتكون حول العدد صفر، مثل $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 (٢) نجد قيم ق (س) المناظرة لقيم س المختارة بالتعويض في قاعدة الاقتران ق .
 ق $(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ ، ق $(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ ، ق $(0) = 3^0 = 1$ ، ق $(1) = 3^1 = 3$ ، ق $(2) = 3^2 = 9$
 (٣) نكون الجدول الآتي:

س	-2	-1	صفر	١	٢
3^s	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	١	٣	٩

- (٤) نرسم المستوى الإحداثي ونعين عليه النقاط الواردة في الجدول السابق.

٥) نصل بين هذه النقاط بخطّ منحنٍ أملس كما في الشكل (٥-١) الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = ٣س$.



الشكل (٥-١).



اعتمادًا على الشكل (٥-١) أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) ما المقطع الصادي للاقتران $ق$ ؟
 - ٢) هل يقطع الاقتران $ق$ محور السينات؟
 - ٣) هل الاقتران $ق$ متزايد أم متناقص؟ ولماذا؟
 - ٤) هل الاقتران $ق$ واحد لواحد؟ ولماذا؟
 - ٥) ما مجال الاقتران $ق$ ؟
 - ٦) ما مدى الاقتران $ق$ ؟
- ماذا تلاحظ؟

تدريب (٢)

ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = ٢س$.

ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = \left(\frac{1}{2}\right)^س$.

الحل

نختار قيم المتغير $س$ حول العدد صفر ولتكن: $٢-، ١-، ٠، ١، ٢$

$$ق(٢-) = \left(\frac{1}{2}\right)^{٢-} = ٤ = ٢^{٢-}$$

$$ق(١-) = \left(\frac{1}{2}\right)^{١-} = ٢ = ٢^{١-}$$

(قوانين الأسس)

$$ق(٠) = \left(\frac{1}{2}\right)^٠ = ١$$

($١ = ٠$)

$$ق(١) = \left(\frac{1}{2}\right)^١ = \frac{1}{٢}$$

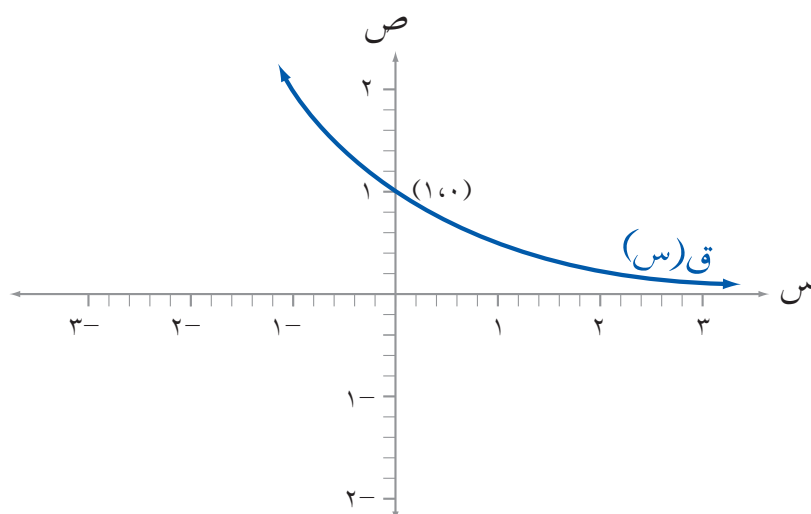
(قوانين الأسس)

$$ق(٢) = \left(\frac{1}{2}\right)^٢ = \frac{1}{٤}$$

س	٢-	١-	صفر	١	٢
ق(س)	٤	٢	١	$\frac{1}{٢}$	$\frac{1}{٤}$

نعين مجموعة النقاط في الجدول على المستوى الاحداثي ونصل بينها بخط منحن أملس ينتج

الشكل (٥-٢) الذي يمثل منحنى الاقتران $ق(س) = \left(\frac{1}{2}\right)^س$



الشكل (٥-٢).



بالاعتماد على الشكل (٥-٢)، أجب عن الأسئلة الآتية مع التبرير:

(١) هل يقطع الاقتران ق محور السينات؟

(٢) ما مدى الاقتران ق؟

(٣) ما المقطع الصادي للاقتران ق؟

(٤) ما مجال الاقتران ق؟

(٥) هل الاقتران ق واحد لواحد؟

(٦) هل الاقتران ق متزايد أم متناقص؟

ماذا تلاحظ؟

تدريب (٣)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = $\left(\frac{1}{3}\right)^س$

تدريب (٤)

ارسم منحنى كل من الاقترانات الآتية:

(١) ق(س) = $٥^س$ (٢) ل(س) = $-(٢)^س$

(٣) ع(س) = $٣(٢)^س$ (٤) هـ(س) = $٦^{-س}$

(٥) م(س) = $\left(\frac{1}{4}\right)^{-س}$

وبشكل عام لاحظ أنه لأيّ اقتران أسي $ق(س) = أ \times ب^س$ ، $أ < ٠$ ، $ب < ٠$ ، $ب \neq ١$ ، فإن:

(١) مجاله ح.

(٢) مداه $= ح +$

(٣) مقطعه الصادي $أ$ ، بمعنى أنه يمر بالنقطة $(٠، أ)$.

(٤) الاقتران $ق$ يكون متزايدًا، إذا كانت $ب < ١$ ، ويكون متناقصًا إذا كان $٠ < ب < ١$

(٥) منحناه لا يقطع محور السينات.

(٦) الاقتران واحد لواحد.

مثال (٤)

اكتب قاعدة الاقتران الأسي الذي على صورة $ق(س) = أ \times ب^{س+١}$ الذي مقطعه الصادي ٦ ويمر بالنقطة $(١، ٢٤)$.

الحل

بما أن المقطع الصادي للاقتران هو ٦ فإن الاقتران يمر بالنقطة $(٠، ٦)$ وعليه فإن $ق(٠) = ٦$ وهذا يعني أن: $ق(٠) = أ \times ب^{٠+١}$

$$٦ = أ \times ب$$

$$٦ = أ \times ب$$

بما أن الاقتران $ق$ يمر بالنقطة $(١، ٢٤)$ فإن $ق(١) = ٢٤$

$$٢٤ = أ \times ب^٢$$

$$٢٤ = أ \times ب^٢$$

$$٢٤ = ٦ \times ب$$

$$٤ = ب$$

$$٢٤ = أ \times ب^٢$$

لذلك فإن:

$$24 = 2(4) \times A$$

$$24 = 16A$$

$$\therefore A = \frac{3}{2}$$

(الاختصار)

$$\therefore Q(s) = \frac{3}{2} \times 4^{(s+1)}$$

تدريب (5)

جد قاعدة الاقتران الأسّي ل(س) = ج × (د)^س الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين
س + ص = 2، 2س - ص = 1، ومقطعه الصادي 2

مثال (5)

إذا كان ق(س) = 25 - 5^س، فجد المجال والمدى والمقطع السيني والمقطع الصادي دون استخدام الرسم.

الحل

المجال ح.

لماذا؟

المدى = (-∞، 25).

لماذا؟

يقطع الاقتران محور السينات عندما س = 2

لماذا؟

يقطع الاقتران محور الصادات عندما تكون س = 0.

$$Q(0) = 25 - 5^0$$

$$= 25 - 1$$

(لأن 5⁰ = 1)

$$= 24$$

∴ المقطع الصادي 24 (يقطع الاقتران ق محور الصادات في النقطة (0، 24))

تدريب (٦)

جد المجال والمدى والمقطع السيني والصادي من خلال القاعدة دون استخدام الرسم لكل من الاقترانين الآتيين:

$$(١) \text{ هـ (س) } = ٢^{-٣-٣} + ١$$

$$(٢) \text{ ل (س) } = ٢^{-٣-٤} - ٤$$

فكر وناقش

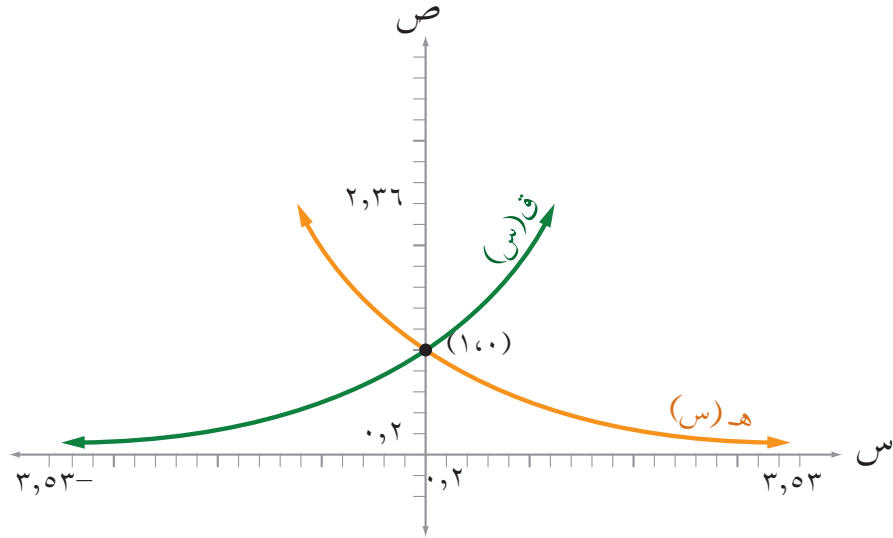
هل الاقتران الأسّي الذي على الصورة $ق(س) = أ \times ب^س$ الذي يمر بالنقطتين $(١, ١)$ ، $(٣, ١-)$ متزايد أم متناقص؟

مثال (٦)

ارسم منحنى كل من الاقترانين $ق(س) = ٢^س$ ، $هـ(س) = ٢^{-س}$ في المستوى الاحداثي نفسه.

الحل

يمثل الشكل (٣-٥) منحنى كل من الاقترانين $ق$ ، $هـ$



الشكل (٣-٥).

نلاحظ من الشكل (٣-٥) أنّ المنحنيين انعكاس لبعضهما في محور الصادات بمعنى أنّ:

$$ق(س) = هـ(-س) \text{ لكل } س \in \mathbb{R}$$

ويمكن تعميم ذلك على الاقترانات الأسية كافة وبشكل عام:

إذا كان $Q(s) = A^s$ ، $L(s) = A^{-s}$ ، $A < 0$ ، $A \neq 1$

فإنّ منحنى الاقتران L هو انعكاس لمنحنى الاقتران Q في محور الصادات والعكس صحيح.

تدريب (٧)

ارسم منحنى كل من الاقترانين $Q(s) = A^s$ ، $L(s) = A^{-s}$ في مستوى بياني واحد.

تتطلب بعض التطبيقات الحياتية اقترانات خاصة مثل **الاقتران الأسّي الطبيعي**، وقاعدته $Q(s) = H^s$ ، وهو اقتران أساسه H ، حيث H العدد النيبيري وهو عدد غير نسبي ويساوي تقريباً $(2,7)$. ويمكن استخدام الاقتران الأسّي الطبيعي في العديد من التطبيقات العملية في جميع المجالات ومنها **معادلة النمو والاضمحلال السكاني** حيث إنّ عدد السكان في سنة معينة يمكن تقديره وفق العلاقة:

$E = E_0 (H)^{A \times N}$ حيث E : عدد السكان الحالي

E_0 : عدد السكان المتوقع في سنة ما

A : نسبة الزيادة أو النقصان

N : فرق السنوات بين السنة الحالية والمتوقعة.

مثال (٧)

إذا كان عدد سكان مدينة (40000) نسمة، ويزيد عدد السكان بنسبة 5% سنوياً، جد عدد السكان المتوقع بعد (20) سنة.

الحل

$E = E_0 (H)^{A \times N}$ هـ $40000 = 20 \times 0,05$

$40000 = 1 \times 40000 = 20 \times 0,05$ هـ

$108000 = 108000$ نسمة تقريباً.

تدريب (٨)

إذا كان $Q(S) = 2 \times S^{+1}$ ، فجد المقطع الصادي والمجال والمدى لهذا الاقتران دون استخدام الرسم.

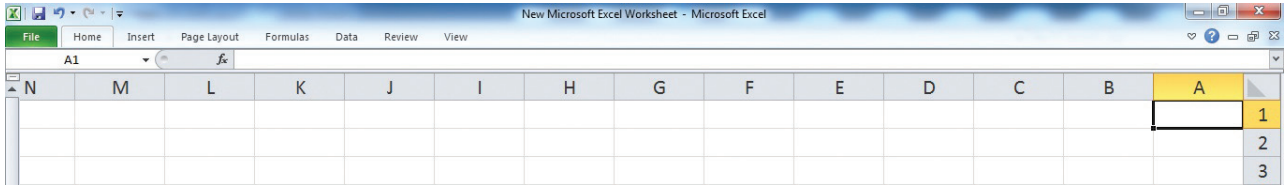
يمكن استخدام الحاسوب في رسم الاقتران الأسّي. والمثال الآتي يوضح طريقة رسم الاقتران الأسّي باستخدام برمجية إكسل (Excel).

مثال (٨)

ارسم منحنى الاقتران $Q(S) = S^3$ بالفترة $[-3, 3]$ باستخدام برمجية إكسل.

الحل

(١) شغل برمجية إكسل (Excel)، فتظهر لك نافذة إكسل كما في الشكل (٥-٤).



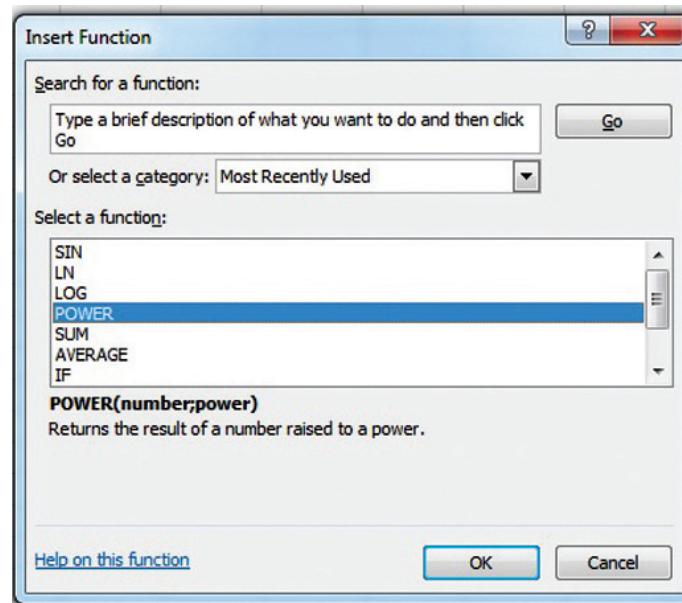
الشكل (٥-٤).

C	B	A
		-3
		-2.5
		-2
		-1.5
		-1
		-0.5
		0
		0.5
		1
		1.5
		2
		2.5
		3
		14
		15

الشكل (٥-٥).

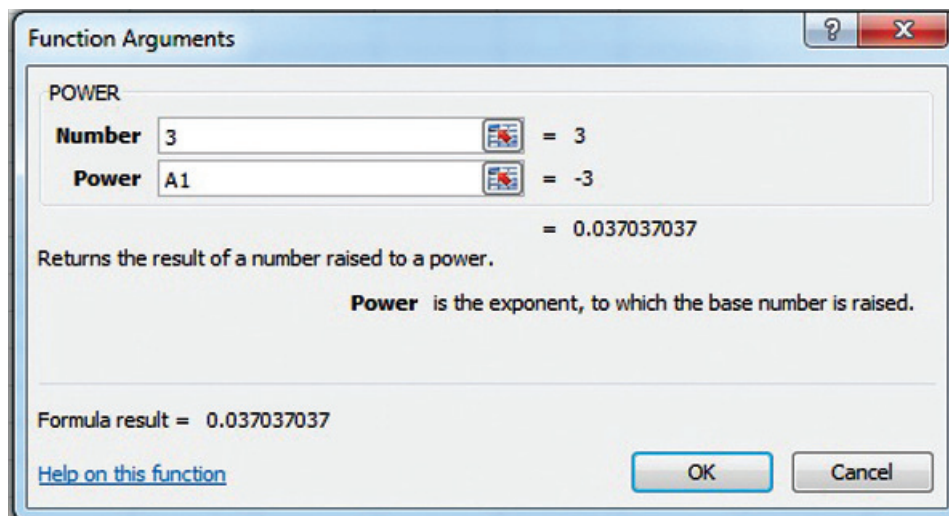
- (٢) اختر عمودًا وليكن A ، وضع المؤشر في الخلية A1 واكتب القيمة الأولى للمتغير S وهي (-3)، ثم ضع المؤشر في الخلية A2 واكتب القيمة الثانية للمتغير S وهي (-2.5).
- (٣) ظلل الخليتين ثم اسحب المؤشر للأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير S وهي (3). كما في الشكل (٥-٥).
- (٤) ضع المؤشر في الخلية (B1).

٥) من تبويبة الصيغ (Formulas)، اختر أداة إدراج دالة، فيظهر لك صندوق حوار إدراج كما في الشكل (٥-٦).



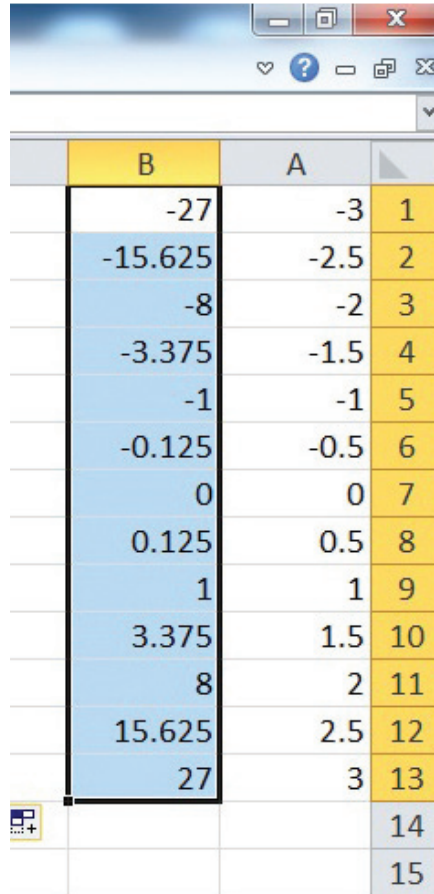
الشكل (٥-٦).

٦) اختر الدالة (POWER) وانقر على موافق، يظهر لك صندوق حوار الدالة كما في الشكل (٥-٧).



الشكل (٥-٧).

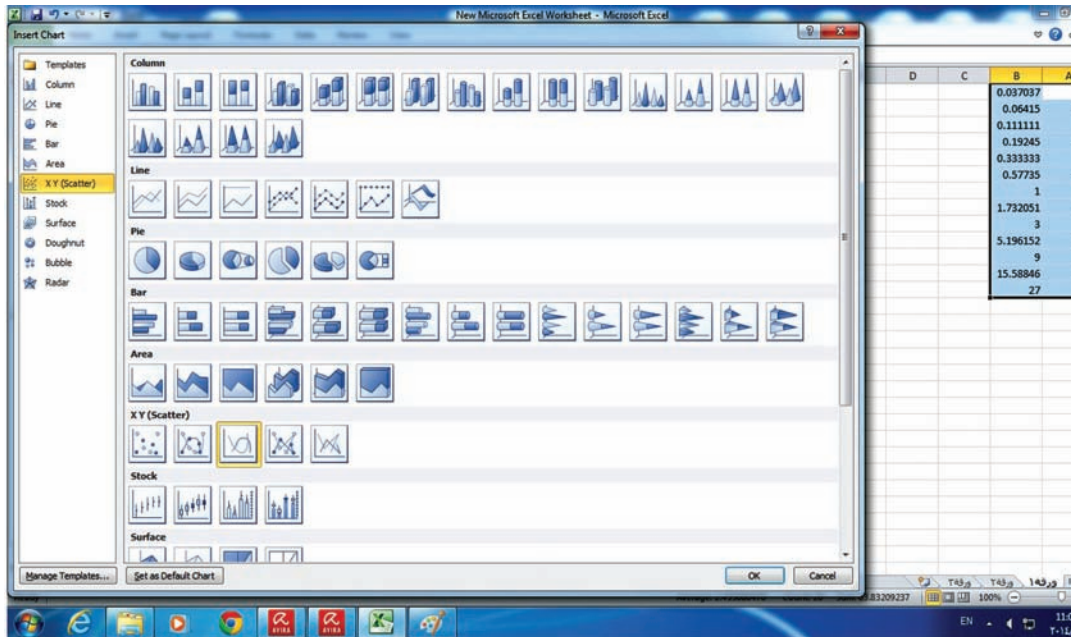
- ٧) اكتب أساس الاقتران ق في مستطيل (Number)، واكتب A1 في مستطيل (Power)، ثم انقر موافق، فيظهر لك صورة القيمة A1 في الخلية B1.
- ٨) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبها ليظهر لك مجموعة صور قيم المتغير س كما في العمود B. كما في الشكل (٨-٥).



B	A	
-27	-3	1
-15.625	-2.5	2
-8	-2	3
-3.375	-1.5	4
-1	-1	5
-0.125	-0.5	6
0	0	7
0.125	0.5	8
1	1	9
3.375	1.5	10
8	2	11
15.625	2.5	12
27	3	13
		14
		15

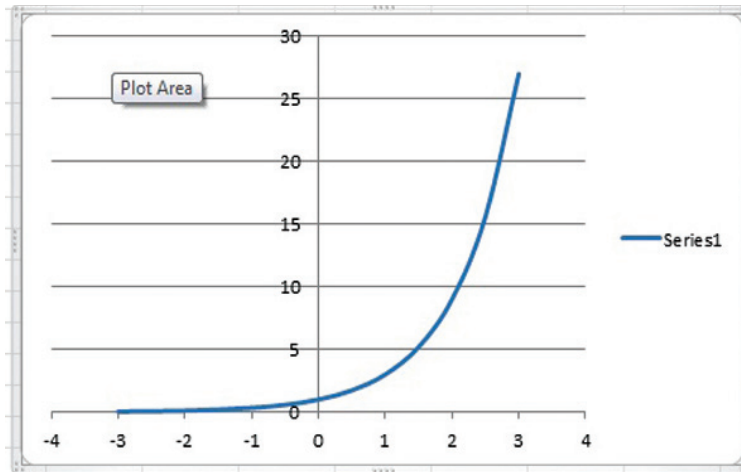
الشكل (٨-٥).

٩) ظلل العمودين A،B ثم اختر من تبوية إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط (Line) ثم اختر من الأشكال الشكل س، ص مبعثر (XY-Scatter) ثم اختر نوع المنحنى كما في الشكل (٥-٩).



الشكل (٥-٩).

١٠) اختر موافق ليظهر لك رسم الاقتران ق(س) = s^3 كما في الشكل (٥-١٠)



الشكل (٥-١٠).

تدريب (٩)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = s^6 ، باستخدام برمجية إكسل.

تمارين و مسائل

(١) ارسم منحنى كل من الاقتارات الآتية:

$$\begin{aligned} \text{أ (ق (س))} &= \left(\frac{3}{2}\right)^s \\ \text{ب (هـ (س))} &= 2^{s+1} \\ \text{جـ (ل (س))} &= 3^{-s-1} \\ \text{د (ع (س))} &= 3^{-s} + 2 \\ \text{هـ (ك (س))} &= 3^{-s} - 2 \end{aligned}$$

(٢) يتزايد عدد سكان مدينة ما وفق المعادلة التالية $ع_٢ = ع_١(١+z)^ن$ ، حيث $ع_١$: عدد سكان المدينة الحالي، $ز$: نسبة الزيادة السنوية في عدد السكان، $ن$: عدد السنوات، $ع_٢$: عدد سكان المدينة المتوقع، جد عدد سكان المدينة بعد (٥) سنوات، إذا علمت أن عدد السكان الحالي (٤٠٠٠٠) نسمة، ونسبة الزيادة ٥٪ سنوياً.

(٣) إذا كان ق(س) = $\frac{٢^{-s} + ٢^s}{٢}$ ، فأثبت أن:

$$ق(س) \times ق(ص) = \frac{ق(س+ص) + ق(س-ص)}{٢}$$

(٤) ارسم منحنى الاقتران ق في الفترة $[٣-، ٣]$ حيث :

$$ق(س) = \begin{cases} ٢^{-s} ، & ٣- \geq س \geq ٠ \\ ٢^s ، & ٣ \geq س > ٠ \end{cases}$$

(٥) ناقش خاصية الانعكاس في السؤال السابق.

(٦) ارسم منحنى الاقتران ق(س) = هـ^س

(٧) ارسم منحنى الاقترانين ق(س) = هـ^س، ل(س) = هـ^{-س} في مستوى بياني واحد.

(٨) ينفق أحمد أسبوعياً بمعدل ثابت مقداره ١٠٪ حسب العلاقة $م_٢ = م_١(١+r)^ن$ ، حيث

$م_١$: المبلغ بعد ن أسبوع، $م_٢$: المبلغ الأصلي، $ر$: المعدل الثابت للإنفاق. فإذا علمت أن لدى

أحمد (٣٠٠٠) دينار، كم يصبح المبلغ المتبقي مع أحمد بعد ثلاثة أسابيع؟

(٩) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(١٠) ارسم منحنى الاقتران ق(س) = $٣- \times (٢)^س$ باستخدام برمجية إكسل.

إذا كانت العلاقة بين شدة التيار I بالأمبير، والزمن t بالثواني هي: $I = 2^{-t}$ فبعد كم ثانية تصبح شدة التيار تساوي (0.225) أمبير؟

تعرفت سابقا مفهوم المعادلة، حيث إنَّ المعادلة جملة مفتوحة تتضمن متغيرًا أو أكثر، وهي مكونة من طرفين متساويين، والمعادلة أنواع منها المعادلة الخطية مثل: $4x + 7 = 5$ ، والمعادلة التربيعية مثل: $x^2 - 1 = 6$ ، والمعادلة المثلثية مثل: $\cos x = 0.25$ ، وسنتعرف في هذا الدرس نوعًا جديدًا من المعادلات مثل:

$$3^x = 64$$

$$\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

لاحظ أن المتغير يظهر على شكل أس لذا يسمى هذا النوع من المعادلات **المعادلات الأسية**

تعريف

المعادلة الأسية هي المعادلة التي يظهر فيها المتغير على شكل أس.

ومن الأمثلة أيضًا على المعادلة الأسية:

$$(1) \quad 3^x = 81$$

$$(2) \quad 5^{-x} = 125$$

$$(3) \quad 4 - x^2 = 64$$

يعتمد حل المعادلة الأسية على فكرة الحصول على مقدارين أسيين متساويين لهما الأساس نفسه من الصورة: $a^x = a^y$ (ل(س)

تعميم

(1) إذا كان $a^x = a^y$ (ل(س)، فإن $x = y$ (ل(س) حيث $a \neq 1$

(2) إذا كان $a^x = 1$ (ل(س)، فإن $x = 0$ (ل(س) حيث $a \neq 1$

والأمثلة الآتية توضح كيفية حلّ بعض المعادلات الأسية:

مثال (١)

$$\text{حلّ المعادلة الأسية } 3^x = 81$$

الحل

$$3^x = 3^4$$

(تحويل العدد ٨١ الى الصيغة الأسية)

$$\text{ومنه } x = 4 \quad \text{أي} \quad x = 1$$

∴ مجموعة الحل هي { ١ }

مثال (٢)

$$\text{حلّ المعادلة } \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = 27 \cdot 3^{-1}$$

الحل

الطرف الأيمن من المعادلة:

$$27 \cdot 3^{-1} = 3^{2-1} (1-3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$$

(قوانين الأسس)

الطرف الأيسر من المعادلة:

$$27 = 3^3 = (3^3)^{x-1} = 3^{3(x-1)}$$

$$(3^3 = 27)$$

(مساواة الطرفين)

(مساواة الأسس)

$$\text{ومنه } 3^3 = 3^{3(x-1)}$$

$$\text{إذن } 3 = 1 - 3$$

$$\text{ومنه } 3 - 3 = 1 - 3$$

$$2 = 3$$

∴ مجموعة الحل هي: { ٢ }

تدريب (١)

حل المعادلة الآتية:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{s-6} = \left(\frac{4}{9}\right)^s$$

مثال (٣)

حلّ المعادلة: $4s^2 + s^3 - 3s = 1$

الحل

$$s^3 + s^2 - 3s = 0$$

$$s(s^2 + s - 3) = 0$$

$$\text{إما: } s = 0$$

$$\text{أو: } s^2 + s - 3 = 0$$

$$s(s+3) = (s-1)$$

$$s = 3 \quad \text{أو} \quad s = 1$$

∴ مجموعة الحل = $\{1, 0, 3\}$

مثال (٤)

حلّ المعادلة الأسية $4s^2 + s^6 = 256$

الحل

$$4s^2 + s^6 = 256 \Rightarrow (s^2 + s^4)(2) = (256 + s^4)(2)$$

$$s^2 = 256$$

$$s^2 = 128 + s^4$$

$$8 = 128 + s^4$$

$$s^4 = 120$$

$$s = 1$$

∴ مجموعة الحل = $\{1\}$

(لأن $4 = 2^2$)

(التحليل بإخراج العامل المشترك s)

(خواص الأعداد الحقيقية)

(تحليل العبارة التربيعية)

(قوانين الأسس)

(تحويل العدد ٢٥٦ إلى الصيغة الأسية)

(قوانين الأسس)

هل يمكن حل مثال (٤) بطريقة أخرى؟

مثال (٥)

$$\frac{1}{625} = 5^{-s-1}$$

الحل

$$5^{-4} = \frac{1}{5^4} = 5^{-s-1}$$

إذن

$$-4 = -s-1$$

$$3 = s$$

$$(5=625)$$

تدريب (٢)

حلّ كلاً من المعادلات الآتية:

$$(1) \quad 2^{3s+1} + 16 = 0 \text{ صفراً.}$$

$$(2) \quad 5 + 5^{s-2} = 630$$

$$(3) \quad \frac{1}{81} = 3^{-s-1}$$

مثال (٦)

$$0 = 27 + 3^s \times 28 - 9^s$$

الحل

$$(3)^s = 27 + 3^s(28) - (3)^{2s}$$

$$0 = 27 + 3^s(28) - (3^s)^2$$

نفرض أن: $v = 3^s$

$$\text{فالمعادلة } 0 = 27 + 3^s(28) - (3^s)^2 \text{ تصبح على الصورة:}$$

$$v^2 - 28v + 27 = 0$$

$$(3^2 = 9)$$

(قوانين الأسس)

(بالتحليل)

(تعويض بدل ص و ٢٧)

$$٠ = (ص - ١) (٢٧ - ص)$$

$$ص = ٢٧ \quad \text{أو} \quad ص = ١$$

$$٣ = ٣ \quad \text{أو} \quad ١ = ٣$$

$$٣ = ٣ \quad \text{أو} \quad ٠ = ٣$$

∴ مجموعة الحل هي: {٣، ٠}

تدريب (٣)

حلّ المعادلات الأسية الآتية :

$$(١) \quad ٠ = ١٦ + ٣(٢)١٠ - ٤$$

$$(٢) \quad ٢٦ = ٥ + ٣٥ - ٢$$

$$(٣) \quad ٨ = ٢ - ٢ - ٢ - ٢$$

وبعد أن تعرفت المعادلة الأسية وطريقة حلها، ستتعرف الآن المتطابقة الأسية.

المتطابقة الأسية:

هي عبارة رياضية يظهر فيها المتغير على شكل أُسٍّ، وتكون صحيحة لجميع قيم المتغير فيها.

مثال (٧)

أثبت صحة المتطابقة

$$\sqrt[٣]{١ + ٢(٣) + (٩)} = ٣ + ١$$

الحل

لإثبات صحة المتطابقة نبدأ بالطرف الأيمن

$$\sqrt[٣]{١ + ٢(٣) + (٩)} = ٣ + ١$$

نفرض أن ص = ٣

$$∴ ص = ٣$$

$$٣ = ٣$$

$$٣ = ٣$$

$$٩ = ٩$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{\dots}}}} &= \sqrt{(1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{\dots}}})^2} \\
 &= 1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{\dots}}} \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$(\sqrt{s} = |s|)$$

(لأن ص دائماً موجبة)

مثال (٨)

أثبت صحة المتطابقة الأسية:

$$1 = \frac{2^{n+3} - 2^{n+5}}{(2^{n+3} - 2^{n+4})^3}$$

الحل

$$\begin{aligned}
 \frac{2^{n+3} - 2^{n+5}}{(2^{n+3} - 2^{n+4})^3} &= \frac{2^{n+3}(1 - 2^2)}{(2^{n+3}(1 - 2))^3} \\
 &= \frac{(1 - 4)}{(1 - 2)^3} \\
 &= \frac{-3}{(-1)^3} \\
 &= \frac{-3}{-1} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

تدريب (٤)

$$\text{أثبت أن: } \frac{2^{3+s} \times 2^{2+s}}{2^{3-s} \times 2^{2-s}} = 2^6$$

تمارين و مسائل

(١) حلّ كلّاً من المعادلات الآتية :

أ ($٢^س - ١٢(٢)^س + ٣٢ = ٠$)

ب ($٣س٣ + ٢س٢ + ٥س - ٧ = ١$)

ج ($\left(\frac{٢}{٥}\right)^{س-١} = \left(\frac{٢٥}{٤}\right)^{٣-س٢}$)

د ($٣(٢)^{٣-٩س} = ٤٨$)

هـ ($٥^{٢+س} - ٣٠(٥)^{١+س} + ١٢٥ = ٠$)

و ($٢ص١ - ٢ص٢ = ٦٤$)

ز ($٣س = ٣س-$)

(٢) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ ($\frac{١}{٣\sqrt[٢]{ن}} = \sqrt[٢]{٥} \times \frac{\sqrt[٢]{٣}}{\sqrt[٢]{١٥}}$)

ب ($١ - = \frac{٢ \times ٩^{س+١} - ٢ \times ١٢^{س-١}}{٢^{س+٢} + ٣^{س+٣}}$)

الاقتارات والمعادلات اللوغاريتمية

Logarithmic Functions and Equations

الفصل الثاني

النتائج

- تتعرف الاقتار اللوغاريتمي.
- تحول من الصيغة الأسية إلى اللوغاريتمية.
- تمثل منحنى الاقتار اللوغاريتمي بياناً.
- تستقصي قوانين اللوغاريتمات.
- تتعرف المعادلة والمتطابقة اللوغاريتمية.
- تحل معادلات لوغاريتمية.
- تثبت صحة متطابقة لوغاريتمية.

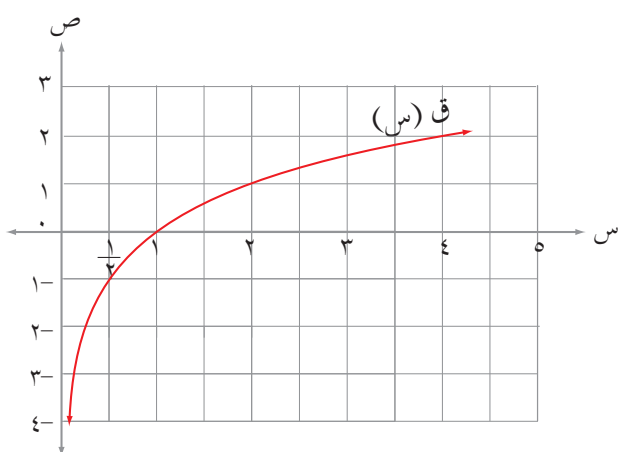
Logarithmic Functions

أولاً: الاقتارات اللوغاريتمية

نشاط

معتماً الشكل (٥-١١) الذي يمثل منحنى اقتار يسمى لوغاريتم s للأساس ٢ ويرمز له بالرمز $\log_2 s$ ، أجب عن الأسئلة الآتية:

(١) من خلال الرسم جد ناتج كل مما يأتي:



الشكل (٥-١١).

أ) $\log_2 4$

ب) $\log_2 2$

ج) $\log_2 1$

د) $\log_2 \frac{1}{2}$

(٢) جد القيمة العددية لكل مما يأتي:

أ) 2^2 ب) 2^1 ج) 2^0 د) 2^{-1}

ماذا تلاحظ؟

لا بد أنك لاحظت أن هناك علاقة بين الأسئلة المتناظرة في السؤالين السابقين، ويمكن القول

أن $\log_2 s = 2$ إذا وفقط إذا كان $s = 2^2$

تعريف

إذا كانت $s < 0$ ، $0 < a$ ، $1 \neq a$ ، فإن: $s = \log_a s$ إذا وفقط إذا كان $s = a^s$ ، ويسمى الاقتران المعروف بالقاعدة $q(s) = \log_a s$ بالاقتران اللوغاريتمي. حيث a : أساس اللوغاريتم.

ويمكن استخدام هذا التعريف للتحويل من الصيغة الأسية إلى الصيغة اللوغاريتمية وحساب قيم المقادير اللوغاريتمية.

مثال (١)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \log_3 81 \quad (٢) \log_5 125 \quad (٣) \log_{0.5} 0.5 \quad (٤) \log_4 1$$

الحل

$$(١) \log_3 81 = s$$

$$81 = 3^s$$

$$43 = 3^s$$

$$s = 4$$

(التحويل إلى صيغة أسية)

$$(٢) \log_5 125 = s$$

$$125 = 5^s$$

$$35 = 5^s$$

$$s = 3$$

(التحويل إلى صيغة أسية)

$$(35 = 125)$$

$$(٣) \log_{0.5} 0.5 = s$$

$$0.5 = 0.5^s$$

$$1-2 = 0.5^s$$

$$s = 1$$

(التحويل إلى صيغة أسية)

$$(0.5 = \frac{1}{2} = 0.5^s)$$

(لماذا؟)

$$(٤) \log_4 1 = \text{صفر}$$

تدريب (١)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$\begin{array}{lll} (١) \text{ لو } ٧٢٩ & (٢) \text{ لو } ٢٥٦ & (٣) \text{ لو } ٦٢٥ \\ (٤) \text{ لو } ٤ & (٥) \text{ لو } ٧ & (٦) \text{ لو } ٤ \\ & & \frac{٢٧}{٢٧} \end{array}$$

مثال (٢)

اكتب الصيغ اللوغاريتمية المقابلة للصيغ الأسية الآتية:

$$(١) \text{ } ٣٤٣ = ٣(٧) \quad (٢) \text{ } \frac{١}{٢٤٣} = ٥^{-٣} \quad (٣) \text{ } ب^٧ = ع$$

الحل

(تعريف اللوغاريتم)

$$(١) \text{ لو } ٣٤٣ = ٣$$

(تعريف اللوغاريتم)

$$(٢) \text{ لو } \frac{١}{٢٤٣} = -٣$$

(تعريف اللوغاريتم)

$$(٣) \text{ لو } ع = ٧$$

تدريب (٢)

اكتب الصيغ اللوغاريتمية المقابلة للصيغ الأسية الآتية:

$$\begin{array}{ll} (١) \text{ } ٨١ = ٣^٤ & (٢) \text{ } \frac{١}{١٦} = ٤^{-٢} \\ (٣) \text{ } \frac{٢٧}{٦٤} = ٣\left(\frac{٣}{٤}\right) & (٤) \text{ } \frac{٢٥٦}{٦٢٥} = ٤\left(\frac{٤}{٥}\right) \\ (٥) \text{ } أ^٢ = س & \end{array}$$

مثال (٣)

اكتب الصيغ الأسية المقابلة للصيغ اللوغاريتمية الآتية:

- (١) $\log_3 27 = 3$
- (٢) $\log_2 0.25 = -2$
- (٣) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$
- (٤) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$

الحل

(تعريف اللوغاريتم)

- (١) $27 = 3^3$
- (٢) $0.25 = 2^{-2}$
- (٣) $\frac{1}{81} = 3^{-4}$
- (٤) $8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

تدريب (٣)

اكتب الصيغ الأسية المقابلة للصيغ اللوغاريتمية الآتية:

- (١) $\log_5 125 = 3$
- (٢) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$
- (٣) $\log_{11} 121 = 2$

تعريف

يسمى الاقتران $q(s) = \log_a s$ (س) ل (س) اقتراناً لوغاريتمياً إذا وفقط إذا كان $a > 0, a \neq 1$ ، $s > 0$.

لاحظ أن: $\log_a s < 0$ لماذا؟

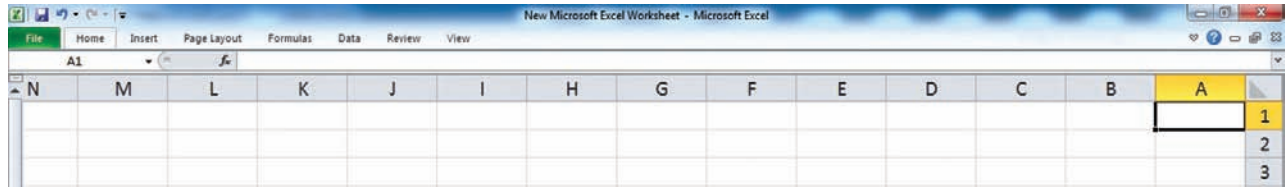
تعلم

مجال $q(s) = \log_a s$ هو مجموعة حل المتباينة $s > 0$.

ارسم منحنى الاقتران ق: ق(س) = لـ و س، س $\in [1, 9]$ باستخدام برمجية إكسل.

الحل

(١) شغل برمجية إكسل (Excel)، فتظهر لك نافذة إكسل كما في الشكل (٥-١٢).



الشكل (٥-١٢).

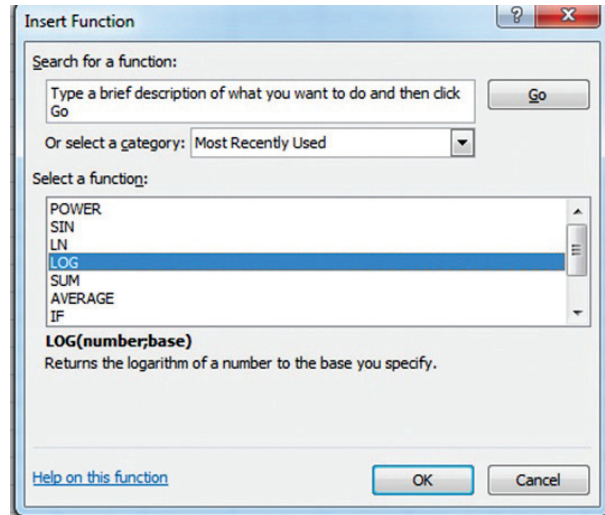
- (٢) اختر عمودًا وليكن A، وضع المؤشر في الخلية A1 اكتب القيمة الأولى للمتغير س وهي (١)، ثم نضع المؤشر في الخلية A2 واكتب القيمة الثانية للمتغير س وهي (٢).
- (٣) ظلل الخليتين ثم اسحب المؤشر للأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير كما في الشكل (٥-١٢).

B	A	
	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5
	6	6
	7	7
	8	8
	9	9
		10

الشكل (٥-١٣).

(٤) ضع المؤشر في الخلية (B1).

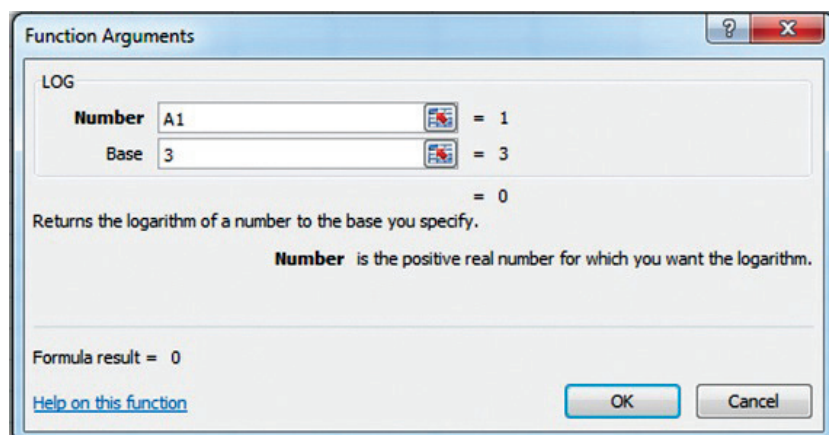
(٥) من تبويبة الصيغ (Formulas)، اختر أداة إدراج دالة فيظهر لك صندوق حوار إدراج، كما في الشكل (٥-١٤)، واختر الدالة (LOG).



الشكل (٥-١٤).

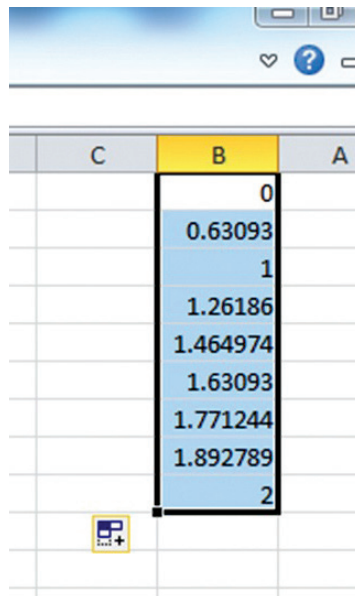
انقر على موافق، يظهر لك صندوق حوار الدالة كما في الشكل (٥-١٥).

(٦) ثم اكتب أساس الاقتران ق في مستطيل (Base) واكتب A1 في مستطيل (Number) فيظهر لك صورة القيمة في A1 في الخلية B1.



الشكل (٥-١٥).

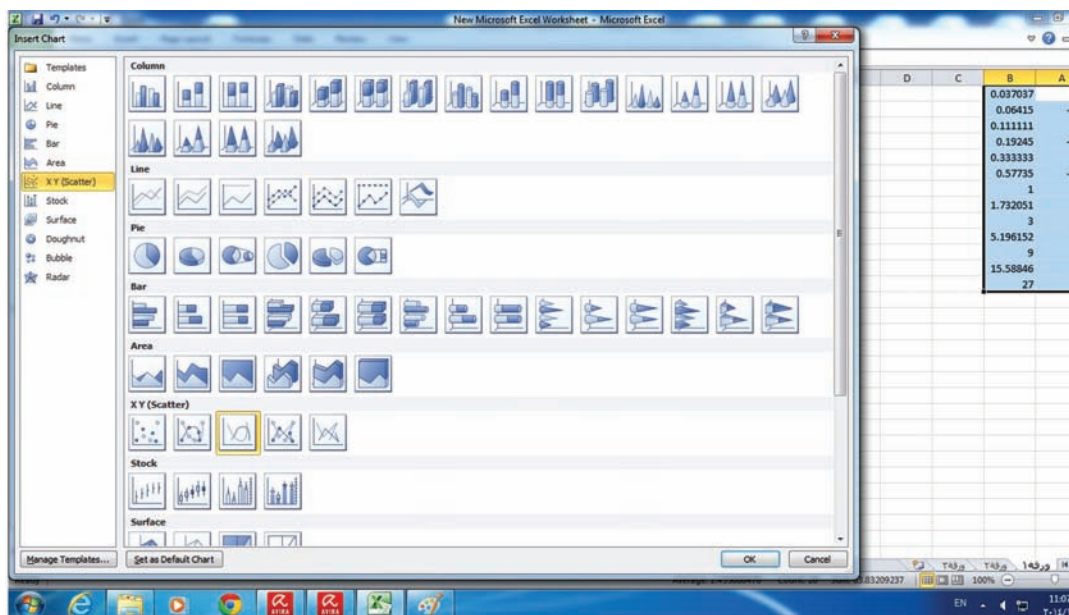
(٧) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبها ليظهر لك مجموعة صور قيم المتغير س كما في العمود B. كما في الشكل (٥-١٦).



C	B	A
	0	
	0.63093	
	1	
	1.26186	
	1.464974	
	1.63093	
	1.771244	
	1.892789	
	2	

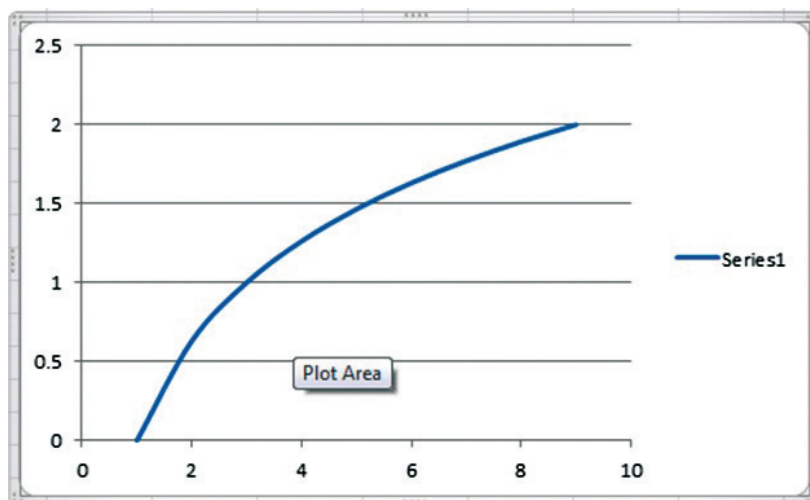
الشكل (٥-١٦).

(٨) ظلل العمودين A، B ثم اختر من تبوية إدراج مجموعة "مخططات" نوع المخطط (Line) ثم اختر من الأشكال الشكل س، ص مبعثر (XY-Scatter) ثم اختر نوع المنحنى كما في الشكل (٥-١٧).



الشكل (٥-١٧).

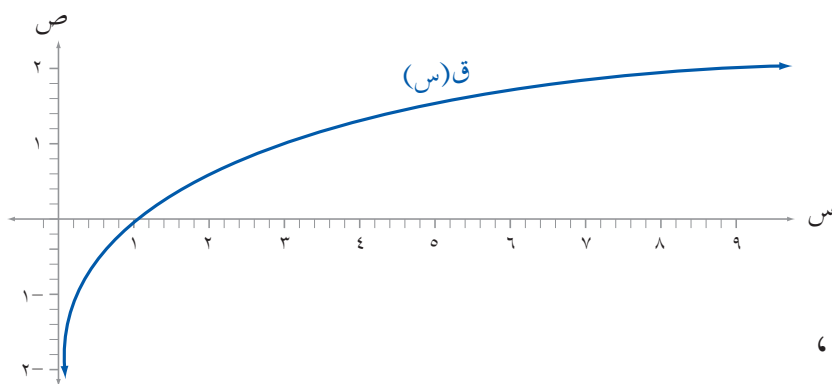
٩) اختر (موافق) ليظهر لك رسم الاقتران ق(س) = لو س كما في الشكل (٥-١٨).



الشكل (٥-١٨).

ويمكن رسم الاقتران يدويًا، من خلال تكوين الجدول الآتي:

س	٩	٣	١	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
ق(س)	٢	١	٠	١-	٢-



الشكل (٥-١٩).

$$ق(٩) = لو ٩ = ٢$$

$$ق(٣) = لو ٣ = ١$$

$$ق(١) = لو ١ = ٠$$

$$ق\left(\frac{1}{3}\right) = لو\left(\frac{1}{3}\right) = ١-$$

$$ق\left(\frac{1}{9}\right) = لو\left(\frac{1}{9}\right) = ٢-$$

نعين مجموعة النقط (س، ص) من الجدول في المستوى البياني، ونصل بين النقط بخطّ منحنٍ أملس لينتج الشكل (٥-١٩).

إذا كان $ق(س) = ل_٢(س)$ ، ارسم منحنى الاقتران $ق$ ، وقارنه مع منحنى الاقتران $ل(س) = ٢س$

الحل

نكوّن جدولاً كما يأتي:

س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤
لو _٢ س	٢-	١-	٠	١	٢

$$ق\left(\frac{1}{4}\right) = ل_٢\left(\frac{1}{4}\right) = ٢- \quad ق\left(\frac{1}{2}\right) = ل_٢\left(\frac{1}{2}\right) = ١-$$

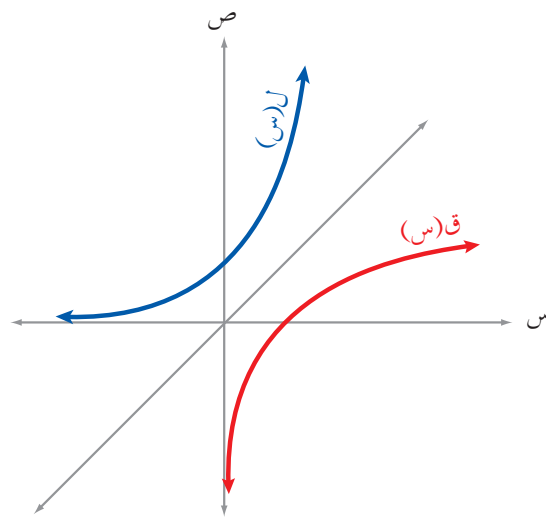
$$ق(١) = ل_٢(١) = ٠ \quad ق(٢) = ل_٢(٢) = ١$$

$$ق(٤) = ل_٢(٤) = ٢$$

بطريقة مماثلة يمكن الحصول على مجموعة نقاط تقع على منحنى $ل$ ، كما يتضح في الجدول الآتي:

س	٢-	١-	٠	١	٢
٢س	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	١	٢	٤

ونقوم بتمثيل الاقترانين على مستوى بياني واحد كما هو موضح في الشكل (٥-٢٠).



الشكل (٥-٢٠).

يبين الشكل (٥-٢٠) منحنى كل من

ق(س) = لو_٢(س)، ل(س) = ٢س، نلاحظ أن المنحنيين انعكاس لبعضهما حول المستقيم ص=س، وهذا يشير إلى أن الاقتران اللوغاريتمي هو اقتران عكسي للاقتران الأسّي.

تعلم

(١) الاقتران العكسي للاقتران ق(س) = أس هو الاقتران ق^{-١}(س) = لو_٢س.
(٢) الاقتران العكسي للاقتران ل(س) = لو_٢س هو الاقتران ل^{-١}(س) = أس



بالاعتماد على منحنى ق(س) = لو_٢س، أجب عن الأسئلة الآتية

مع التبرير:

- (١) ما مجال الاقتران ق؟
- (٢) ما مدى الاقتران ق؟
- (٣) ما المقطع السيني للاقتران ق؟
- (٤) ما المقطع الصادي للاقتران ق؟
- (٥) هل الاقتران ق متزايد أم متناقص؟
- (٦) هل الاقتران ق واحد لواحد؟

تدريب (٤)

إذا كان ق(س) = لو_٣س، فارسم منحنى الاقتران ق.

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = لو_٣س، فارسم منحنى الاقتران ق.

الحل

$$ق\left(\frac{1}{9}\right) = لو_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\right) = 2$$

$$ق\left(\frac{1}{3}\right) = لو_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

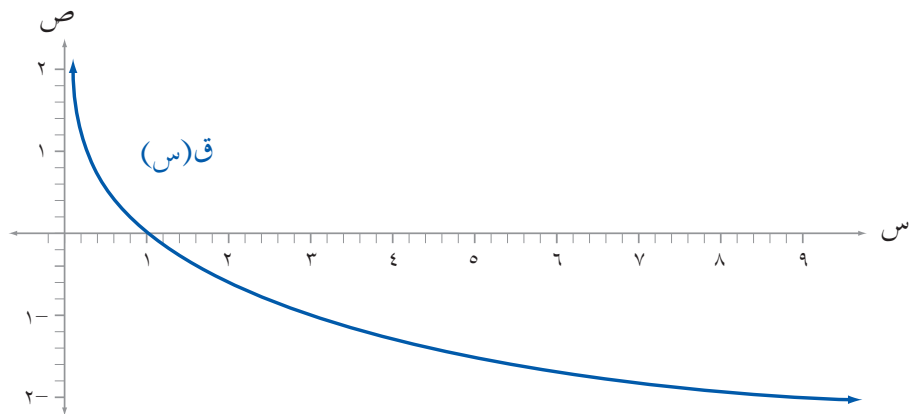
$$ق(١) = لو_{\frac{1}{3}}(١) = ٠$$

$$ق(٣) = لو_{\frac{1}{3}}(٣) = ١ -$$

$$ق(٩) = لو_{\frac{1}{3}}(٩) = ٢ -$$

٩	٣	١	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	س
٢ -	١ -	٠	١	٢	لو_{\frac{1}{3}}س

نعين النقاط على المستوى الديكارتي ثم نصل بينها بخط منحنٍ أملس فيظهر الشكل (٥-٢١).



الشكل (٥-٢١).



اعتمادًا على منحنى الاقتران ق(س) = لو_{\frac{1}{3}}س

(١) جد مجال الاقتران ق.

(٢) جد مدى الاقتران ق.

(٣) هل الاقتران ق متزايد أم متناقص؟ لماذا؟

(٤) هل الاقتران ق واحد لواحد؟

لاحظ أنه إذا كان $Q(s) = L(s)$ فإن:

- (١) مجال Q : $H +$
- (٢) مدى Q : H
- (٣) يقطع Q محور السينات عند النقطة $(١, ٠)$.
- (٤) لا يقطع Q محور الصادات.
- (٥) يكون متزايداً عندما $١ < s$ ، ويكون متناقصاً عندما $٠ < s < ١$
- (٦) الاقتران Q واحد لواحد.

تدريب (٥)

إذا كان $Q(s) = L(s-٢)$ ، جد مجال Q ثم ارسم منحناه.

مثال (٧)

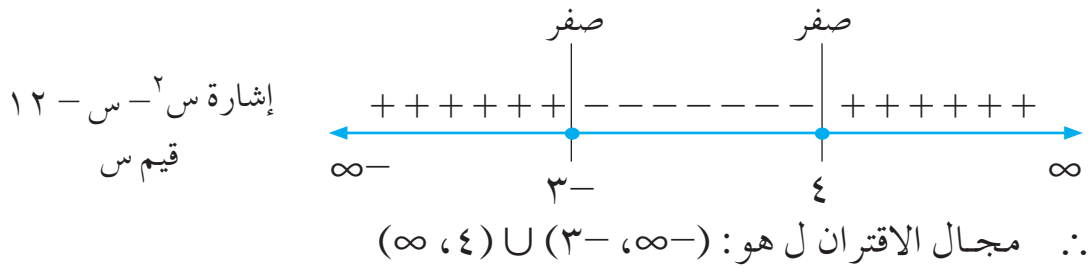
جد المجال لكل من الاقترانات الآتية:

- (١) $Q(s) = L(s+١)$
- (٢) $L(s) = L(s-٢-s-١٢)$
- (٣) $K(s) = L(s-١٦)$
- (٤) $M(s) = L(s+٦-s-٢)$

الحل

- (١) مجال الاقتران Q هو مجموعة حل المتباينة $s+١ < ٠$ وهي مجموعة الأعداد الحقيقية
(ناقش ذلك مع معلمك)

- (٢) مجال الاقتران L هو مجموعة حل المتباينة $s-٢-s-١٢ < ٠$
(تحليل العبارة التربيعية الى العوامل)
 $(s-٤)(s+٣) < ٠$
 $٣-، ٤$ هي جذور المعادلة التربيعية: $s-٢-s-١٢ = ٠$
نحدّد الجذور على خط الأعداد، ونبحث الإشارة لتحديد فترات المجال كما يأتي:

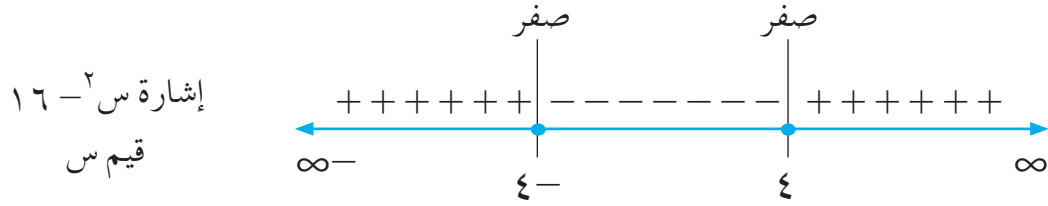


(٣) مجال الاقتران ك(س) = لـ $(s^2 - 16)$ هو مجموعة حل المتباينة:
 $s^2 - 16 < 0$

(تحليل العبارة التربيعية الى العوامل)

$$(s-4)(s+4) < 0$$

$s = 4, -4$ هي جذور المعادلة التربيعية $s^2 - 16 = 0$



∴ مجموعة حل المتباينة $s^2 - 16 < 0$ هي:

$$(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

∴ مجال الاقتران ك(س) هو: $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$

(٤) مجال الاقتران م(س) = لـ $(s^2 - s + 6)$ هو مجموعة حل المتباينة:

$$s^2 - s + 6 < 0$$

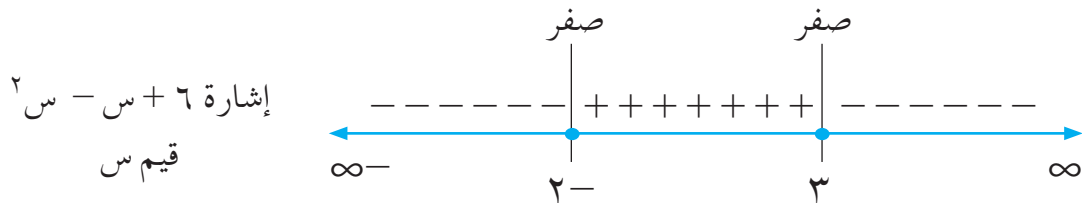
(بضرب طرفي المتباينة بالعدد -١)

$$s^2 - s + 6 > 0$$

(تحليل العبارة التربيعية إلى العوامل)

$$(s-3)(s+2) > 0$$

$s = 3, -2$ هي جذور المعادلة التربيعية $s^2 - s + 6 = 0$



مجموعة حل المتباينة $s^2 - s - 6 > 0$ هي الفترة: $(-2, 3)$
 $\therefore$ مجال الاقتران م هو: $(-2, 3)$

تدريب (٦)

جد مجال كل من الاقتران الآتية:

$$\begin{aligned} (1) \quad q(s) = \log_4(s^2 + 11) \quad (2) \quad l(s) = \log_7(s^2 + s - 12) \\ (3) \quad k(s) = \log_5(s^2 - 9) \quad (4) \quad m(s) = 1 + \log_4(s - 2) \end{aligned}$$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

هنالك اقتران لوغاريتمية يكثر استخدامها مثل اقتران اللوغاريتم الطبيعي الذي يرمز له بالرمز $q(s) = \log_e s$ ، حيث e (العدد الناييري) ويرمز لاقتران اللوغاريتم الطبيعي في الآلة الحاسبة بالرمز $(\ln)$.

مثال (٨)

باستخدام الآلة الحاسبة احسب قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \log_e 5 \quad (2) \log_e 0.7 \quad (3) \log_e 0.0001$$

الحل

$$(1) \text{ باستخدام الآلة الحاسبة } \log_e 5 = 1.60943$$

الجدول الآتي يمثل حل الفرعين (٢)، (٣) باستخدام الآلة الحاسبة

العدد	الإجراءات	النتيجة
$\log_e 0.7$	$\ln 0.7$	-0.356674
$\log_e 0.0001$	$\ln 0.0001$	-9.210340

تدريب (٧)

باستخدام الآلة الحاسبة احسب قيمة كل مما يأتي :

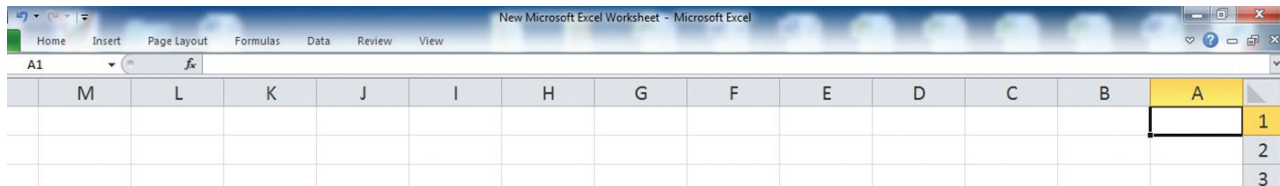
(١) $\frac{2}{3}$ لو_٣ (٢) $\frac{1}{8}$ لو_٨ (٣) $\frac{1}{4000}$ لو_٤

مثال (٩)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = لوس بالفترة [١، ٩] باستخدام برمجية إكسل.

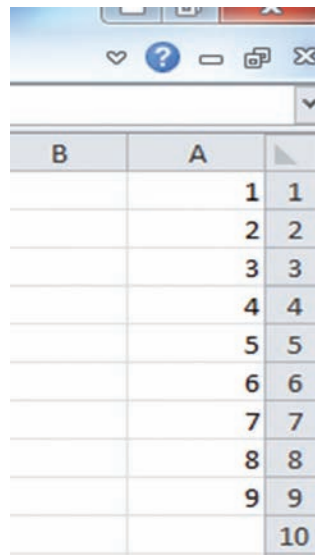
الحل

(١) شغل برمجية إكسل (Excel)، تظهر لك نافذة اكسل كما في الشكل (٥-٢٢):



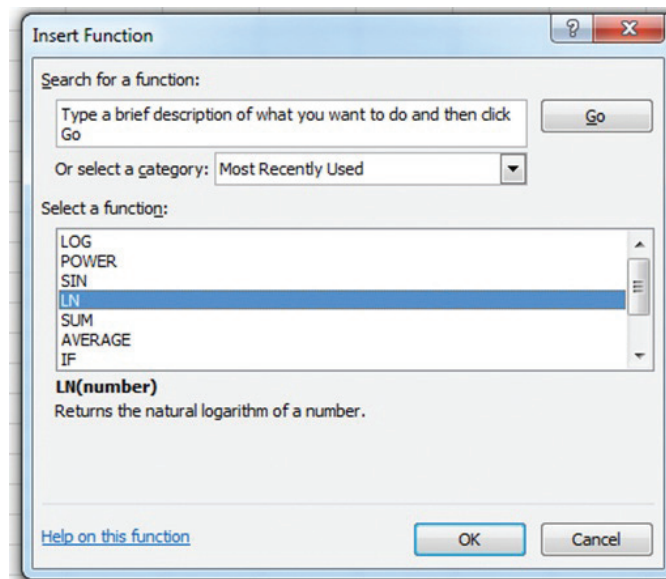
الشكل (٥-٢٢).

(٢) اختر عمودًا وليكن A، وضع المؤشر في الخلية A1 اكتب القيمة الأولى للمتغير س وهي (١)، ثم نضع المؤشر في الخلية A2 واكتب القيمة الثانية وهي للمتغير س وهي (٢). ثم ظلل الخليتين ثم اسحب المؤشر للأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير كما في الشكل (٥-٢٣).



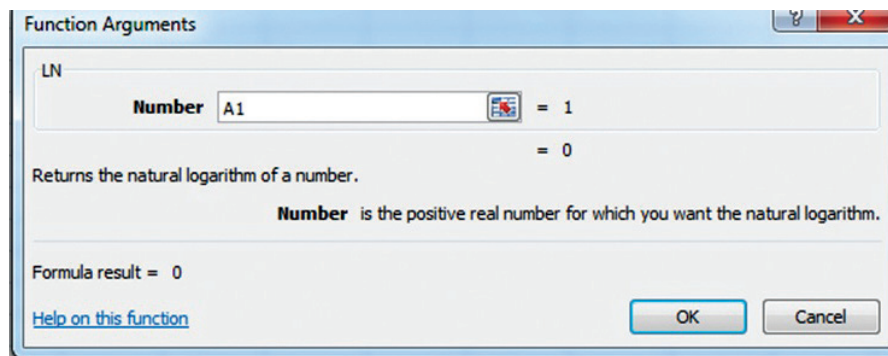
الشكل (٥-٢٣).

٣) ضع المؤشر في الخلية (B1). ومن تبويبة الصيغ (Formulas)، اختر أداة إدراج دالة فيظهر لك حوار إدراج كما في الشكل (٥-٢٤).



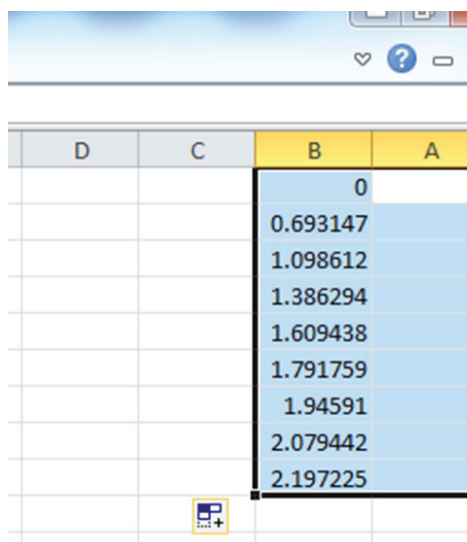
الشكل (٥-٢٤).

٤) اختر الدالة (LN) وانقر على موافق، يظهر لك صندوق حوار الدالة، ثم اكتب أساس الاقتران ق في مستطيل (Base) واكتب A1 كما في الشكل (٥-٢٥).



الشكل (٥-٢٥).

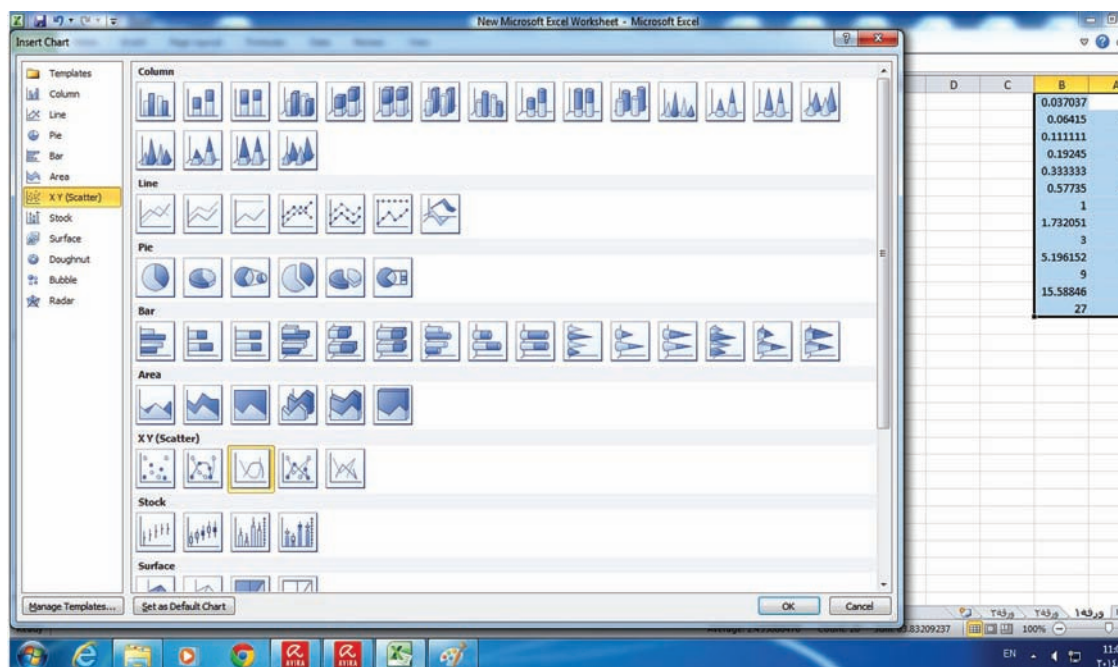
٥) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبتها ليظهر لك مجموعة صور قيم المتغير س كما في العمود B. كما في الشكل (٥-٢٦).



D	C	B	A
		0	
		0.693147	
		1.098612	
		1.386294	
		1.609438	
		1.791759	
		1.94591	
		2.079442	
		2.197225	

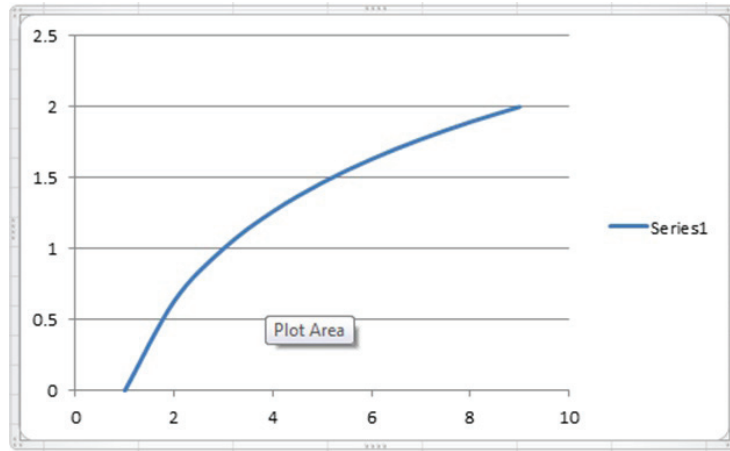
الشكل (٥-٢٦).

٦) ظلل العمودين B، A ثم اختر من تبوية إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط (Line) ثم اختر من الأشكال الشكل س، ص مبعثر (XY-Scatter) ثم اختر نوع المنحني كما في الشكل (٥-٢٧).



الشكل (٥-٢٧).

٧) اختر (موافق) ليظهر لك رسم منحنى الاقتران ق(س) = ل_٣س كما في الشكل (٢-٢٨).



الشكل (٢-٢٨).

تدريب (٨)

استخدم برمجية إكسل في رسم منحنى كل من الاقترانين: ق(س) = ل_٣س
ل(س) = ه_٣س ، وذلك على مستوى بياني واحد.

ومن اللوغاريتمات المستخدمة اللوغاريتمات ذات الأساس ١٠ ، وتسمى **اللوغاريتمات العادية**، وتكتب اختصاراً دون أساس مثل لو٨ وتعني لوغاريتم العدد ٨ للأساس ١٠ ، ويرمز لها في الآلة الحاسبة بالرمز: $\log$

مثال (١٠)

مستخدمًا الآلة الحاسبة، جد قيمة كل مما يأتي:

- (١) لو١٢ (٢) لو٣,٦ (٣) لو٠,٧

الحل

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن:

(١) $\log 12 = 1,07$

(٢) $\log 3,6 = 0,55$

(٣) $\log 0,7 = -0,15$

تمارين و مسائل

- (١) اكتب كل من الصيغ الآتية بصورة لوغاريتمية:
 أ ($9 = 3^2$)
 ب ($16 = 4^{-1}$)
 ج ($س = 2^{-2}$)
 د ($أ = 1^{+1}$)
- (٢) اكتب كل من الصيغ اللوغاريتمية الآتية بصورة أسية:
 أ ($لوس = 3$)
 ب ($لوس = 243$)
 ج ($لوس = (\frac{16}{125})^4$)
 د ($لوس = 2$)
- (٣) جد مجال الاقتران ق(س) = $لوس(س+1)$ ثم ارسم منحناه.
- (٤) إذا كان هـ(س) = $2 + لوس(س)$ ، ارسم منحنى الاقتران هـ باستخدام برمجية إكسل.
- (٥) أثبت أن $لوس(لوس) = ٠$.
- (٦) إذا كان ق(س) = $لوس(س-١)$ فجد ما يأتي:
 أ (مجال الاقتران ق.
 ب (مدى الاقتران ق.
 ج (هل يُعدُّ الاقتران ق متزايداً أم متناقصاً؟
 د (حدد نقطة تقاطع الاقتران ق مع محور السينات.
- (٧) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم الآتية:
 أ ($لوس 24$)
 ب ($لوس(٠,٠٠٢٢)$)
 ج ($لوس(\frac{3}{7})$)
- (٨) إذا كان ق = $\{(٠, ١), (١, ١٠), (٢, ١٠٠), (٣, ١٠٠٠)\}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق.
- (٩) إذا كان ق(س) = $لوس(س^3 + ٣)$ ، فما مجال الاقتران ق؟

(١٠) جد قيمة كل مما يأتي:

أ (لو_٣(٢٤٣)^٤

ب (لو_٥(١٢٥)

ج (لو_{١١}(١٢١)

د (لو_٢(لو_٢(لو_٢(١٦)))

(١١) كرة حجمها ١,٦٠٨ دسم^٣، احسب مساحة سطح الكرة مستخدماً اللوغاريتمات.

(١٢) ارسم منحنى الاقتران ق(س) = لو_٥(س + ١) مستخدماً برمجية إكسل.

(١٣) إذا كان ق(س) = لو_٢س ، فجد قاعدة ق^{-١} ثم أثبت أن:

أ (ق(٥ ق^{-١}(س)) = س

ب (ق(ق^{-١}(٥ ق(س))) = س

(١٤) إذا كان ق(س) = ٣(٢)^{س-١} ، جد ق^{-١}(س)

(١٥) إذا كان ق(س) = ٣(٢)^{س+١} ، جد ق^{-١}(٥)

من خلال دراستك السابقة للاقتران ق(س) = $\log_s$ حيث $s \neq 1$ ، $s > 0$ أجب عن الآتي:

(١) ما قيمة $\log_s s$ ؟

(٢) ما قيمة $\log_s 1$ ؟

تعلمت سابقًا أن ق(س) = $\log_s$ هو اقتران واحد لواحد وهذا يعني أن:

$\log_s s = 1$ وإذا فقط إذا كان $s = 1$.

وبما أن $1 = \log_s s$ فإن $\log_s 1 = 0$ ، وأيضا بما أن $1 = \log_s s$ فإن $\log_s 1 = 0$.

هل هناك قوانين أخرى للوغاريتمات؟



جد قيمة المقادير العددية الآتية:

$$(١) \log_2 8 + \log_2 4$$

$$(٣) \log_3 9 + \log_3 27$$

ماذا تلاحظ؟

قانون (١)

إذا كانت s ، s أعدادا حقيقية موجبة وكانت $s \neq 1$ فإن:

$$\log_s s + \log_s s = \log_s s$$

البرهان

افرض أن $\log_s s = n$

$$s = s^n$$

$$\log_s s = n$$

$$s = s^n$$

ومنه: $s = s^n \times s^l = s^{n+l}$

(التحويل إلى الصورة الأسية)

(التحويل إلى الصورة الأسية)

(قوانين الأسس)

بالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية :

$$\text{لوس} = \text{ص} + \text{ن} + \text{ل}$$

$$\text{لكن} \text{ن} = \text{لوس}$$

$$\text{ل} = \text{لوس}$$

$$\text{ومنه : لوس} = \text{لوس} + \text{لوس}$$



جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية :

$$(2) \text{لوس}$$

$$(1) \text{لوس} - \text{لوس}$$

$$(4) \text{لوس}$$

$$(3) \text{لوس} - \text{لوس}$$

ماذا تلاحظ؟

قانون (٢)

إذا كانت أ ، س ، ص أعدادًا حقيقية موجبة وكانت $1 \neq$ فإن :

$$\text{لوس} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لوس} - \text{لوس}$$

البرهان

$$\text{افرض أن} \text{س} = \text{أ}$$

(بالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية)

$$\text{م} = \text{لوس}$$

$$\text{ص} = \text{أ}$$

(بالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية)

$$\text{ل} = \text{لوس}$$

(قوانين الأسس)

$$\text{وبما أن : } \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{أ}}{\text{ل}} = \text{أ}^{-\text{م}}$$

(تعريف اللوغاريتم)

$$\text{لوس} = \text{م} - \text{ل}$$

$$\text{ومن هنا لوس} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لوس} - \text{لوس}$$



جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad 3 \times 4 & (2) \quad 4 \times 3 \\ (3) \quad 9 \times 2 & (4) \quad 2 \times 9 \\ \text{ماذا تلاحظ؟} \end{array}$$

قانون (٣)

إذا كانت أ ، س عددين حقيقيّين موجبين فإن :

$$س \times ن = ن \times س$$

البرهان

افرض أنّ $س = م$ ، ومنه : $أ = س$

ومنه : $س \times ن = (أ) \times ن$

$س \times ن = أ \times م$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ينتج أنّ :

$س \times ن = ن \times م$

ينتج أنّ : $س \times ن = ن \times س$

(رفع الطرفين للأس ن)

(قوانين الأسس)

(التعويض عن م)

مثال (١)

إذا كان $س = ٥$ ، $أ = ١٠٠٠$ ، $ن = ٢$ ، فجد قيمة كل مما يأتي :

$$(1) \quad ١٠ \times ٢ \quad (2) \quad ٢ \times ١٠$$

الحل

$$(1) \text{ لـ } 10 = \text{لـ } (2 \times 5)$$

(قوانين اللوغاريتمات)

$$\text{لـ } 5 + \text{لـ } 2 =$$

$$0,631 + 1,465 =$$

$$2,096 =$$

(تبسيط)

$$(2) \text{ لـ } 0,4 = \text{لـ } \frac{4}{10} = \text{لـ } \frac{2}{5}$$

(قوانين اللوغاريتمات)

$$\text{لـ } 2 - \text{لـ } 5 =$$

$$1,465 - 0,631 =$$

$$0,834 =$$

تدريب (1)

إذا كان $\text{لـ } 5 = 0,699$ ، $\text{لـ } 3 = 0,477$ فجد قيمة كل مما يأتي :

$$(1) \text{ لـ } 90 \quad (2) \text{ لـ } 0,6 \quad (3) \text{ لـ } 45$$

مثال (2)

إذا كان $\text{لـ } 2 = 0,6309$ فجد قيمة كل مما يأتي :

$$(1) \text{ لـ } 8 \quad (2) \text{ لـ } 9 \quad (3) \text{ لـ } 10 - \text{لـ } 5$$

الحل

(القانون 3)

$$(1) \text{ لـ } 8 = \text{لـ } 2^3 = 3 \times \text{لـ } 2$$

$$1,8927 = 0,6309 \times 3 =$$

(القانون 3)

$$(2) \text{ لـ } 9 = \text{لـ } 3^2 = 2 \times \text{لـ } 3$$

$$2 = 1 \times 2 =$$

(القانون 2)

$$(3) \text{ لـ } 10 - \text{لـ } 5 = \text{لـ } \frac{10}{5} =$$

$$0,6309 = \text{لـ } 2 =$$

(يمكنك استخدام الآلة الحاسبة للتحقق)

تدريب (٢)

إذا كان لو = ٥, ٦٩٩, ٠ ، لو = ٦, ٧٧٨٢, ٠ ، فجد كلاً من:

- (١) لو ٢٥ (٢) لو ٧٥ - لو ١٥ (٣) لو ٥٠
(٤) لو ٣٠ (٥) لو ٩٠٠ (٦) لو ١,٢ (٧) لو ٣٦

مثال (٣)

أثبت أن:

$$\text{لو} (ج^2 + ٧ج + ١٢) - \text{لو} (ج + ٣) - \sqrt{\text{لو} (ج + ٤)} = \frac{1}{٤} \text{ لو} (ج + ٤), \text{ حيث } ج < ٣$$

الحل

بما أن: لو (ج^2 + ٧ج + ١٢)

$$= \text{لو} (ج + ٣) (\text{لو} (ج + ٤))$$

(بالتحليل الى العوامل)

$$= \text{لو} (ج + ٣) + \text{لو} (ج + ٤)$$

(قوانين اللوغاريتمات)

$$\text{إذن الطرف الأيمن} = \text{لو} (ج^2 + ٧ج + ١٢) - \text{لو} (ج + ٣) - \sqrt{\text{لو} (ج + ٤)}$$

$$= \text{لو} (ج + ٣) + \text{لو} (ج + ٤) - \text{لو} (ج + ٣) - \sqrt{\text{لو} (ج + ٤)} \quad (\text{بالتعويض})$$

$$= \text{لو} (ج + ٤) - \sqrt{\text{لو} (ج + ٤)}$$

$$= \sqrt{\text{لو} (ج + ٤)} = \sqrt{\text{لو} (ج + ٤)}^{(\frac{1}{٢})}$$

(قوانين الأسس)

$$= \frac{1}{٢} \text{ لو} (ج + ٤)$$

$$= \text{الطرف الايسر}$$

تدريب (٣)

أثبت أن:

$$\frac{1}{٢} \text{ لو} (ج - ١) + \sqrt{\text{لو} (ج^2 + ج + ١)} = \sqrt{\text{لو} (ج^3 - ١)}, \text{ حيث } ج < ١$$

اكتب المقادير الآتية بأبسط صورة ممكنة:

$$(١) \quad ٢ \text{ لو } ٩ - \text{لو } ٢٧ - ٤ \text{ لو } \sqrt[٤]{٨١}$$

$$(٢) \quad ٣ \text{ لو } ٣ + \text{لو } ٤ - \text{لو } \sqrt[٢]{٢}$$

$$(٣) \quad \frac{١}{٣} (٢ \text{ لو } ٣ - \text{لو } ٣) + \frac{١}{٢} \text{ لو } ٤ \quad \text{حيث } ٤ < \text{صفر.}$$

الحل

$$(١) \quad ٢ \text{ لو } ٩ - \text{لو } ٢٧ - ٤ \text{ لو } \sqrt[٤]{٨١}$$

$$= ٢ \text{ لو } (٣) - \text{لو } ٣ - ٤ \text{ لو } (٨١)^{\frac{١}{٤}}$$

$$= ٤ \text{ لو } ٣ - ٣ \text{ لو } ٣ - ٤ \times \frac{١}{٤} \text{ لو } ٤٣$$

$$= ٤ - ٣ - ٤ =$$

$$= ٤ - ١ =$$

$$= ٣ - =$$

$$(٢) \quad ٣ \text{ لو } ٣ + \text{لو } ٤ - \text{لو } \sqrt[٢]{٢}$$

(قوانين اللوغاريتمات)

$$= \text{لو } (٣) + \text{لو } ٤ - \text{لو } \sqrt[٢]{٢}$$

$$= \text{لو } ٢٧ \times ٤ - \text{لو } \sqrt[٢]{٢} = \text{لو } ١٠٨ - \text{لو } \sqrt[٢]{٢}$$

(إنطاق مقام)

$$= \text{لو } (\sqrt[٢]{٢} \div ١٠٨)$$

(قوانين اللوغاريتمات)

$$= \text{لو } \sqrt[٢]{٥٤}$$

$$(٣) \quad \frac{١}{٣} (٢ \text{ لو } ٣ - \text{لو } ٣) + \frac{١}{٢} \text{ لو } ٤$$

$$= \frac{١}{٣} (\text{لو } ٣ - \text{لو } ٣) + \frac{١}{٢} \text{ لو } (٤) =$$

(قوانين اللوغاريتمات)

$$= \text{لو } ٢$$

مثال (۵)

أثبت أن $لو + ١١ - لو - ٣٠ = ٣٣ = ١$

الحل

$$\begin{aligned} 11 + 30 - 33 &= 33 - 30 + 11 \\ &= 30 - (30 \times 11) - 33 \\ &= 33 - 330 - 33 \\ &= \frac{330}{33} - 33 \\ &= 10 - 33 \\ &= -23 \end{aligned}$$

تدریب (۴)

بين أن $لو_{(أ-٨١)} - لو_{(أ+٣)} - لو_{(أ-٣)} = لو_{(أ+٩)}$ ، حيث $أ < ٣$

تعلم أن اللوغاريتمات الشائعة في الآلات الحاسبة هي العادية والطبيعية ، والقانون الآتي يساعدك على حساب اللوغاريتمات ذات الأساسات غير الشائعة.



جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية:

(١) لو_٢ ١٦ (٢) لو_٤ ١٦
(٣) لو_٩ ٨١ × لو_٣ ٩ (٤) لو_٣ ٨١
ماذا تلاحظ؟

قانون (٤)

إذا كانت $أ$ ، $ب$ ، $ج$ أعداداً حقيقية موجبة، وكان $أ \neq ١$ ، $ب \neq ١$ فإن:

$$\log ج \times \log أ = \log ج$$

ملاحظة: يمكن كتابة القانون السابق على الشكل:

$$\frac{\text{لوج}}{\text{لوا}} = \text{لوج}$$

البرهان

افرض أن: $\text{لوا} = \text{س}$ ، $\text{لوج} = \text{ص}$

بالتحويل إلى الصورة الأسية يكون:

$$\text{أ} = \text{ب}^{\text{س}}، \text{ج} = \text{أ}^{\text{ص}}$$

وبتعويض قيمة أ في ج ينتج أن:

$$\text{ج} = (\text{ب}^{\text{س}})^{\text{ص}} = \text{ب}^{\text{س} \times \text{ص}}$$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية:

$$\text{لوج} = \text{س} = \text{ص} = \text{لوا} \times \text{لوج}$$



فسر لماذا تم وضع شرط $\text{أ} \neq 1$ ، $\text{ب} \neq 1$ في القانون؟

مثال (٦)

احسب قيمة $\text{لوا}^9 \times \text{لوا}^2$

الحل

(القانون ٤)

$$\text{لوا}^9 \times \text{لوا}^2 = \text{لوا}^{\text{س}} = \text{لوا}^{\text{س}}$$

$$\text{لوا}^{\text{س}} = \text{لوا}^{\text{س}}$$

$$\text{لوا}^{\text{س}} = \text{لوا}^{\text{س}}$$

(قانون ٢)

$$\text{لوا}^{\text{س}} = \text{لوا}^{\text{س}}$$

تدريب (٥)

احسب قيمة $\text{لوا}^9 \times \text{لوا}^{16}$

مثال (٧)

احسب قيمة ل١٤

الحل

$$\frac{\text{ل١٤}}{\text{ل٥}} = \text{ل١٤} \text{ يمكنك أن تكتب ل١٤} = \text{ل٥}$$

(قانون ٤)

$$\text{ومنه ل١٤} = \frac{١,١٤}{٠,٦٩} = \text{ل١٤}$$

(باستخدام الآلة الحاسبة)

$$١,٦٥ = \frac{٣٨}{٢٣} =$$

تدريب (٦)

جد قيمة ل٩ باستخدام الآلة الحاسبة

مثال (٨)

احسب قيمة كل مما يأتي:

(٣) ل٥

(٢) ل٥

(١) ل٣

الحل

$$\frac{\text{ل٣}}{\text{ل٤}} = \text{ل٣} \text{ (١)}$$

$$١,٨٥ = \frac{٢,٥٦}{١,٣٨} =$$

(تقريبًا)

$$\frac{\text{ل٥}}{\text{ل٥}} = \text{ل٥} \text{ (٢)}$$

(تقريبًا)

$$١,٦ = \frac{١,٦}{١} =$$

(تقريبًا)

$$\text{ل٣} = \frac{\text{ل٥}}{\text{ل٥}} = \frac{١}{٠,٦٩} = ١,٤٥$$

مثال (٩)

احسب قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \text{ لو } ٧ \quad (٢) \text{ لو } (٧, ٤) \quad (٣) \text{ لو } (١, ٤)$$

الحل

$$(١) \text{ لو } ٧ = \frac{\text{لو } ٧}{\text{لو } ١٠}$$

$$٠,٨٢ = \frac{١,٩}{٢,٣} =$$

$$(٢) \text{ لو } (٧, ٤)$$

$$= \text{لو } \left(\frac{٧}{١٠}\right) = \text{لو } (٧٤) - \text{لو } (١٠)$$

$$٢ = ٢,٣ - ٤,٣ =$$

$$(٣) \text{ لو } (١, ٤) = \frac{\text{لو } ١,٤}{\text{لو } ٩}$$

$$= \frac{٠,٣٣}{٢,١} =$$

$$= \frac{١١}{٧٠} = ٠,١٥$$

(قوانين اللوغاريتمات)

(قوانين اللوغاريتمات)

(تقريبًا)

(باستعمال الآلة الحاسبة)

تدريب (٧)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ما يأتي :

$$(١) \text{ لو } ٢ \quad (٢) \text{ لو } ٥ \quad (٣) \text{ لو } \frac{١}{٢}$$

اكتب العبارة اللوغاريتمية الآتية على شكل لوغاريتم واحد:

$$\frac{1}{2} \log s - 3 \log(1+s), \quad \text{حيث } s < \text{صفر}$$

الحل

$$\frac{1}{2} \log s - 3 \log(1+s) = \log s^{\frac{1}{2}} - \log(1+s)^3 = \log \frac{s^{\frac{1}{2}}}{(1+s)^3}$$

تدريب (٨)

اكتب العبارة اللوغاريتمية الآتية على شكل لوغاريتم واحد:

$$2 \times \log(2+s) + \log s - \log s^2, \quad \text{حيث } s < \text{صفر}$$

تمارين و مسائل

- (١) عبر عن $لو٧٥$ بدلالة $لو٥$
- (٢) عبر عن $لو١٠٨$ بدلالة $لو٢$
- (٣) اكتب ما يأتي بأبسط صورة ممكنة:
 - أ ($٤لو٣ - لو٤$) $\div$ ($٣لو٩ - لو٨$) ، $٠ < ب$ ، $٠ \neq ب$ ١
 - ب ($لو٣ \times لو٤ \div لو٣$ حيث أ ، ب ، ج ، $٠ < ج$ ، أ ، ج $\neq ١$)
 - ٤ إذا كان $لو٥ = س$ ، $لو٤ = ص$ ، جد قيمة $لو٤٠٠$ بدلالة س ، ص .
 - ٥ أثبت أن: $لو١ = \frac{١}{لو٣}$ ، $٠ < أ$ ، $٠ < ب$ ، $٠ \neq أ$ ، $١ \neq ب$ ١
 - ٦ جد قيمة كل مما يأتي :
 - أ ($لو١٠ \times لو١٠$)
 - ب ($لو٦٤ \times لو٨$)
 - ج ($لو(لو٧٢٩)$)
 - د ($لو(لو٦٢٥)$)
 - هـ ($لو(لو١)$) ، حيث $٠ < أ$.
 - ٧ أثبت أن: $لو(أ \times ب \times ج) = لو١ + لو٢ + لو٣$ ، $٠ < أ$ ، $٠ < ب$ ، $٠ < ج$ ، ج $\neq ١$.
 - ٨ أثبت أن: $لو١ = \frac{١}{لو٣} - لو٣$ ، حيث $٠ < ب$.
 - ٩ إذا كان $لو٣ = ٤٧٧$ ، $لو٧ = ٨٤٥$ ، فجد قيمة كل مما يأتي:
 - أ ($لو١٤٧$) ب ($لو٦٣$) ج ($لو٢١٠$)

$$(١٠) \text{ أثبت أن : } \text{لو} \left(\frac{٧٢}{٣٤} \right) + \text{لو} \left(-\frac{١٧٠}{٧} \right) - \text{لو} \left(\frac{١٨}{٣٥} \right) = ٢$$

$$(١١) \text{ إذا كان } \text{لو} \text{أ} = ١,٦٥٤٣, \text{ لو} \text{ب} = ٣,٦٥٤٣, \text{ فجد قيمة } \text{لو} \text{أ} \text{ بدلالة } \text{لو} \text{ب}.$$

$$(١٢) \text{ يتزايد حجم مادة ح بمعدل } ٤\% \text{ في الساعة وفق العلاقة الآتية:}$$

$$\text{ح} = \text{ح} \cdot (١ + \text{ز})^{\text{ن}}, \text{ حيث ح: الحجم الأصلي، ز: معدل الزيادة في الحجم، ن: الزمن بالساعات، بعد كم ساعة يصبح حجم المادة أربعة أضعاف حجمها الأصلي.}$$

في أحد مختبرات العلوم الحياتية، توصل باحث إلى أنّ عدد البكتيريا يتزايد وفق العلاقة $E = E_0 \times (2)^n$ ، حيث (ن) عدد الساعات. فجد الزمن المتوقع ليصبح عدد البكتيريا (ع) ثلاثة أضعاف عددها الحالي (ع₀).

تعرفت سابقًا المعادلات الأسية وطريقة حلها، وستعرف في هذا الدرس المعادلات اللوغاريتمية وطريقة حلّها أيضًا.

تعريف

تسمى كل معادلة تتضمن مقدارًا لوغاريتميًا أو أكثر (معادلة لوغاريتمية).

فالمعادلات الآتية أمثلة على معادلات لوغاريتمية:

$$(1) \log_2(3 + 2s) = 3 \quad (2) \log_3(2s + 3) - \log_3(s) = 2$$

$$(3) \log_s 3 \times \log_s 5 = 3$$

ولحلّ المعادلة اللوغاريتمية نحول المعادلة من الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية.

مثال (١)

حلّ المعادلة اللوغاريتمية: $\log_2(3 + 2s) = 3$

(تعريف اللوغاريتم)

$$2^3 = (3 + 2s)$$

(تبسيط)

$$8 = 3 + 2s$$

$$5 = 2s$$

$$s = 2,5$$

مجموعة الحل هي: $\{2,5\}$

مثال (٢)

$$\text{حلّ المعادلة: } \text{لو}_3 (٢ - س) - \text{لو}_3 (س + ١) = ٢$$

الحل

$$\text{لو}_3 (٢ - س) - \text{لو}_3 (س + ١) = ٢$$

$$\text{لو}_3 \left(\frac{س - ٢}{س + ١} \right) = ٢$$

(قوانين اللوغاريتمات)

(تعريف اللوغاريتم)

$$٩ = ٢(٣) = \frac{س - ٢}{س + ١}$$

$$٩ = س - ٢$$

$$٩ + س = س - ٢$$

$$٧ = س - ١٠$$

$$س = ٧ - ١٠$$

مثال (٣)

$$\text{حلّ المعادلة } \text{لو}_3 س + \text{لو}_3 (س + ٢) = ٣$$

الحل

بتطبيق قوانين اللوغاريتمات نحصل على:

$$\text{لو}_3 (س(س + ٢)) = ٣$$

ثم نحول الى الصيغة الأسية

$$س(س + ٢) = ٢(٣)$$

$$س^٢ + ٢س = ٨$$

$$س^٢ + ٢س - ٨ = ٠$$

$$٠ = (س - ٢)(س + ٤)$$

إما $س + ٤ = ٠$ ومنها $س = -٤$ (تُهمل، لماذا؟)

(تعريف اللوغاريتم)

أو س - ٢ = ٠ ومنها س = ٢

مجموعة الحل هي: {٢}

تحقق من صحة الحل.

تدريب (١)

حلّ المعادلة الآتية: لو (٣ - س) - لو (س + ١) = ٢

مثال (٤)

يتكاثر نوع من الكائنات الدقيقة حسب العلاقة: ع = ع. (١ + ز)^ن، حيث ز : نسبة الزيادة في الساعة الواحدة، ن : عدد الساعات، ع = العدد الحالي، ع : العدد المتوقع بعد ن ساعة، إذا كانت نسبة الزيادة ٣٪، ما الوقت اللازم ليصل العدد الى ثلاثة أضعاف العدد الأصلي؟

الحل

$$ع = ع. (١ + ز)^ن$$

$$ع^٣ = ع. (١ + ٠,٠٣)^ن$$

$$٣ = (١ + ٠,٣)^ن$$

$$٣ = لو (١ + ٠,٣)^ن$$

$$٣ = ن لو (١ + ٠,٣)$$

$$ن = (٣ لو) ÷ (١ + ٠,٣)$$

$$٣٧ = ٠,٠١٣ ÷ ٠,٤٧٧ ساعة تقريبًا.$$

تدريب (٢)

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

وبعد أن تعرفت المعادلة اللوغاريتمية وطريقة حلّها ستتعرف المتطابقة اللوغاريتمية.

المتطابقة اللوغاريتمية: عبارة رياضية تتضمن مقدارًا لوغاريتميًا أو أكثر، وتكون صحيحة لجميع قيم المتغيّر فيها.

- يمكن إثبات المتطابقة بإحدى الطرق الآتية:
- (١) نبدأ بالطرف الأيمن للوصول للطرف الأيسر.
 - (٢) نبدأ بالطرف الأيسر للوصول للطرف الأيمن.
 - (٣) تبسيط الطرفين معًا للوصول إلى المقدار نفسه.

مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة الآتية:

$$\sqrt[n]{\frac{d}{s}} = \frac{d}{n} \sqrt[n]{s} \quad , \text{ حيث } s > 0$$

الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = \sqrt[n]{\frac{d}{s}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{d}{s}}$$

$$= \frac{d}{n} \sqrt[n]{s}$$

$$= \text{الطرف الأيسر}$$

(التحويل إلى الصيغة الأسية)

(تعريف اللوغاريتم)

مثال (٦)

$$\text{أثبت أن } 1 - \frac{\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{b} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{a}}{\log_2 \frac{1}{c}} = 1 \quad , \text{ حيث } b > 0, c > 0$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{b} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{a}}{\log_2 \frac{1}{c}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{b} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{a}}{\log_2 \frac{1}{c}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cancel{\text{لـو ب}} - \text{لـو ج} - \cancel{\text{لـو ب}}}{\text{لـو ج}} = \\
& \quad \frac{- \text{لـو ج}}{\text{لـو ج}} = 1 - = \\
& \text{الطرف الأيسر} =
\end{aligned}$$

مثال (٧)

أثبت أن:

$$\text{لـو ص}^2 - 2 \text{لـو (س ص)} + \text{لـو س}^2 = \text{صفرًا} , \text{ حيث } \text{س} < 0 , \text{ ص} < 0$$

الحل

$$\begin{aligned}
& \text{الطرف الأيمن} = \text{لـو ص}^2 - 2 \text{لـو (س ص)} + \text{لـو س}^2 \\
& = \text{لـو ص}^2 - 2 (\text{لـو س} + \text{لـو ص}) + \text{لـو س}^2 \\
& = \cancel{\text{لـو ص}^2} - \cancel{2 \text{لـو س}} - \cancel{2 \text{لـو ص}} + \cancel{\text{لـو س}^2} \\
& = \text{صفرًا} \\
& \text{الطرف الأيسر} =
\end{aligned}$$

مثال (٨)

أثبت أن: $\frac{1}{2} \sqrt{s^2 - 2} = \sqrt{s+2} + \sqrt{s-2}$ ، حيث $s < 2$.

الحل

الطرف الأيمن

$$= \sqrt{s+2} + \sqrt{s-2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{s+2} + \frac{1}{2} \sqrt{s-2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(s+2)(s-2)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - 2}$$

$$= \text{الطرف الأيسر.}$$

تدريب (٣)

أثبت صحة المتطابقة الآتية:

$$\sqrt{s+2} \sqrt{s-2} = (s+2)^2 - (s-2)^2 \quad , \quad s < 2$$

تمارين و مسائل

(١) حلّ كلّ المعادلات الآتية:

$$أ) \quad ٣ = ١ - (س - ١) - ١$$

$$ب) \quad ٢ = ١ + (س - ١) - ١$$

$$ج) \quad ١ = (١ + س) - (١ - س) - ١$$

$$د) \quad ٢٢ - ٣ = ٣٧ + ٥$$

$$هـ) \quad ٢٨ = ١ - ٧ - س$$

(٢) يتزايد عدد سكان مدينة بنسبة زيادة ٤٪ سنوياً وفقاً لعلاقة النمو والاضمحلال، بينما كانت نسبة الوفيات ١٪ سنوياً، حدد الوقت اللازم ليصبح عدد السكان مثلي العدد الحالي.

(٣) حلّ المعادلة الآتية: $٣س + ١٠ = (٢ - س) \cdot ٠$

(٤) تتناقص كتلة مادة مشعة مع مرور الزمن وفقاً للعلاقة:

$$ك = ك_٠ \times ١٠^{-٢٤}، \text{ حيث } ك_٠ : \text{ الكتلة الأصلية، } ك : \text{ الكتلة بعد مرور } ن \text{ ساعة.}$$

جد الزمن الذي تكون عنده الكتلة مساوية نصف الكتلة الأصلية.

(٥) ترتبط قوة زلزال (ق) على مقياس ريختر بالطاقة الناشئة (ش) مقاسة بالجول وفقاً للعلاقة

$$\text{الآتية: } ١٤,٤ + ١ = ٥,١ ق$$

جد مقدار الطاقة الناشئة عن زلزال قوته ٨,٢ على مقياس ريختر.

(٦) تحتاج كتلة من الراديوم تبلغ (٥٠) غ إلى (٥٦١٥) سنة لتصبح (٥) غرامات نتيجة للتحلل

الإشعاعي، فإذا كانت العلاقة بين الكتلة والزمن تعطى بالعلاقة:

$$ك = ك_٠ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{\frac{ن}{٥٦١٥}} \text{ حيث } ك_٠ : \text{ الكتلة الأصلية، } ك : \text{ الكتلة بعد مرور } ن \text{ سنة، } ج: \text{ عمر}$$

النصف لمادة الراديوم.

جد عمر النصف لمادة الراديوم.

٧) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

$$\text{أ) } \sqrt{s}(\sqrt{s}+1) - \sqrt{s}(\sqrt{s}+2) = \sqrt{s}+1, \quad s < 1$$

$$\text{ب) } \sqrt{s} + \sqrt{s}(\sqrt{s}+1) = \sqrt{s}(\sqrt{s}+5) + \sqrt{s}, \quad s < 0$$

$$\text{ج) } \sqrt{s}(\sqrt{s}-2) + \sqrt{s}(\sqrt{s}+2) + \sqrt{s}(\sqrt{s}+4) = \sqrt{s}(\sqrt{s}-16), \quad s < 2$$

$$\text{د) } \sqrt{s+1} + \sqrt{s-1} = \frac{\sqrt{s-1}}{2}, \quad 0 < s < 1$$

أسئلة الوحدة

(١) حول كلاً من الصيغ الأسية الآتية إلى الصيغة اللوغاريتمية:

$$(أ) \quad 125 = 5^3 \quad (ب) \quad 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

$$(ج) \quad 2^0 = 32 \quad (د) \quad 5^n = 32$$

(٢) حول كلاً من الصيغ اللوغاريتمية الآتية إلى الصيغة الأسية:

$$(أ) \quad \log_3 81 = 4 \quad (ب) \quad \log_5 1 = 0 \quad (ج) \quad \log_{\frac{1}{27}} \left(\frac{1}{27}\right) = 3$$

(٣) حل كلاً من المعادلات الآتية:

$$(أ) \quad 3^{-1} = \frac{1}{243} \quad (ب) \quad 2^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{س}$$

$$(ج) \quad \log_2 (س + 1) + \log_2 (س + 5) = 2 \quad (د) \quad \log_3 س - \log_3 (س - 1) = 2$$

$$(هـ) \quad \log_6 (\log_3 س) = 0 \quad (و) \quad \log_4 (\log_3 س) = 1$$

(٤) جد المجال والمقطع الصادي للاقتراح المعطى بالقاعدة الآتية:

$$ق(س) = 2 + هـ^{-س}$$

(٥) باستخدام الآلة الحاسبة جد :

$$(أ) \quad \log 4,372 \quad (ب) \quad \log 0,874 \quad (ج) \quad هـ^{1,2}$$

(٦) ارسم منحنى كل من الاقترانات الآتية:

$$(أ) \quad ص = 3 - 2هـ^س \quad (ب) \quad ص = 2 + \log_3 س$$

$$(ج) \quad ق(س) = -4 + \log_5 هـ \quad (د) \quad ك(س) = (2)^{س-3}$$

(٧) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية.

$$(أ) \quad \text{لو}(\text{ج}^2 + 7\text{ج} + 10) - \text{لو}((\text{ج} + 2) \times \sqrt{\text{ج} + 5})$$

$$= \frac{1}{2} \text{لو}(\text{ج} + 5), \text{ حيث } \text{ج} < 2$$

$$(ب) \quad \frac{1}{3} \text{لو}(\text{ج} - 1) + \text{لو} \sqrt{\text{ج}^2 + \text{ج} + 1} = \text{لو} \sqrt{\text{ج}^3 - 1}, \text{ حيث } \text{ج} < 1$$

(٨) جد قيمة كل مما يأتي:

$$(أ) \quad \frac{1}{2} \text{لو} 8 \quad (ب) \quad \text{لو}((16)(\sqrt{2}))$$

$$(ج) \quad \text{لو} 3 \times \frac{1}{2} \text{لو} \frac{1}{5} \quad (د) \quad (\text{لو} 30 - \text{لو} 5) \times \text{لو} \frac{1}{4}$$

$$(هـ) \quad \frac{\text{لو} 32 - \text{لو} 64}{\text{لو} 8} \quad (و) \quad \text{لو} 49 \times \text{لو} 4 \times \text{لو} 16$$

(٩) اكتب العبارات اللوغاريتمية الآتية على شكل لوغاريتم واحد:

$$(أ) \quad -\text{لو} 5 - \frac{1}{4} \text{لو} 5^{-1} \times \text{لو} \sqrt{3} + \text{لو}(5 + 1), \text{ حيث } 5 < \text{صفر}$$

$$(ب) \quad 2 \text{لو} 9 - \text{لو} 15 + \frac{1}{2} \text{لو} 12 + \text{لو}(\sqrt{5})^2$$

$$(١٠) \quad \text{إذا كان } \text{لو} 5 = 0.699, \text{ } \text{لو} 9 = 0.9542,$$

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(أ) \quad \frac{1}{3} \text{لو} 2 \quad (ب) \quad \text{لو} 6, \quad (ج) \quad \text{لو} 2, \quad (د) \quad \text{لو} \sqrt[3]{3}$$

(١١) جد قيمة كل مما يأتي:

$$(أ) \quad \text{لو} \sqrt{5} + \text{لو} \sqrt{2}$$

$$(ب) \quad \text{لو} \sqrt[3]{3} \times \text{لو} \sqrt[4]{5} \times \text{لو} 81$$

$$\begin{array}{r} \text{لـ}^{\circ} ٢ + \text{لـ}^{\circ} ٤ \\ \hline \text{لـ}^{\circ} ٤ + \text{لـ}^{\circ} ١٦ \end{array} \quad \text{جـ)}$$

(١٢) حُلّ كلاً من المعادلات الآتية:

$$\text{أ) } \text{لـ}^{\circ} (٢\text{س} - ٣) \times \text{لـ}^{\circ} ٥ = ٤$$

$$\text{ب) } ٢\text{لـ}^{\circ} (٣ - ١٩) = ٦$$

$$\text{جـ) } \text{لـ}^{\circ} (\text{لـ}^{\circ} ٢) = ١$$

$$\text{د) } \text{لـ}^{\circ} \text{س}^{\circ} ٢ + \text{لـ}^{\circ} \text{س}^{\circ} ٢ = ٨$$

(١٣) اكتشف العلماء أنّ المادة تتحول إلى طاقة، والمعادلة التي اكتشفها (آينشتاين) للعلاقة بين الطاقة ط، وكتلة المادة ك هي: $\text{ط} = \text{ك} \times (\text{ع}^{\circ})^2$ حيث ك: الكتلة بالكيلو غرام، ع° : سرعة الضوء $= ٣,٩٩ \times ١٠^8 \text{ م / ث}$ ، وعندها تكون الطاقة المقدرة بالجول، جد الطاقة التي تعادل إلكترونًا واحدًا، (كتلة الإلكترون هي: $٩ \times ١٠^{-٣١} \text{ كغ}$).

(١٤) أيّ الاقترانات الآتية يكون متزايدًا وأيّها يكون متناقصًا؟

$$\text{أ) } \text{ق}(\text{س}) = ١٠٠ \left(\frac{٥}{٢}\right)^{\text{س}}$$

$$\text{ب) } \text{ق}(\text{س}) = ٨ \times ٠,٠٥^{\text{س}}$$

$$\text{جـ) } \text{ق}(\text{س}) = ١٥٥ \times \frac{١}{٢}^{\text{س}}$$

١٥) إذا كانت العلاقة التي تربط قوة الزلزال بالطاقة الناتجة عنه هي :

$$ق = \frac{ط}{\frac{٢}{٣} ١١,٨١٠}$$

حيث ق : قوة الزلزال بالدرجة، ط : الطاقة الناتجة عن الزلزال .

احسب كمية الطاقة الناتجة عن زلزال قوته ٨,١ وحدة على مقياس ريختر .

١٦) تتحلل مادة مشعة وفق العلاقة $ت = ت_0 \times (٠.٢٣٨)^{\frac{ن}{١٠٠}}$ ، حيث ت : الكمية الابتدائية

بالغرام، ت : الكمية المتبقية بالغرام، ن : الزمن (السنوات)، كم يصبح الجزء المتبقي

من المادة بعد ٢٥ سنة، علماً أنّ $ت = ٤٠$ غم؟

١٧) وجد عالم مخطوطة، وادّعى أنّ عمرها (٢٠٠٠) سنة، إذا كانت المخطوطة تحتوي

على ٧٨٪ من الكربون الأصلي (الكربون ١٤)، بيّن فيما إذا كان ادّعاء العالم صحيح

علماً بأن الكربون يتحلل حسب العلاقة $ع(ت) = ع_0 \times (٠.٥)^{\frac{ت}{٥٠٠٠}}$

حيث ت : الزمن بالسنوات، ع : الكمية قبل التحلل.

١٨) صف متى يكون الاقتران $ق(س) = أ \times (ب)^{\frac{١}{٣}}$ خطاً مستقيماً أفقيّاً.

١٩) يتكون هذا السؤال من سبع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة

بدائل، واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) قيمة $٢٤٣^{\frac{١}{٥}}$ تساوي :

أ (٧) ب (٣)

ج (٣) د (٧)

(٢) قيمة لـ $\frac{81}{16}$ تساوي:

أ ($\frac{2-}{9}$) ب (٤)

ج ($\frac{4}{9}$) د (٤ -)

(٣) مجال الاقتران المعطى بالقاعدة ق(س) = لـ (٢ - س) يساوي:

أ ($(2, \infty-)$) ب {٢}

ج ($[2, \infty-)$) د ($(\infty, 2)$)

(٤) مدى الاقتران المعطى بالقاعدة ق(س) = $3 - s^3$ يساوي:

أ ($(\infty, 1)$) ب ($(0, \infty-)$)

ج ($(\infty, 0)$) د ($(1, \infty-)$)

(٥) قيمة س التي تحقق المعادلة $3 - \sqrt{s} = 1$:

أ (١) ب (٢)

ج (١ -) د (٤)

(٦) نقطة تقاطع المنحنى $s - 3s^2 = 0$ مع محور الصادات:

أ ($(3, 0)$) ب ($(2, 0)$)

ج ($(0, 9)$) د ($(9, 0)$)

* (٧) إذا كان لـ $\frac{1}{3} = 2$ ، فإن لـ 32 يساوي:

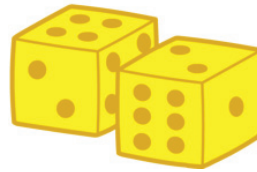
أ (٢) ب (٥)

ج ($\frac{3}{5}$ -) د ($\frac{5}{3}$)

* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية

العدُّ مهارة أساسية نحتاج إليها في مجالات الحياة المختلفة، ويعتمد الإحصاء على طرق العد في اختيار العينات التي يحللها ومن خلالها يصدر بعض النتائج، فمثلاً إذا أراد مرشّح في الانتخابات النيابية أن يعرف فرص نجاحه فهو يعتمد على جمع البيانات وتحليلها، وكذلك الأمر بالنسبة للطبيب الذي يرغب في معرفة مدى انتشار مرض معين، والمزارع الذي يرغب في معرفة مدى نجاح زراعة نوع معين من النباتات.

تعتمد طريقة العد التي نستخدمها على طبيعة الموقف، فطريقة العد التي نتبعها عندما يكون التكرار مسموحاً به تختلف عن طريقة العد التي نتبعها عندما لا يكون التكرار مسموحاً به، سنتعرض في هذه الوحدة إلى مبدأ العد الأساسي و مضروب العدد الصحيح والتباديل و التوافيق.



Counting Methods

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على:

- التعرف إلى مبدأ العد الأساسي.
- استخدام مبدأ العد الأساسي في حلّ مسائل حياتية.
- استقصاء التباديل والتوافيق ومضروب العدد الصحيح غير السالب.
- حلّ مسائل حياتية، باستخدام التباديل والتوافيق.

النتائج

- تتعرف مبدأ العد.
- تستخدم مبدأ العد في حلّ مسائل حياتية.

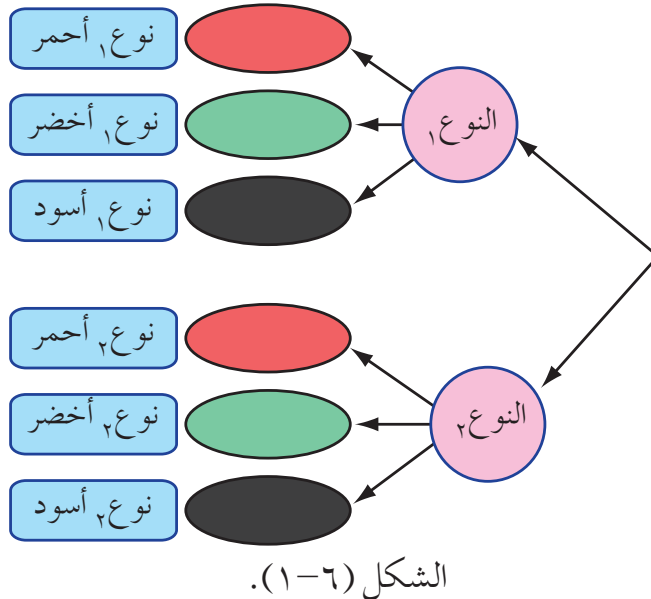


أمام فتاة صحن فيه بسكويت يحتوي على عشرين قطعة، اثنتا عشرة قطعة طرية والباقي قاسية، كم عدد الطرق التي تستطيع من خلالها هذه الفتاة اختيار ثلاث قطع بسكويت بحيث يُوجد قطعتان قاسيتان وواحدة طرية؟

مثال (١)

يريد محمد شراء سيارة وعندما ذهب إلى معرض السيارات وجد نوعين من السيارات و كل منهما بثلاثة ألوان (أسود، أحمر وأخضر)، بكم طريقة يمكن لمحمد اختيار سيارة؟

الحل



لايجاد عدد الطرائق سيتم الاختيار على مرحلتين، المرحلة الأولى اختيار نوع السيارة وتتم بطريقتين، والمرحلة الثانية اختيار اللون وتتم بثلاث طرائق وبحسب طريقة الشجرة

الموضحة في الشكل (٦-١) يصبح عدد الطرائق التي من خلالها يمكن لمحمد اختيار السيارة بها هو ٦ طرق، ويمكن كتابة

الاختيارات على الشكل {النوع ١ أحمر، النوع ١ أخضر، النوع ١ أسود، النوع ٢ أحمر، النوع ٢ أخضر، النوع ٢ أسود}. لكن هذه الطريقة تكون صعبة لو كان عدد المراحل أكثر.

لاحظ أن الاختيار تم على مرحلتين المرحلة الأولى ولها طريقتان و المرحلة الثانية لها ثلاث طرائق، وعليه يكون عدد الطرائق هو: $2 \times 3 = 6$ طرائق وهو نفسه عدد فروع الشجرة في الرسم.

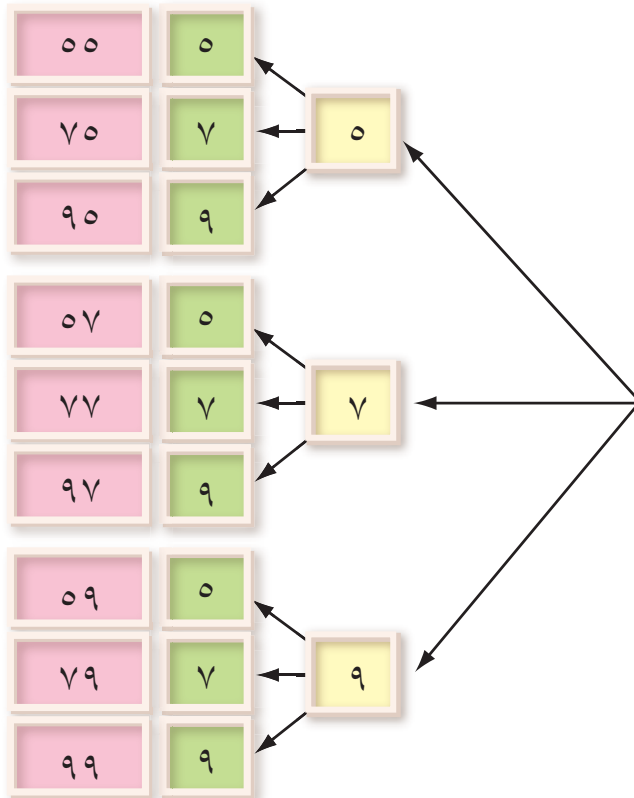
مثال (٢)

كم عددًا مكوّنًا من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام $\{5, 7, 9\}$ ؟

الحل

بما أن المطلوب تكوين أعداد فإن التكرار مسموح أي أننا نستطيع اختيار منزلة الآحاد واختيار منزلة العشرات بثلاث طرائق، وبذلك تكون الخيارات كما هو موضح في الشكل (٦-٢)، وبعد فروع الشجرة يكون عدد الأعداد هو ٩.

لكن إذا ضربنا عدد اختيارات منزلة الآحاد بعدد اختيارات منزلة العشرات ينتج: $3 \times 3 = 9$.



الشكل (٦-٢).



ماذا سيكون الناتج في المثال (٢) إذا كان تكرار الرقم في المنزلة الواحدة غير مسموح به؟

لاحظ أن المثالين السابقين يقدمان مبدأ العد.

تدريب (١)

ألقي حجر نرد وقطعة نقد معدنية معًا مرة واحدة، ما عدد النتائج المتوقع ظهورها؟



أراد سميّر الذهاب إلى حفلة وعندما نظر في خزانته وجد أمامه قميصين وأربعة بناطيل وحذاءين وثلاثة معاطف، ما عدد خيارات سميّر لاختيار ملابسه المكوّنة من قميص وبنطال وحذاء ومعطف؟

الحل

لو أردنا حلّ المسألة باستخدام الشجرة لوجدنا صعوبة بعض الشيء. لاختيار الملابس سيقوم سميّر بالاختيار على أربع مراحل المرحلة الأولى اختيار قميص ولها طريقتان مختلفتان، والمرحلة الثانية اختيار بنطال ولها ٤ طرق مختلفة والمرحلة الثالثة اختيار حذاء ولها طريقتان مختلفتان، والمرحلة الرابعة اختيار معطف ولها ثلاث طرق مختلفة، وبذلك يصبح عدد الخيارات هو: $2 \times 4 \times 2 \times 3 = 48$ طريقة لاختيار ملابسه.

إن حساب عدد الطرق للأمثلة السابقة يعتمد على مبدأ يسمى **مبدأ العد الأساسي**.

مبدأ العد الأساسي

إذا تم إجراء عملية على ك من المراحل حيث إنّ المرحلة الأولى لها ن_١ من الطرق، المرحلة الثانية لها ن_٢ من الطرق، المرحلة الثالثة لها ن_٣ من الطرق، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة (ك) التي لها ن_ك من الطرق، فإنه يمكن إجراء العملية كاملة بطرائق عددها $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ طريقة، على فرض أن الاختيار في أي مرحلة لا يؤثر في الاختيار في المراحل الأخرى.

تدريب (٢)

ذهبت سارة إلى مطعم لتناول وجبة طعام وعندما نظرت في قائمة الطعام وجدت أمامها ثلاثة أنواع من اللحوم، سبعة أنواع من العصير، وأربعة أنواع من الحلوى، بكم طريقة يمكن اختيار وجبة مكوّنة من نوع واحد من اللحم ونوع واحد من العصير ونوع واحد من الحلوى؟

إذا أُلقيت ثلاثة أحجار نرد منتظمة مرة واحدة، ما عدد النتائج المتوقع ظهورها؟

الحل

تتم العملية على ثلاث مراحل كل مرحلة لها ستة اختيارات فيكون عدد النتائج المتوقع ظهورها هو:

(استخدام مبدأ العد)

$$216 = 6^3 = 6 \times 6 \times 6$$

وفي هذه الحالة التي يكون عدد الخيارات (ك) لكل مرحلة من مراحل التجربة مساوياً لعدد الخيارات في المراحل الأخرى ولنرمز له بالرمز ك، وعدد المراحل ن، يكون عدد النتائج المتوقعة = (ك)^ن.

تدريب (٣)

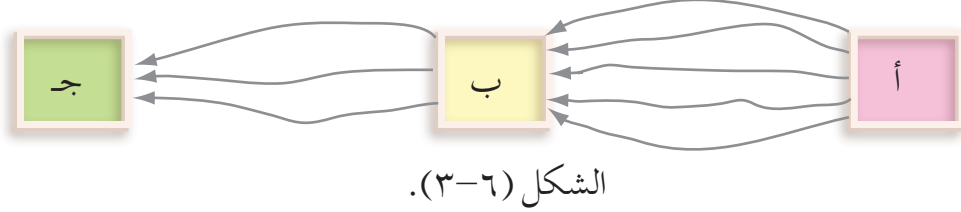
ما عدد النتائج المتوقعة في تجربة إلقاء قطعة نقد معدنية منتظمة خمس مرات متتالية؟

تدريب (٤)

كم كلمة مكونة من أربعة أحرف، يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف {و، أ، هـ، م، ن، س}، ولا يشترط أن يكون للكلمة معنى مع مراعاة عدم تكرار الحرف؟

تمارين و مسائل

- (١) هنالك ثلاث مدن أ، ب، ج، وهنالك ٥ طرق تصل المدينة أ بالمدينة ب و ٣ طرق تصل المدينة ب بالمدينة ج، انظر الشكل (٦-٣) إذا أراد شخص الوصول إلى المدينة ج انطلاقاً من المدينة أ مروراً بالمدينة ب ما عدد الطرائق التي يمكنه سلوكها؟



- (٢) في أحد محلات بيع أسماك الزينة يحتوي أحد أحواض هذا المحل على ٧ سمكات ذهبية و ٨ سمكات سوداء، أجب عن كل مما يأتي:
- أ (ما عدد طرق اختيار ٣ سمكات إذا كانت السمكة التي نختارها لا تعاد إلى الحوض (بغض النظر عن لون السمكة)؟
- ب) بكم طريقة يمكن اختيار ٣ سمكات أول اثنتين ذهبيتين علماً بأن البائع يتفقد السمكة ثم يعيدها إلى الحوض؟
- (٣) أراد شخص اختيار رقم سري لهاتفه الخليوي مكون من أربع أرقام، ما عدد الخيارات المتاحة أمام هذا الشخص في كل من الحالات الآتية:
- أ (إذا لم توضع شروط على الخيارات.
- ب) إذا اشترط أن الخانة الأولى لا تساوي صفراً.
- ج) إذا لم يسمح بتكرار الرقم في العدد.

(٤) كم عددًا فرديًا مكوّنًا من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام: {٥، ٣، ٦، ٤، ١، ٢} في كلِّ من الحالات الآتية:

أ (إذا سُمح بتكرار الرقم في العدد.

ب) إذا لم يُسمح بتكرار الرقم في العدد.

(٥) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكوّن من (٣) منازل من مجموعة الأرقام {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} بحيث يكون العدد الناتج أكبر من ٣٠٠؟

(٦) بكم طريقة يمكن كتابة اقتران على الصورة ق(س) = أس^٣ + ب س^٢ + ج س - ٥ . حيث (أ، ب، ج) معاملات مأخوذة من المجموعة {-٢، -١، ١، ٢} إذا كان :

أ (تكرار المعاملات غير مسموح به.

ب) تكرار المعاملات مسموحًا به.

(٧) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

النتائج

- تتعرف مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- تستخدم المضروب في حلّ مسائل حياتية.



اجتمع عشرة أشخاص في مؤتمر وقبل الاجتماع
قام كل شخص بمصافحة الباقيين، بكم طريقة يمكن أن
تحدث المصافحات؟

مثال (١)

في أحد الصفوف أراد خمسة طلاب الجلوس على خمسة مقاعد على استقامة واحدة، ما عدد الطرق الممكنة لجلوس الطلبة؟

الحل

أمام الطالب الأول خمس طرق لاختيار مقعده، وبعد أن يجلس الطالب الأول يكون أمام الطالب الثاني أربع طرق لاختيار مقعده، وهكذا:
وبذلك يكون عدد طرق الجلوس الممكنة للطلبة هو:

(مبدأ العد)

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ طريقة.}$$

وهذا ما يُعرف **بمضروب العدد**.

المضروب

ليكن n عددًا صحيحًا غير سالب، يعرف مضروب العدد n الذي يرمز له بالرمز $n!$ على أنه المقدار: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ ويكون مضروب الصفر $0! = 1$

تدريب (١)

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكوّن من أربع منازل من مجموعة الأرقام:
 $\{3, 5, 8, 7\}$ ، مع مراعاة عدم تكرار الرقم في العدد.

مثال (٢)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \quad ٤! \quad (٢) \quad \frac{٨!}{٦!} \quad (٣) \quad ١!$$

الحل

(تعريف المضروب)

$$(١) \quad ٤! = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ = ٢٤$$

(تعريف المضروب)

$$(٢) \quad \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦} = \frac{٨!}{٦!}$$

(اختصار)

$$٧ \times ٨ =$$

$$٥٦ =$$

ويمكن الحل بطريقة أخرى أكثر اختصاراً:

(تعريف المضروب)

$$\frac{٨!}{٦!} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦!}{٦!}$$

(اختصار)

$$٧ \times ٨ =$$

$$٥٦ =$$

$$(٣) \quad ١! = ١$$

تدريب (٢)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \quad ٧! \quad (٢) \quad \frac{٢٠!}{١٦!} \quad (٣) \quad \frac{٨!}{٦! \times ٢!}$$

مثال (٣)

احسب قيمة n ، حيث $n \in \mathbb{N}^+$ ، في كل مما يأتي:

$$(١) \quad ٩٦ = (n!) \quad (٢) \quad ٧٢ = \frac{(n+٢)!}{n!}$$

الحل

(بقسمة الطرفين على ٤)

$$(١) \quad ٩٦ = (n!) \quad (٢) \quad ٧٢ = \frac{(n+٢)!}{n!}$$

(تحليل)

$$24 = n!$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = n!$$

(تعريف المضروب)

$$4! = 4!$$

$$4 = n$$

$$72 = \frac{n!(2+n)}{n!} \quad (2)$$

(تعريف المضروب)

$$72 = \frac{n!(1+n)(2+n)}{n!}$$

(اختصار)

$$72 = (1+n)(2+n)$$

(تحليل إلى عوامل)

$$8 \times 9 = (1+n)(2+n)$$

(مقارنة الطرفين)

$$9 = (2+n)$$

(طرح ٢ من الطرفين)

$$7 = n$$

تدريب (٣)

احسب قيمة n ، $n \in \mathbb{N}^+$ ، في كلِّ مما يأتي:

$$3600 = (n!) \quad (2) \quad 336 = \frac{n!(3+n)}{n!} \quad (1)$$

مثال (٤)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $7!$

الحل

اضغط على 7 ثم shift ثم $n!$ ثم $=$ فيظهر الناتج على الشاشة 5040

تدريب (٤)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

$$(1) \quad 112 \quad (2) \quad 113 \quad (3) \quad 111$$

تمارين و مسائل

(١) عبر عن كلٍّ من المقادير الآتية باستخدام المضروب:

أ ($7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$)

ب ($13 \times 14 \times 15 \times 16$)

ج ($\frac{4 \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3}$)

(٢) بسّط كلّاً من المقادير الآتية:

أ ($\frac{!20}{!2!18}$) ب ($\frac{!120}{!5 \times !118}$) ج ($\frac{!(4+n)}{!(2+n)}$)

(٣) جد قيمة كلّ مما يأتي:

أ ($!5$) ب ($!6 - !8$) ج ($\frac{!16}{!5 \times !11}$)

د ($\frac{!8}{!6}$) هـ ($!(4-9)$) و ($!5$)

(٤) جد قيمة كلّ مما يأتي:

أ ($!(5+4)$) ب ($!5 + !4$) ج ($!5 \times !4$) د ($!(5 \times 4)$)

(٥) احسب قيم ن في ما يأتي، ن $\exists$ ص⁺:

أ ($2 = !(5n)$) ب ($240 = !(2-n)$)

(٦) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٧) أراد ثلاثة أشخاص الخروج من غرفة بابها يتسع لشخص واحد فقط، ما عدد الطرق التي يخرج بها هؤلاء الأشخاص من الغرفة؟

(٨) تسع سيدات، مع كل سيدة طفل، يُراد ترتيب جلستهم بشكل مستقيم، بحيث تجلس السيدات متجاورات والأطفال متجاورين. بكم طريقة يمكن أن يجلسوا؟

(٩) أرادت سلمى إرسال ٧ رسائل نصّية مختلفة إلى صديقاتها السبع للتهنئة بحلول عيد الفطر السعيد، ما عدد الطرق التي يمكن لها من خلالها إرسال هذه الرسائل لصديقاتها؟

النتائج

- تتعرف التباديل.
- تستخدم التباديل في حلّ مسائل حياتية.



اجتمع عشرون شخصًا في أحد المطاعم وأراد صاحب المطعم تقديم ثلاث جوائز مختلفة لثلاثة أشخاص من الموجودين فوضع بطاقات تحمل أرقام مقاعد الحاضرين في صندوق وقام بسحب ثلاث بطاقات على التوالي، ما عدد الطرق التي يمكن أن يختار بها صاحب المطعم البطاقات الثلاث؟

مثال (١)

يريد محمد وسعد و جمال التقاط صورة جماعية لهم، فقام المصور بوضع ثلاثة مقاعد على استقامة واحدة لتصويرهم، ما عدد طرائق ترتيب جلستهم؟

الحل

هنالك ثلاثة مقاعد وثلاثة أشخاص، يمكن أن يكون محمد في المنتصف وعلى يمينه سعد وعلى يساره جمال ويمكن أن يكون محمد في المنتصف وعلى يساره سعد وعلى يمينه جمال، فتكون الصورة الأولى مختلفة عن الصورة الثانية.

بذلك تكون الترتيب المختلفة للصورة هي:

سعد، محمد، جمال

سعد، جمال، محمد

محمد، سعد، جمال

محمد، جمال، سعد

جمال، محمد، سعد

جمال، سعد، محمد

وكل واحدة من هذه الصور تختلف عن الأخرى ولذلك يعتبر فيها الترتيب مهمًا وطريقة الترتيب هذه تسمى **التباديل**.

تعريف التبادل

إذا تم اختيار عناصر عددها r من مجموعة عدد عناصرها n بحيث يكون ترتيب الاختيار مهمًا. فإن هذا الاختيار يسمى تباديل.

ويُرمز لعددها بالرمز $l(n, r)$ حيث n, r عددان طبيعيان، $0 \leq r \leq n$

$$l(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تدريب (١)

ما عدد طرق اختيار لجنة ثنائية من عشرة طلاب بحيث يكون أحدهم قائدًا للصف والآخر مساعدًا له؟

مثال (٢)

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكوّن من منزلتين مختلفتين من مجموعة الأرقام $\{١, ٢, ٣, ٤, ٥\}$

الحل

العدد مكون من منزلتين والترتيب فيها مهم فالعدد ٣٥ يختلف عن العدد ٥٣، وبذلك يكون

$$\frac{٤!}{٢!} = l(٤, ٢) = \text{عدد الاختيارات هو:}$$

(تعريف التباديل)

$$= \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤}{١ \times ٢}$$

(تعريف المضروب)

$$= ٣ \times ٤$$

(اختصار)

$$= ١٢$$

ويمكن حلّ المثال بطريقة أخرى باستخدام مبدأ العد:

يتم اختيار منزلة الآحاد وأمامها ٤ اختيارات، ثم منزلة العشرات وأمامها ٣ اختيارات فيكون

$$\text{الناتج: } ١٢ = ٣ \times ٤$$

ويمكن حساب ل(ن، ر) بطريقة أخرى على النحو الآتي:

$$ل(ن، ر) = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$$

(تعريف التباديل)

(تعريف المضروب)

$$\frac{ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \dots \times (٢-ن) \times (١-ن) \times (٠-ن)}{(ن-ر)!} =$$

(تبسيط)

$$ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \dots \times (٢-ن) \times (١-ن) \times (٠-ن) =$$

ويمكن اعتماد النتيجة السابقة في حل التباديل.

مثال (٣)

احسب قيمة كل مما يأتي:

$$\begin{array}{lll} (١) \quad ل(٢، ٥) & (٢) \quad ل(٣، ٥) & (٣) \quad ل(٣، ٨) \\ (٤) \quad ل(٤، ٦) & (٥) \quad ل(٢، ٧) & \end{array}$$

الحل

(تعريف التباديل)

$$(١) \quad ل(٢، ٥) = \frac{٥!}{(٥-٢)!}$$

(تعريف المضروب)

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٣!}$$

(اختصار)

$$= ٥ \times ٤ \times ١ = ٢٠$$

(تعريف التباديل)

$$(٢) \quad ل(٣، ٥) = \frac{٥!}{(٥-٣)!}$$

(تعريف المضروب)

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}{٢!}$$

(اختصار)

$$= ٥ \times ٤ \times ١ = ٢٠$$

$$= ٦٠$$

(تعريف التباديل)

$$\frac{!8}{!(3-8)} = (3, 8) \text{ ل (3)}$$

(تعريف المضروب)

$$\frac{!5 \times 6 \times 7 \times 8}{!5} =$$

(اختصار)

$$6 \times 7 \times 8 =$$

$$336 =$$

(تعريف التباديل)

$$\frac{!6}{!(4-6)} = (4, 6) \text{ ل (4)}$$

(تعريف المضروب)

$$\frac{!2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{!2} =$$

(اختصار)

$$360 = 3 \times 4 \times 5 \times 6 =$$

(تعريف التباديل)

$$\frac{!7}{!(2-7)} = (2, 7) \text{ ل (5)}$$

(تعريف المضروب)

$$\frac{!5 \times 6 \times 7}{!5} =$$

(اختصار)

$$42 =$$

مثال (٤)

احسب قيمة كل مما يأتي:

$$(3) \text{ ل (4, 4)}$$

$$(2) \text{ ل (1, 4)}$$

$$(1) \text{ ل (0, 4)}$$

$$(6) \text{ ل (7, 7)}$$

$$(5) \text{ ل (1, 7)}$$

$$(4) \text{ ل (0, 7)}$$

الحل

$$(1) \text{ ل (0, 4)} = \frac{!4}{!4} = \frac{!4}{!(0-4)} = 1$$

$$(2) \text{ ل (1, 4)} = \frac{!3 \times 4}{!3} = \frac{!4}{!(1-4)} = 4$$

$$(3) \text{ ل (4, 4)} = \frac{!4}{!1} = \frac{!4}{!0} = \frac{!4}{!(4-4)} = 24$$

$$(4) \text{ ل (0, 7)} = \frac{!7}{!7} = \frac{!7}{!(0-7)} = 1$$

$$٧ = \frac{!٦ \times ٧}{!٦} = \frac{!٧}{!(١-٧)} = ل(١, ٧) \quad (٥)$$

$$٥٠٤٠ = !٧ = \frac{!٧}{!١} = \frac{!٧}{!(٧-٧)} = ل(٧, ٧) \quad (٦)$$

فكر وناقش



ادّعى سمير أنّ: $ل(ن, ن) = ل(ن, ١-ن)$
ناقش ادّعائه مبرراً إجابتك من خلال تقديم أمثلة.

تدريب (٢)

احسب قيمة كل مما يأتي:

- | | |
|---------------|-----------------|
| (١) $ل(٣, ٧)$ | (٢) $ل(٠, ١٠٠)$ |
| (٣) $ل(٨, ٨)$ | (٤) $ل(١, ٢٠)$ |
| | (٥) $ل(١٩, ٢٠)$ |

بشكل عام

$$ل(ن, ن) = !ن \quad ل(ن, ١-ن) = !ن$$

$$ل(١, ن) = !ن$$

$$ل(٠, ن) = ١$$

مثال (٥)

يريد خمسة أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة، ما عدد الطرائق التي يمكن أن يجلس بها هؤلاء الأشخاص في كل من الحالات الآتية:

- (١) دون وضع أي شرط على طريقة جلوسهم؟
- (٢) إذا كان أحدهم سيجلس بجوار باب الغرفة؟

الحل

(١) نوع التبديل تبديل دائري.

هنا الخيارات ٢٤ خياراً، وبشكل عام التبديل الدائري عدد خياراته $(١-١)!$

تعلم

التبديل الدائري: كيفما جلس الأشخاص حول طاولة مستديرة، فإنّ خيارات الجلوس تبقى نفسها وهذا يُشبه تمامًا عملية ترتيب خمسة أعداد على دائرة معيّنة، وما ينطبق على خمسة أشخاص ينطبق على أي عدد من الأشخاص.

(٢) وضع شرط جلوس أحد الأشخاص بجوار الباب يجعل هنالك نقطة مرجع و أي شرط من هذا النوع يعيد التبديل للتبديل الخطي (على استقامة واحدة) فيكون الجواب هو $ل(٥, ٥) = ٥!$

تدريب (٣)

- (١) يُراد تصميم لعبة للأطفال مكونة من دولا ب دائري مقسم إلى ستة أجزاء يراد تلوينها بستة ألوان مختلفة (جميع الدوايب لها الألوان نفسها)، ما عدد الطرق المتاحة أمام المصنع للإنتاج في الحالات الآتية:
- (٢) إذا لم يكن شرط على ترتيب الألوان.
- (٣) إذا كان هنالك مؤشر يجب أن يكون عند اللون الأحمر.

مثال (٦)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة ل(٨ ، ٦).

الحل

اضغط على ٨ ثم shift ثم nPr ثم ٦ ثم = فيظهر على الشاشة

٢٠١٦٠

تدريب (٤)

استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة كل مما يأتي:

(١) ل(٩ ، ٦) (٢) ل(١٠ ، ٤)

(٣) ل(١١ ، ٨) (٤) ل(١٢ ، ٧)

تمارين و مسائل

- (١) احسب قيمة كل مما يأتي:
 أ (ل (١٠، ٥) ب (ل (١٥، ١)
 ج (ل (١٤، ٠) د (ل (١٠٠، ٩٩)
 هـ (ل (٢٥، ٢٥)
- (٢) جد قيمة ن التي تحقق كل مما يأتي:
 أ (ل (ن، ٢) = ٩٠
 ب (ل (ن، ٤) = ٧٩٢٠
 ج (ل (ن، ٤) = ١٢ ل (ن، ٢)
 د (ل (ن + ١، ٣) = ١٠ ل (ن + ١، ٣)
- (٣) جد قيمة ر التي تحقق ما يأتي:
 ل (ر، ٧) = ٨٤٠
- (٤) يريد شخص اختيار كلمة سر لأحد المواقع الإلكترونية، ما عدد الخيارات أمام هذا الشخص في كل من الحالات الآتية:
 أ (إذا كانت كلمة السر مكونة من ثلاثة أحرف مختلفة من اللغة العربية يتبعها ثلاثة أرقام.
 ب (إذا كانت كلمة السر مكونة من ثلاثة أحرف مختلفة من اللغة العربية يتبعها ثلاثة أرقام مختلفة.
- (٥) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ منازل مختلفة من مجموعة الأرقام {٩، ٥، ٧، ٤، ٣}؟
- (٦) بكم طريقة يمكن تكوين كلمة مكونة من أربعة أحرف مختلفة من مجموعة الحروف {و، ج، د، ع، هـ، س، ص} بحيث لا يشترط أن يكون للكلمة معنى؟
- (٧) بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة ثلاثية مكونة من رئيس ونائب للرئيس وأمين صندوق من بين عشرين شخصاً؟
- (٨) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال (٢)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$\binom{8}{3} \quad (٢) \quad \binom{7}{5} \quad (١)$$

الحل

$$\frac{7!}{5! \times (7-5)!} = \binom{7}{5} \quad (١)$$

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5!} =$$

$$21 = 3 \times 7 =$$

$$\frac{8!}{3! \times (8-3)!} = \binom{8}{3} \quad (٢)$$

$$\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} =$$

$$7 \times 8 =$$

$$56 =$$

(تعريف التوافيق)

(تعريف المضروب)

(اختصار)

(تعريف التوافيق)

(تعريف المضروب)

(اختصار)

مثال (٣)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$\binom{9}{8} \quad (٤) \quad \binom{8}{7} \quad (٣) \quad \binom{9}{1} \quad (٢) \quad \binom{8}{1} \quad (١)$$

الحل

$$8 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 7!} = \frac{8!}{1! \times (8-1)!} = \binom{8}{1} \quad (١)$$

$$9 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 8!} = \frac{9!}{1! \times (9-1)!} = \binom{9}{1} \quad (٢)$$

$$8 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7! \times 1} = \frac{8!}{7! \times (8-7)!} = \binom{8}{7} \quad (٣)$$

$$9 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8! \times 1} = \frac{9!}{8! \times (9-8)!} = \binom{9}{8} \quad (٤)$$

ماذا تستنتج؟

فكر وناقش

ناقش مع زملائك صحة العبارات الآتية:

$$(1) \quad n = \binom{n}{1-n} = \binom{n}{1}$$

$$(2) \quad 1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

مثال (٤)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$\binom{8}{0} (4) \quad \binom{8}{8} (3) \quad \binom{7}{0} (2) \quad \binom{7}{7} (1)$$

الحل

$$1 = \frac{!7}{!0 \times !7} = \frac{!7}{!(7-7)!7} = \binom{7}{7} (1)$$

$$1 = \frac{!7}{!7 \times !0} = \frac{!7}{!(0-7)!0} = \binom{7}{0} (2)$$

$$1 = \frac{!8}{!0 \times !8} = \frac{!8}{!(8-8)!8} = \binom{8}{8} (3)$$

$$1 = \frac{!8}{!8 \times !0} = \frac{!8}{!(0-8)!0} = \binom{8}{0} (4)$$

ماذا تستنتج؟

تدريب (١)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$\binom{20}{1} (4) \quad \binom{18}{17} (3) \quad \binom{9}{6} (2) \quad \binom{10}{8} (1)$$

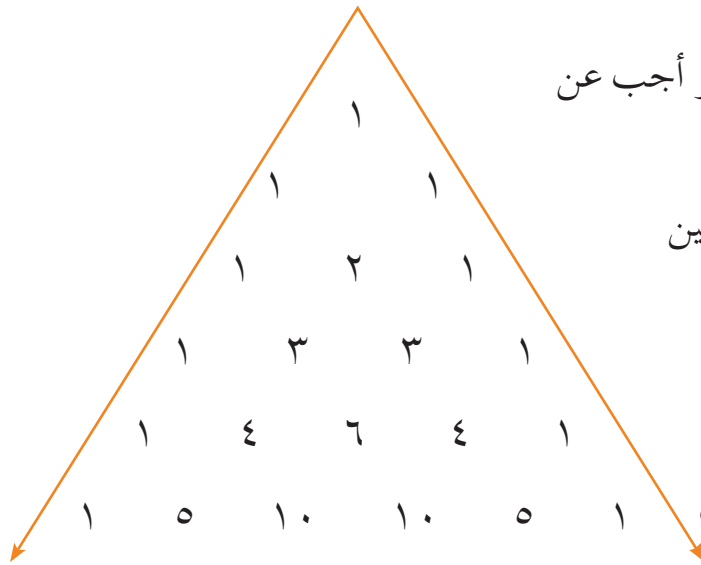
$$\binom{20}{0} (7) \quad \binom{6}{3} (6) \quad \binom{28}{28} (5)$$

لاحظ أنه يمكن حساب التوافيق باستخدام مثلث باسكال انظر الشكل (٦-٥/أ)

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 2 &= \binom{1}{1} + \binom{1}{0} \\
 4 &= \binom{2}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{0} \\
 8 &= \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{3}{1} + \binom{3}{0} \\
 16 &= \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{1} + \binom{4}{0} \\
 32 &= \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{5}{1} + \binom{5}{0}
 \end{aligned}$$

الشكل (٦-٥/أ).

قارن هذا الشكل مع الشكل (٦-٥/ب) و أجب عن الأسئلة الآتية:



الشكل (٦-٥/ب).

(١) قارن المدخلات المتناظرة في الشكلين

ماذا تلاحظ؟

(٢) قارن المدخل الأول بالمدخل الأخير

في كل صف من صفوف المثلث

في الشكل (٦-٥/ب)، ماذا تلاحظ؟

(٣) قارن المدخل الثاني بالمدخل قبل الأخير

في كل صف من صفوف الشكل (٦-٥/ب)، ماذا تلاحظ؟

(٤) عبر عن مدخلات كل صف من صفوف المثلث مستخدماً رمز المجموع.

(٥) اكتب نواتج جمع كل صف من صفوف المثلث على شكل متسلسلة مستخدماً رمز المجموع.

إذا أجبت إجابة صحيحة عن الأسئلة السابقة تكون قد حصلت على النتائج الآتية:

$$\binom{n}{r-n} = \binom{n}{r} \quad n = \binom{n}{1-n} = \binom{n}{1} \quad 1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$$

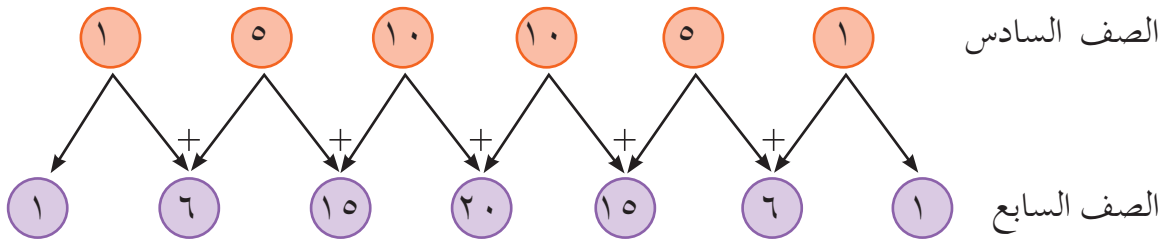
$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

كما أنك ستجد أن الحد العام للمتسلسلة هو: 2^n .

من الجدير بالذكر أن مثلث باسكال يمتد إلى ما لانهاية، والشكل الآتي يوضح كيفية إيجاد

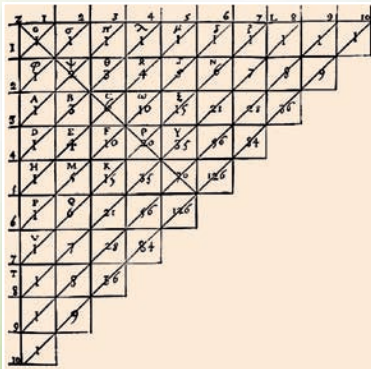
الصف السابع:

الصف السادس



أضف لمعلوماتك

أول من حصل على مثلث باسكال هو عالم عربي مسلم اسمه محمد بن الحسن الكرخي، لكنه صمم المثلث مثلث قائم الزاوية وهذه صورة المثلث الذي صممه الكرخي. أما مثلث باسكال فهو المثلث نفسه لكنه متطابق الضلعين.



صورة لمثلث الكرخي.

تدريب (٢)

جد عناصر الصف الثامن

مثال (٥)

كم عدد الطرائق التي يمكن سلوكها للوصول من المدينة أ إلى المدينة ب من خلال الترتيب التالي للشوارع علمًا بأنك لا تستطيع التحرك إلا باتجاهي الشمال والشرق فقط؟

الحل

عدد الطرائق = ٢٠ طريقة
وباستخدام مثلث باسكال
يكون الحل كما في الشكل المجاور.

			ب
١	٤	١٠	٢٠
١	٣	٦	١٠
١	٢	٣	٤
أ	١	١	١

الشكل (٦-٦).

مثال (٦)

ما عدد طرائق تكوين لجنة تضم ٥ رجال و ٦ سيدات من ضمن مجموعة أشخاص مكونة من ٨ رجال و ١٠ سيدات؟

الحل

لاحظ أن الترتيب غير مهم لذا يكون الحل كالآتي:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{8}{5} \times \binom{10}{6} = 56 \times 210 = 11760$$

تدريب (٣)

جد عدد طرق اختيار لجنة خماسية من ٧ رجال و ٦ سيدات ، في كلٍّ من الحالات الآتية:

- (١) تضم اللجنة ٣ سيدات و رجلين.
- (٢) تضم اللجنة ثلاثة رجال على الأقل.
- (٣) رئيس اللجنة ونائبه من الرجال و الباقي سيدات.

مثال (٧)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\binom{8}{5}$

الحل

اضغط على ٨ ثم shift ثم nCr ثم ٥ ثم =

فيظهر على الشاشة ٥٦

تدريب (٤)

استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد:

$$\binom{13}{5} (١) \quad \binom{12}{7} (٢) \quad \binom{11}{4} (٣) \quad \binom{13}{8} (٤)$$

تمارين و مسائل

(١) احسب قيمة كل مما يأتي:

$$\text{أ) } \binom{13}{5} \quad \text{ب) } \binom{9}{1} \quad \text{ج) } \binom{18}{18} \quad \text{د) } \binom{9}{6}$$

(٢) اثبت أن:

$${}^n_2 = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} \quad n \geq 2$$

(٣) احسب قيمة n في الحالة الآتية:

$$\text{أ) } \binom{n}{3} = 56 \quad \text{ب) } \binom{n}{2} = 325$$

(٤) ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من بين ٦ نقاط لا تقع على استقامة واحدة؟

(٥) امتحان مكون من ١٠ أسئلة مقسمة إلى قسمين كل قسم مكون من ٥ أسئلة، المطلوب من الطلبة إجابة ما مجموعه ٦ أسئلة من القسمين بحيث يجب على الأقل على سؤالين من القسم الأول، وسؤالين من القسم الثاني على الأقل، بكم طريقة يمكن أن يجيب الطلبة عن الأسئلة؟

(٦) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٧) صندوق يحتوي على ٥ كرات بيضاء و ٣ كرات سوداء وأربع كرات حمراء، بكم طريقة يمكن سحب ٣ كرات معاً من الصندوق إذا كان من بين الكرات المسحوبة كرة واحدة سوداء على الأقل؟

أسئلة الوحدة

- (١) احسب قيمة كل مما يأتي:
 أ (٢ ، ٦) ل (٢ ، ٦) ب $\binom{10}{7}$ ج ٨!
- (٢) بسط المقادير الآتية:
 أ ($\frac{!(1+n) - !n + !(1-n)}{!(1-n)}$) ب $\frac{!(1+n) - !n}{!n}$
- (٣) احسب قيمة ن في ما يأتي ، حيث ن عدد صحيح موجب:
 أ ($78 = \binom{n}{2}$) ب $336 = \frac{!(3+n)}{!n}$
- (٤) احسب قيمة ر في ما يأتي:
 $\binom{11}{1-r} = \binom{11}{r}$
- (٥) اثبت كل مما يأتي:
 أ (${}^n_2 = \binom{1+n}{1-n} + \binom{n}{2-n}$) ب ${}^n_2 \leq n$
 ب ($l(n+1, r) = l(n, r) + l(n, r-1)$)
- (٦) أثبت أن :
 ${}^{n+1}_3 - \binom{1-n}{3} = (1-n)^2$
 ثم احسب قيم ن في الحالة الآتية: $49 = \binom{1-n}{3} - \binom{1+n}{3}$
- (٧) بكم طريقة يمكن إرسال ٤ رسائل عبر أربع صناديق بريد بحيث يوضع في كل صندوق رسالة؟
- (٨) في المضلع المنتظم القطعة الواصلة بين رأسين غير متجاورين تسمى قُطرًا للشكل، ما عدد أقطار المضلع السباعي؟
- (٩) صندوق يحتوي على بطاقات مرقمة من ١-١١، إذا سُحِبَت بطاقتان معًا عشوائيًا، ما عدد طرائق اختيار البطاقتين بحيث يكون مجموع العددين الظاهرين فرديًا؟

- ١٠) ٥ صبيان و ٥ فتيات يريدون الجلوس على ١٠ مقاعد مرتبة بخط مستقيم، احسب عدد الطرائق الممكنة في كل من الحالات الآتية:
- أ) إذا أعطي الصبية حرية الاختيار في الجلوس.
- ب) في حال جلوس الصبية متجاورين و الفتيات متجاورات.
- ج) إذا علمت أن كل صبي منهم له أخت و أراد كل أخ الجلوس بجوار أخته.

١١) احسب قيم n ، r التي تجعل العبارة الآتية صحيحة:

$$L(n, r) = \binom{n}{r}$$

$$١٢) \text{ أثبت أن } \binom{n}{r} - \binom{n-r}{r} = \binom{n}{r-1}$$

- ١٣) في اختبار من نوع الاختيار من متعدد أراد معلّم عمل نماذج بحيث يختلف ترتيب الأسئلة في صفحة كل طالب عن الطلبة الآخرين إذا كان عدد الطلبة ٢٦ فما أقل عدد من الأسئلة يجب أن يتكون منه الاختبار ليحقق هذا الشرط؟

- ١٤) إذا كان ترتيب الأحرف يشكل كلمة، ما عدد الكلمات التي يمكن تشكيلها من حروف كلمة عادل؟

- ١٥) أراد محمد - وهو مؤسس لجنة خيرية - تشكيل لجنة خماسية من بين (١٠) أشخاص على شرط أن يكون محمد أحدهم، بكم طريقة يمكن تشكيل هذه اللجنة؟

- ١٦) موسوعة مكونة من (٨) أجزاء، بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الموسوعة على رف؟

- ١٧) تضم إحدى الجامعات اثنتي عشرة كلية، أقامت الجامعة دورياً لكرة القدم بحيث يمثل كل كلية فريق، ما عدد المباريات التي ستقام؟

- ١٨) معلمة تريد مكافأة طلابها بحيث تقدم جائزة مكونة من ثلاثة عناصر (قلم، كتاب، مقلّمة) إذا كان هنالك ثلاثة أنواع مختلفة من الأقلام، وأربعة كتب مختلفة ونوعان مختلفان من المقالم، بكم طريقة يمكن للمعلمة تحضير الجائزة؟

- ١٩) مدرب حيوانات لديه ٤ أسود و ٥ نمور، بكم طريقة يمكنه وقوفها بشكل مستقيم

بحيث لا يكون أسدان بجوار بعضهما أو نمران بجوار بعضهما؟

٢٠. يتكوّن هذا السؤال من (٣) فقرات من نوع اختيار من متعدد، لكل فقرة (٤) بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١)* إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا بحيث $n < ١$ أي مما يأتي لا يساوي ١ :

أ ($n - n$) ! ب $\binom{n}{n}$

ج ل (n, n) د $\binom{n}{.}$

(٢) أي مما يأتي لا يساوي $\binom{6}{5}$:

أ $\frac{!6}{!(5-6)!5}$ ب $\binom{6}{1}$ ج $\frac{ل(٥,٦)}{!٦}$ د $\binom{6}{5}$

(٣) بكم طريقة يمكن ترتيب خمسة كتب ثقافية، أربعة كتب علمية، وثلاثة كتب دينية، على رف واحد بحيث تكون الكتب ذات النوع الواحد بجانب بعضها.

أ ($٥! \times ٤! \times ٣!$) ب ($٥! \times ٤! \times ٣!$)

ج ($٣ \times (٥! \times ٤! \times ٣!)$) د ($٥ \times ٤ \times ٣ \times ٣$)

* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية

- ١ - وزارة التربية والتعليم، كتاب الرياضيات للصف العاشر، الطبعة الثانية.
- ٢ - وزارة التربية والتعليم، (٢٠٠٧)، كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي العلمي، الطبعة الأولى.
- ٣ - د. عبد العزيز هيكل، د. فاروق عبد العظيم، (١٩٧٨)، مبادئ في الرياضيات.
- ٤ - د. عدنان عوض، (١٩٨٢)، الرياضيات العامة، الطبعة الثانية.

ثانياً: المراجع الأجنبية

- 1- Demona Waits. and others, (2006); **Precalculus**; 7th Edition.
- 2- Smedley and Wisemen, (2004); **Mathematics Standard level**.
- 3- Fabio Cirrito, (2007); **Mathematics Higher level (Core)**; 3rd Edition.
- 4- Pelma Vollmar and others; **Mathematics for the International Student**; 2nd Edition.

تَمَّ بِحَمْدِ اللَّهِ