



المادة التعليمية للبرنامج العلاجي
المرحلة التحضيرية
للعام 2022-2023

مبحث الرياضيات
الصف: الحادي عشر العلمي

المصدر: مادة التعلم المبني على المفاهيم والنتائج
الأساسية لمبحث الرياضيات

ثانياً: تمثيل الاقتران الخطي بيانياً

إذا كانت لدي المعادلة $5x+y=3$ فكيف يمكنني أن أحدد إذا كانت النقطة $(2,3)$ هي إحدى حلول المعادلة أم لا؛ من دون حسابها؟

ماذا سأتعلم؟

- أرسُم الاقتران الخطي على المستوى الإحداثي.

معلومة

النقاط جميعها التي تقع على منحنى الاقتران، هي حلول لمعادلته.

كيف أعرف إذا كانت النقطة $(2, 3)$ تقع على منحنى الاقتران $5x+y = 3$ ؟
كي أستطيع أن أحدد ذلك، لا بد لي من معرفة موقع الاقتران على المستوى الإحداثي، وذلك بالخطوات الآتية:

(1) أكوّن جدولاً من 3 أعمدة، بحيث يكون عموداً للمتغير x ، وعموداً للمتغير y ، وعموداً للزوج المرتب الناتج.

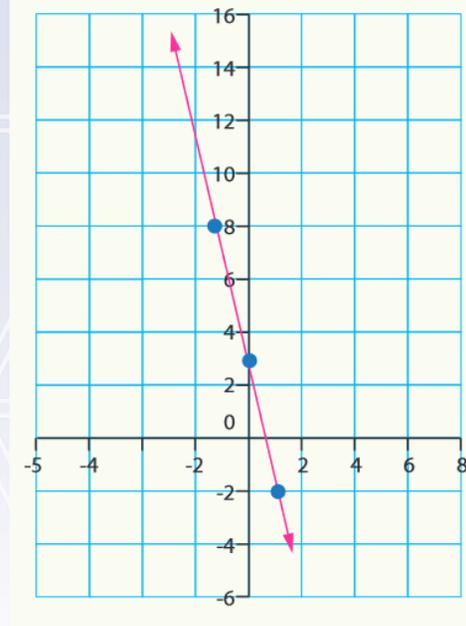
(2) افترض 3 قيم للمتغير x بوصفها مُدخلات، وأجد قيمة y بوصفها مُخرجات لها، ثم أكتب الزوج المرتب الناتج.

x	$y=3-5x$	(x, y)
1	-2	(1,-2)
0	3	(0,3)
-1	8	(-1,8)

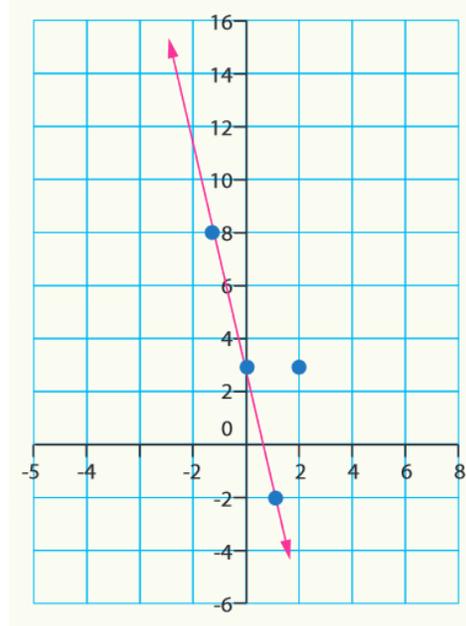
(3) أمثل الأزواج المرتبة على المستوى الإحداثي، وأصل بينها بخط مستقيم.

معلومة

يُسمّى الاقترانُ الخطّيُّ هذا الاسمَ
لأنّه خطٌّ مستقيمٌ.



بعد أن حدّدت موقع الاقتران، يُمكنني الآن أن أُحدّد النقطة المطلوبة على المستوى الإحداثي؛ لأعرف إذا كانت حلًّا للمعادلة أم لا.



ألاحظُ من الرسم أنّ النقطة (2 , 3) لا تقعُ على منحنى الاقتران؛ إذن: هي ليست حلًّا لمعادلته.

أحاول

- أرسمُ الاقترانَ $y=2x+1$ على المستوى الإحداثي.
- هل النقطة (5 , 4) تقعُ على منحنى الاقتران؟

ثالثاً: تحليل العبارة التربيعية

لوحة مستطيلة الشكل مساحتها بالوحدات المربعة $(س^2 + ٤س + ٣)$. إذا كان طولها $(س + ٣)$ وحدة طول؛ فما عرضها؟



ماذا سأتعلم؟

- العبارة التربيعية.
- تحليل العبارة التربيعية.

يُسمى المقدار $أس^٢ + بس + ج$ ، $أ \neq ٠$ ، $أ$ ، $ب$ ، $ج$ أعداداً حقيقية؛ العبارة التربيعية.

تحليل العبارة التربيعية

ثانياً: إذا كان معامل $س^٢$ ، $أ \neq ١$

أولاً: إذا كان معامل $س^٢$ ، $أ = ١$

مثال (١)

أحل كل ما يأتي:

$$٤ - س^٣ + ٣س$$

$$٢س^٢ - ١١س + ٢٤$$

$$١س^٢ + ٥س + ٦$$

الحل:

$$١س^٢ + ٥س + ٦$$

$$= (س + ٢) (س + ٣)$$

$$٢س^٢ - ١١س + ٢٤$$

$$= (س - ٣) (س - ٨)$$

$$٣س^٢ + ٣س - ٤$$

- س

$$= (س - ١) (س + ٤)$$

$$+ ٤س$$

$$+ ٣س$$

البحث عن عددين حاصل ضربهما ٦، وناتج جمعهما ٥ (هما: ٢ و ٣).

البحث عن عددين حاصل ضربهما ٢٤، وناتج جمعهما -١١ (هما: -٣، -٨).

البحث عن عددين حاصل ضربهما -٤، وناتج جمعهما ٣ (هما: -١، ٤).

للتأكد من الحد الأوسط؛ نضرب الحدين على الطرفين والحدين

الأوسطين ونجمعهما (-س + ٤س = ٣س).

أحاول أُحلُّ كلَّ ممَّا يأتي:

$$(1) \text{ س } 2 + 7 + 12 \quad (2) \text{ س } 2 - 8 + 16 \quad (3) \text{ س } 2 - 4 - 60$$

مثال (٢)

أحلُّ كلَّ ممَّا يأتي:

$$(1) \text{ س } 3 + 4 + 1 \quad (2) \text{ س } 2 - 7 - 4$$

الحل:

تحليل ٣ س + ٤ إلى عواملها وتحليل الحد المطلق إلى عوامله؛ مع مراعاة إشارات الحدود.
 أتأكد من التحليل؛ بضرب الحدَّين في الطرفين والحدَّين الأوسطين ثمَّ أجمعهُما.

$$(1) \text{ س } 3 + 4 + 1 = (\text{س} + 1)(1 + \text{س}) = \text{س} + 3 + 1 + \text{س}$$

للتأكد من الحدِّ الأوسط: (حاصل ضرب الطرفين + حاصل ضرب الوسطين = الحدِّ الأوسط).

$$(2) \text{ س } 2 - 7 - 4 = (\text{س} - 4)(1 + \text{س}) = \text{س} - 4 + \text{س} - 4$$

أحاول أُحلُّ ما يأتي إلى عوامله:

$$(1) \text{ س } 2 + 10 + 8 \quad (2) \text{ س } 5 + 45 + 70$$

أختبرُ تعلّمي



(١) أحلّلُ كلاً ممّا يأتي، وأجدُ البطاقةَ الصحيحة:

$$(أ) \text{ س}^2 + ٤\text{س} - ٣٢$$

$$(س + ٨) (س + ٤)$$

$$(س + ١٦) (س - ٢)$$

$$(س + ٢) (س - ١٦)$$

$$(س + ٨) (س - ٤)$$



$$(ب) \text{ س}^2 + ١١\text{س} + ٢٨$$

$$(س + ٤) (س - ٧)$$

$$(س + ١٤) (س + ١٤)$$

$$(س + ٢) (س + ١٤)$$

$$(س + ٧) (س + ٤)$$



$$(ج) \text{ س}^2 - ٦\text{س} - ٢$$

$$(س - ٦) (س - ١)$$

$$(س + ٢) (س + ٣)$$

$$(س + ٢) (س + ٣)$$

$$(س + ١) (س - ٣)$$



(٢) أجدُ ٣ قيمٍ للرمز (ك) لتُصبح العبارةُ التربيعيةُ الآتيةُ قابلةً للتحويل إلى العوامل، ثم أحلّلُ كلَّ حالةٍ:

$$\text{س}^2 - ٣\text{س} + ك$$

(٣) أكتبُ تعبيراً جبرياً يُمثّلُ محيطَ لوحِ خلايا شمسيةٍ مستطيلةٍ الشكل، مساحتها $(س^2 + ٤س - ٨١)$ وحدةً مربعةً.

(٤) ما قيمُ (ك) التي تجعلُ تحليلَ كلِّ ممّا يأتي صحيحاً:

$$(أ) \text{ س}^2 + ك\text{س} - ١٩ = (س - ١٩) (س + ١)$$

$$(ب) \text{ س}^2 + ٢ك\text{س} - ٢١ = (س - ٢) (س + ٧)$$

(٥) أنا أحدُ عواملِ العبارةِ التربيعيةِ $٥س^2 - ٢١س + ٤$ ، إذا كان أحدُ العواملِ (س - ٤)؛ فما العاملُ الآخرُ؟

أولاً: الاقتران التربيعي

ماذا سأتعلم؟

- الاقتران التربيعي.
- تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً.
- خصائص الاقتران التربيعي.

رمت لاعبة كرة فأتخذت مساراً وفق العلاقة $l = 20n - 5n^2$ حيث n الزمن بالثواني، l ارتفاع الكرة بالأقدام. ما أقصى ارتفاع ستصل إليه الكرة؟



تعلمت سابقاً الاقتران الخطي، وسأتعلم الاقتران التربيعي.

الاقتران التربيعي اقتران على الصورة:

ق (س) = $أس^2 + بس + ج$ ، حيث $أ \neq 0$ ، $ب$ ، $ج$ أعداد حقيقية، $أ \neq 0$ صفراً، وتسمى **الصورة العامة للاقتران التربيعي**.

ألاحظ في ما يأتي التمثيلات البيانية لاقترانات تربيعية، وأملأ الفراغ أمام كل تمثيل:

الاقتران

علاقة تربط كل عنصر في المجال، بعنصر واحد فقط في المدى.

١) الاقتران ق (س) = $س^2$ ، حيث $أ = 1$ ، $ب = 0$ ، $ج = 0$ ،

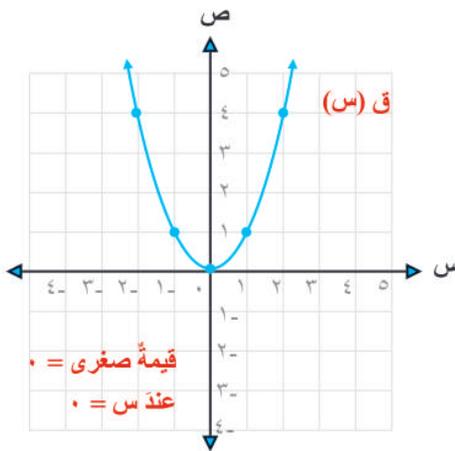
إشارة $أ$

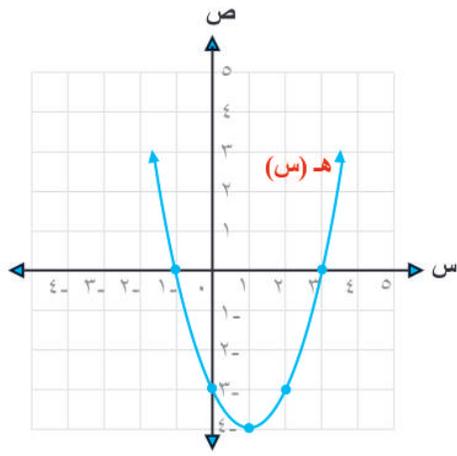
مجال الاقتران ق، ومداه

اتجاه فتحة المنحنى

معادله محور التماثل

للاقتران قيمة (عظمى أم صغرى)؟ وتساوي





٢) الاقتران هـ (س) = $س^2 - ٢س - ٣$

أ = ، ب = ، ج =

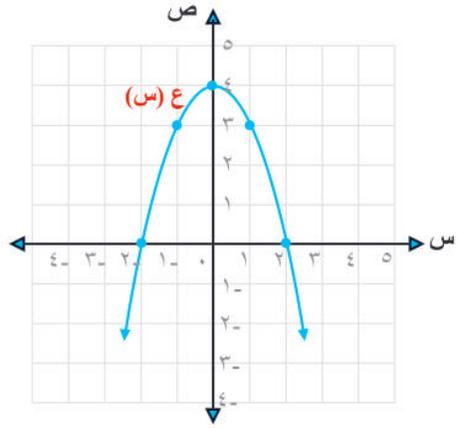
إشارة أ

مجال الاقتران هـ، ومداه

اتجاه فتحة المنحنى

معادلته محور التماثل

للاقتران قيمة (عظمى أم صغرى)؟ وتساوي



٣) ع (س) = $٤ - س^٢$

أ = ، ب = ، ج =

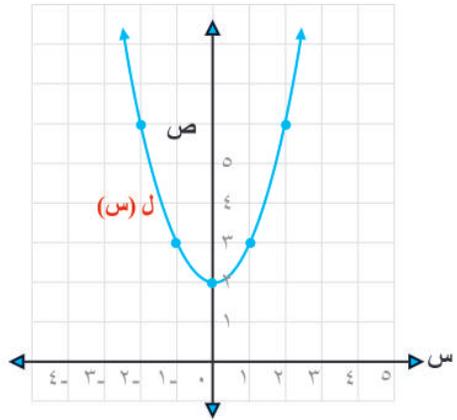
إشارة أ

مجال الاقتران ع، ومداه

اتجاه فتحة المنحنى

معادلته محور التماثل

للاقتران قيمة (عظمى أم صغرى)؟ وتساوي



٤) ل (س) = $س^٢ + ١$

أ = ، ب = ، ج =

إشارة أ

مجال الاقتران ل، ومداه

اتجاه فتحة المنحنى

معادلته محور التماثل

للاقتران قيمة (عظمى أم صغرى)؟ وتساوي

الأحظ ممّا سبق أنّ منحنى الاقتران تربيعي مفتوح للأعلى أو للأسفل، ورأس المنحنى النقطة التي يكون للاقتران عندها قيمة عظمى أو صغرى، وإحداثيات رأس المنحنى هي $(\frac{b}{a}, c - \frac{b^2}{4a})$ ، ومحور التماثل هو مستقيم رأسي يمرُّ برأس المنحنى.

الصورة العامة للاقتران التربيعي ق (س) = أس^٢ + ب س + ج ، أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، ج أعداد حقيقية.

أ سالبة	مفتوح للأسفل	أ موجبة	مفتوح للأعلى
المجال		المجال	ح
المدى		المدى	$c \leq c - \frac{b^2}{4a}$
معادلة محور التماثل		معادلة محور التماثل	$s = -\frac{b}{2a}$

مثال (١)

أمثلّ الاقتران ق (س) = س^٢ + ٢ س - ٤ بيانياً.

الحل:

لتمثيل الاقتران بيانياً؛ أتبع الخطوات الآتية:

(١) أحدد معاملات الحدود أ = ١ ، ب = ٢ ، ج = -٤

(٢) أجد إحداثيات رأس القطع $(\frac{2}{1}, c - \frac{2^2}{4}) = ((1 -), c - 1)$

ق (١ -) = (١ -) ٢ + ٢(١ -) - ٤

٥ - = ٤ - ٢ - + ١ =

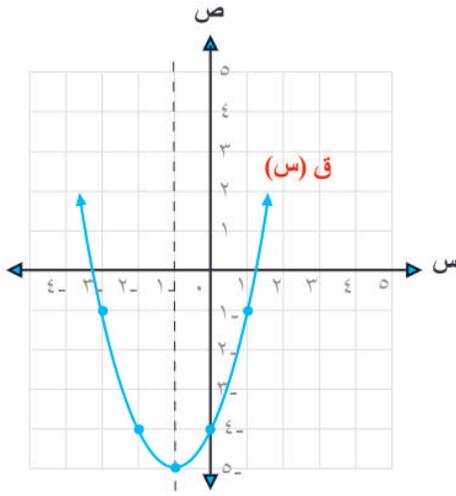
(٣) أنشئ جدولاً للنقاط، ثم أعينها على المستوى الإحداثي.

المستقيم الرأسي

مستقيم يوازي محور الصادات، معادلته

س = أ

حيث أ عدد حقيقي.



س	١	٠	١-	٢-	٣-
ق(س)	١-	٤-	٥-	٤-	١-

مجال الاقتران يساوي ح، مدى الاقتران هو $ص \leq -٥$ ،
معادلته محور التماثل $س = ١$

أحاول أمثل الاقتران ك $(س) = ٩ - س^٢$ ، وأذكر المجال والمدى ومعادلة محور التماثل.

أحاول

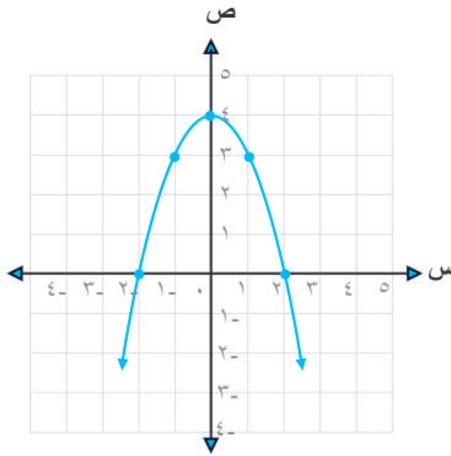
أختبر تعلمي



(١) أمثل بيانياً الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = س^٢ - ١$

ب) $هـ(س) = س^٢ - ٤س + ١$



(٢) أدرس الرسم المجاور، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) ما إحداثيات رأس القطع؟

ب) للاقتران قيمة عظمى أم صغرى؟ أحدد لها.

ج) ما مجال الاقتران؟

د) ما إشارة معامل $س^٢$ ؟

هـ) ما نقاط التقاطع مع محور $س$ ؟

(٣) أُطلق صاروخٌ إلى أعلى، وكان ارتفاعه بالأمتار فوق سطح البحر بعد (ن) ثانيةً من إطلاقه وفق العلاقة:
ل (ن) = $٤ - ن^٢ + ١٦ن + ٥٠٠٠$ ؛ أجد أقصى ارتفاع يبلغه الصاروخ.

ثانياً: حلّ المعادلة التربيعية



مربعان يزيد طول أحدهما على الثاني
بالسنتيمترات بمقدار ٣، وكان مجموع
مساحتهما بالسنتيمترات المربعة ٢٦٩
ما طول ضلع كل منهما؟

ماذا سأتعلم؟

- المعادلة التربيعية.
- حلّ المعادلة التربيعية.
- القانون العامّ لحلّ المعادلة التربيعية.
- مميّز العبارة التربيعية.

الصورة العامّة للمعادلة التربيعية بمتغيّر واحد هي: $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ ؛ أ، ب، ج أعداد حقيقية $أ \neq ٠$

أما حلّ المعادلة فهو إيجاد قيم (س) التي تُحقّق المعادلة، وتُسمى جذور المعادلة. ويوجد عدّة طرائق لحلّ المعادلة التربيعية.

حلّ المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل:

خطوات حلّ المعادلة التربيعية بالتحليل:

- (١) أكتب المعادلة التربيعية بالصورة العامّة $أس^٢ + ب س + ج = ٠$
- (٢) أحلّ المعادلة التربيعية إلى عواملها الأولى؛ بكتابتها على شكل حاصل ضرب عبارتين خطيتين.
- (٣) أستعمل الخاصية الصفرية.
- (٤) أحلّ المعادلتين الخطيتين التي حصلت عليهما في الخطوة السابقة.

أتعلم

إذا كان أ، ب عددين حقيقيين، وكان $أ \times ب = ٠$ صفراً؛ فإنّ $أ = ٠$ صفراً أو $ب = ٠$ صفراً أو كليهما يساوي صفراً.

تُسمى هذه الخاصية الخاصية الصفرية.

مثال (١)

أحلّ المعادلتين الآتيتين:

$$(٢) \text{ س}^٢ + ٧ \text{ س} - ٨ = ٠ \quad (١) \text{ س}^٢ - ٤ = ٥$$

الحل:

$$(١) \text{ س}^٢ - ٤ = ٥$$

$$\text{س}^٢ = ٩$$

$$\text{س} = (٣ - \text{س}) (٣ + \text{س}) = ٠$$

$$\text{إما س} = ٣ - ٠ ، \text{ ومنه س} = ٣$$

$$\text{أو س} = ٣ + ٠ ، \text{ ومنه س} = ٣ -$$

إذن: مجموعة الحلّ هي: $\{٣ - ، ٣\}$.

$$(٢) \text{ س}^٢ + ٧ \text{ س} - ٨ = ٠$$

$$\text{س} = (١ - \text{س}) (٨ + \text{س}) = ٠$$

$$\text{إما س} = ١ - \text{صفر} ، \text{ ومنه س} = ١$$

$$\text{أو س} = ٨ + ٠ ، \text{ ومنه س} = ٨ -$$

مجموعة حلّ المعادلة هي: $\{٨ - ، ١\}$.

كتابة المعادلة بالصورة العامّة.

تحليل المعادلة باستعمال الفرق بين مربعين.

استعمال الخاصيّة الصفرية.

البحث عن عددين حاصل ضربهما $(٨-)$ ومجموعهما $(٧+)$.

باستعمال الخاصيّة الصفرية.

أجد حلّ المعادلتين الآتيتين:

أحاول

$$(٢) \text{ س}^٢ - ٤ = ٥$$

$$(١) \text{ س}^٢ + ٣ + ٢ = ٠$$

حلّ المعادلة التربيعية باستعمال القانون العامّ:

أناملّ المعادلات الآتية: $٢ \text{ س}^٢ - ٤ = ١$ ، $٢ \text{ س}^٢ - ٢ = ١٠$ ، $٠ = ٧ + ٣ \text{ س} + ٢ \text{ س}^٢$

سأجد صعوبة في حلّ هذه المعادلات بالتحليل إلى العوامل الأولية؛ لذا، **أستعمل القانون العامّ**

لحلّ المعادلة التربيعية.

أي معادلة تربيعية أس² + ب س + ج = ٠، حيث أ، ب، ج أعداد حقيقية، أ ≠ ٠، يُمكنني حلها باستعمال القانون العام للمعادلة التربيعية، وهو:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ ج}}{٢ أ}$$

ويُسمى المقدار $ب^2 - ٤ أ ج$ **مميّز المعادلة التربيعية** ويُرمز له بالرمز Δ : $ب^2 - ٤ أ ج \leq ٠$ (لماذا؟)

ألاحظ أن المميّز يُمكن استعماله للكشف عن إمكانية تحليل المعادلات التربيعية وتحديد عدد الحلول الحقيقية (إن وجدت).

إذا كان:

(١) $\Delta < ٠$ فإن للمعادلة التربيعية جذرين حقيقيين مختلفين.

(٢) $\Delta > ٠$ فإنه لا يوجد للمعادلة التربيعية جذور حقيقية.

(٣) $\Delta = ٠$ فإن للمعادلة التربيعية جذراً حقيقياً مكرراً هو $س = \frac{-ب}{٢ أ}$

مثال (٢)

أجد قيمة المميّز للمعادلة التربيعية $٣س^2 - ٤س - ١٠ = ٠$ ، ثم أتبيّن إذا كان للمعادلة حلولاً حقيقية.

الحل:

كتابة المعادلة بالصورة العامة.

$$٣س^2 - ٤س + ١٠ = ٠$$

تحديد معاملات الحدود

$$٣ = أ، ب = -٤، ج = ١٠$$

كتابة مميّز المعادلة التربيعية.

$$\Delta = ب^2 - ٤ أ ج$$

تعويض قيم أ، ب، ج.

$$= (-٤)^2 - ٤(٣) \times (١٠)$$

$$= ١٦ - ١٢٠$$

$$= -١٠٤ \text{ المميّز } > ٠$$

∴ لا يوجد حلولاً حقيقية للمعادلة التربيعية.

أجد قيمة المميز للمعادلة التربيعية $س^2 + 1 + 3س = 0$ ؛ ثم أتبيّن إذا كان للمعادلة حلولاً حقيقية.

مثال (3)

أجد حلّ المعادلة $س^2 + 3س - 3 = 0$ باستعمال القانون العامّ للمعادلة التربيعية:

الحلّ:

$$أ = 2، ب = 3، ج = -3 \quad \text{تحديد معاملات الحدود.}$$

$$\Delta = ب^2 - 4أج = 3^2 - 4 \times 2 \times (-3) \quad \text{كتابة مميز المعادلة التربيعية.}$$

$$= (3)^2 - 4(2)(-3) = 9 + 24 = 33 > 0 \quad \text{تعويض.}$$

$$= 33 > 0$$

إذن: يوجد للمعادلة حلان حقيقيان.

كتابة القانون العامّ لحلّ المعادلة التربيعية.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أج}}{2أ}$$

التعويض في القانون، ثم التبسيط.

$$س = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$$

أجد حلّ المعادلة $س^2 - 3س = 4$ باستعمال القانون العامّ للمعادلة التربيعية.

حلّ المعادلة التربيعية على الصورة: $(أس + ب)^2 = ج$

مثال (4)

أجد حلّ المعادلة $س^2 = 2(س + 4) = 2س + 8$

الحلّ:

$$س^2 = 2(س + 4)$$

أخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة.

$$\sqrt{س^2} = \sqrt{2(س + 4)}$$

تطبيق القاعدة.

$$س = 2س + 4$$

حلّ المعادلة الخطية.

$$س = 4س + 4 \Rightarrow 3س = 4 \Rightarrow س = \frac{4}{3}$$

$$س = 4س + 4 \Rightarrow 3س = 4 \Rightarrow س = \frac{4}{3}$$

فائدة

$$\sqrt{س^2} = |س|$$

إذا كان $|س| = أ$ ؛ حيث

$$أ \geq 0، \text{ فإن:}$$

$$س = أ \text{ أو } س = -أ$$

هل للمعادلة $s^2 = 4$ - حل؟ لماذا؟

أحل المعادلة (س - 3) $2 - 49 = 0$

أحاول

أختبرُ تعلمي



(1) أحل المعادلات الآتية:

(أ) $s^2 - 25 = 0$ (ب) $s^2 + 6 = 5$ ص

(2) إذا كانت $s^2 + 4 = 3 + s = 0$ ، فأجد قيمة (أ) التي تجعل للمعادلة حلاً وحيداً.

(3) يُنتج مصنع للحديد والصلب قطعةً على شكل متوازي مستطيلات أبعادها بالسنتيمترات: 4، (س+2)، (س+2)، وحجمها يساوي 100 سم³. أجد قيمة (س).



(4) أحل المعادلة $s^3 + 2s + 4 = 1 - s = 0$

(5) ما العدد الحقيقي الذي ينقص مربعه عن خمسة أمثاله بمقدار 4؟

(6) حلت بيان المعادلة (س + 1) $2 = 100$ كالآتي:

$$(س + 1)^2 = 100$$

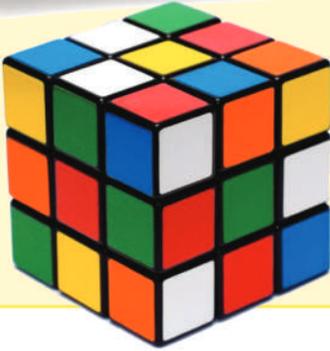
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$س + 1 = 10$$

$$س = 9$$

أبين الخطأ الذي وقعت فيه.

أولاً: الأسس النسبية وقوانينها



هل أنا بارع بلعب المكعب السحري (روبك)؟
إذا علمت أن حجم المكعب السحري المسموح
به في المباراة هو ٢٧٠٠٠ مم^٣، فما طول
ضلع هذا المكعب؟

ماذا سأتعلم؟

- الأسس النسبية.
- قوانين الأسس.
- تبسيط التعابير.

أتملُّ البطاقات الآتية، وأملأ الفراغ في كلِّ منها:

نشاط

$$\frac{1}{3} \sqrt[3]{8}$$



$$3 - \sqrt[3]{8}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} \times \frac{1}{\square} \times \frac{1}{\square}$$

$$3 \sqrt[3]{8}$$

$$\square = 8 \times 8 \times 8$$

ألاحظ أن:

البطقتين الأولى والثانية، تحتوي على أسس لأعداد صحيحة وقد درستها سابقاً. ولكن، كيف سأجد
الحل في البطاقة الثالثة؟ ما نوع الأس فيها؟

تُكتب $(\sqrt[3]{8})$ على الصورة $\sqrt[3]{8^1}$ ويُسمى $(\frac{1}{3})$ **أساً نسبياً**.

أتعلم

$\sqrt[n]{s} = s^{\frac{1}{n}}$ (إذا كان (ن) عدداً زوجياً موجباً، و(س) عدداً حقيقياً ليس سالباً).

$\sqrt[n]{s} = \overline{s^{\frac{1}{n}}}$ (إذا كان (ن) عدداً فردياً موجباً، و(س) عدداً حقيقياً).

$$\frac{3}{4} \sqrt[4]{13} = \sqrt[4]{13^{\frac{3}{4}}}$$

مثل: دليل الجذر الأس النسبي

مثال (١)

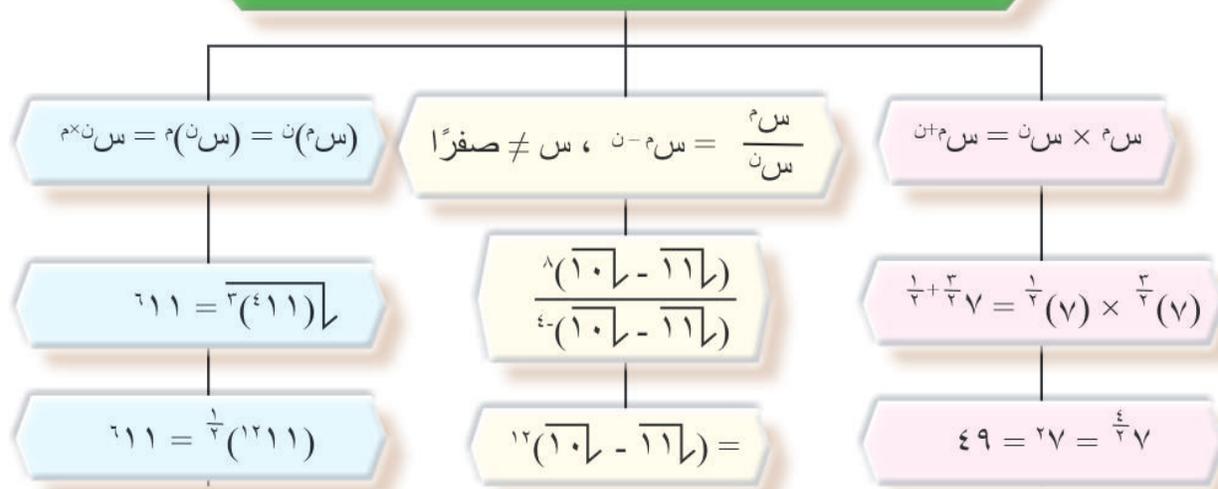
اكتب $(\sqrt[3]{\frac{1}{64}})$ على صورة أسس نسبية، ثم أجد قيمتها:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} (\frac{1}{64}) = \sqrt[3]{\frac{1}{64}}$$

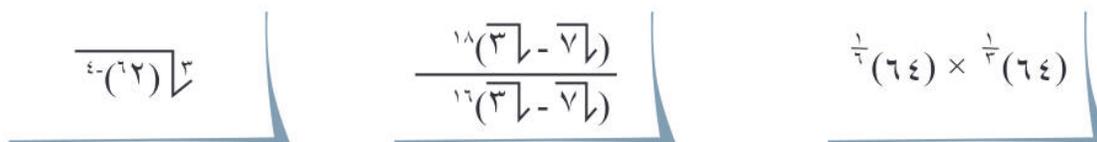
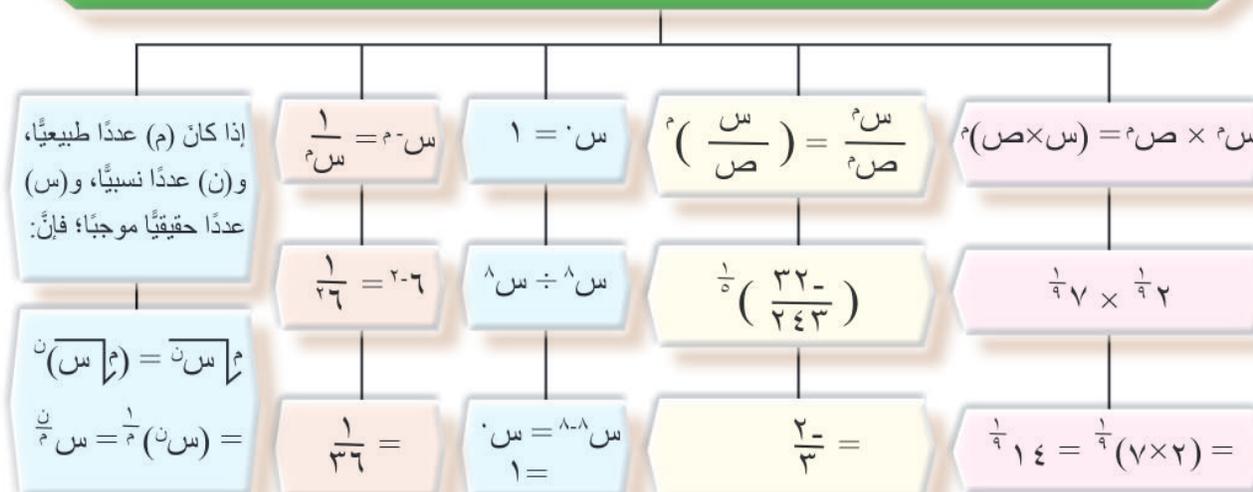
الحل:

أجد قيمة كل من: $\frac{1}{4}(625)$ ، $\sqrt[6]{\frac{729}{64}}$

إذا كان (س) عددًا حقيقيًا، وكان (م)، (ن) عددين نسبيين؛ فإن:



أجد قيمة كل مما يأتي:

إذا كان (س) و(ص) عددين حقيقيين، حيث $س \neq 0$ ، $ص \neq 0$ ، وكان (م) عددًا نسبيًا؛ فإن:

يمكنني تبسيط العبارات التي تتضمن أسسًا نسبية؛ عن طريق تحويل الأسس السالبة إلى موجبة، ثم التبسيط باستعمال قوانين الأسس.

مثال (٢)

أجد قيمة المقدار الآتي في أبسط صورة: $\sqrt[9]{\frac{9^{-5} \times 27^3}{113}}$

تبسيط ما داخل الجذر باستعمال قوانين الأسس.

الحل: $\sqrt[9]{9^{-5} \times 27^3} = \sqrt[9]{9^{-5} \times 11 \cdot 27^3}$

تحويل الجذر إلى أس نسبي.

$$\frac{1}{9}(9^{-5} \times 27^3) =$$

تغيير الأس السالب إلى موجب ($\frac{1}{9} = 9^{-1}$).

$$\frac{3}{9} = 9^{-1} \times 27^3 = (9^{\frac{3}{9}} \times 9^{\frac{3}{9}} \times 9^{\frac{3}{9}}) =$$

أحاول

أجد قيمة المقادير الآتية في أبسط صورة:

(ب) $\sqrt[5]{\frac{10^9 \times 8^5}{10(4 \times 2)}}$

(أ) $\sqrt[7]{\left(\frac{17 \times 4}{3-4 \times 7}\right)}$

أختبر تعلمي



(١) أجد قيمة كل مما يأتي:

(د) $\sqrt[7]{(13)^7}$

(ج) $\sqrt[4]{\frac{32}{4}}$

(ب) $\sqrt[4]{64}$

(أ) $\sqrt[3]{25}$

(٢) أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

(ب) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)}$

(أ) $\frac{5(\sqrt{6}-\sqrt{11})}{10(\sqrt{6}-\sqrt{11})}$

(د) $\sqrt[3]{\frac{12 \times (5 \times 2)}{80 \times 10}}$

(ج) $\sqrt[7]{(4-8) \times 7-8}$

٣) أجاب رشيدٌ عن ورقة عملٍ خاصّةٍ بقوانين الأسسِ كالاتي، أساعدهُ على الحكمِ على صحّةِ إجابةِ كلِّ سؤالٍ؛ موضّحاً ذلك في العمودِ الثاني من الجدولِ:

السؤال	الإجابةُ (مع التوضيح)
$٤ = ٠,٢٥٤ \times ٠,٧٥٤$	
$٣ع = ١٠ع \div ٧٠ع$	
$\sqrt[٦]{س} = -س$	
$٦\sqrt[٣]{٣} = ٢(\sqrt[٣]{٣})$	
$\sqrt[٧]{ص} = \sqrt[٢]{(٢-ص)} \times \sqrt[٨]{ص}$	
$\sqrt[٥]{١٠} = \sqrt[٥]{٥} + \sqrt[٥]{٥}$	
$\frac{٣}{٥} = \sqrt[٢]{\left(\frac{٤٥}{١٢٥}\right)^{\frac{٤}{٥}}}$	

مسألة مفتوحة: أكتب مسألةً رياضيّةً تعتمدُ على الأسسِ، تُوضّحُ انتشارَ فيروسِ كورونا.

أمسح رمزَ الاستجابةِ السريعةِ المجاورَ؛ لمشاهدةِ الفيديو الذي يشرحُ النموَّ المتسارعَ لفيروسِ كورونا.



أبحثُ عن اسمِ العالمِ المسلمِ الذي يُعدُّ أوَّلَ من استعملَ الأسسَ السالبةَ، وعن اسمِ أوَّلِ عالمِ استعملَ الأسسَ النسبيّةَ في الرياضياتِ.





أولاً: النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

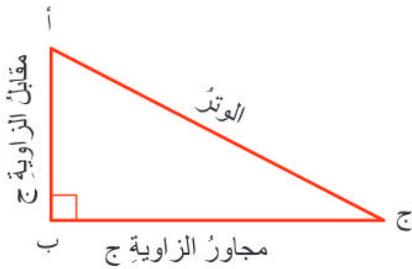


هل سمعت بطائر الكويتزال؟

وقع طائر الكويتزال بشباك أحد الصيادين؛ فأرادت لجنة حماية البيئة إنقاذه لأنه مهدد بالانقراض. نُتبت سلم طوله ١٠ م على غصن شجرة بزاوية ٥٧° بين حافة السلم وسطح الأرض. ما ارتفاع الشجرة؟

ماذا سأتعلم؟

- جيب الزاوية (جا).
- جيب التمام (جتا)
- الظل (ظا)
- مقابل الزاوية.
- مجاور الزاوية.



ألاحظ أن إيجاد المطلوب في مسألة طائر الكويتزال؛ يتطلب قانوناً يربط الزاوية مع الوتر، فهما المعطيان الوحيدان في المسألة. يمكنني إيجاد ارتفاع الشجرة باستعمال نسبة جيب الزاوية، إذ إن:

$$\text{جيب الزاوية ج} = \text{جا ج} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ج}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أج}}$$

$$\text{جيب تمام الزاوية ج} = \text{جتا ج} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ج}}{\text{طول الوتر}}$$

- الزاويتان ج ، أ زاويتان _____ ؛ لأن قياس كل منهما أكبر من صفرٍ وأقل من ٩٠°

- أسمى المثلث أ ب ج مثلثاً _____ ؛ لأن قياس الزاوية ب = ٩٠°

- الضلع المقابل للزاوية أ هو _____ ، وجيب الزاوية أ = جا أ = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

- الضلع المجاور للزاوية أ هو _____ ، وجيب تمام الزاوية أ = جتا أ = $\frac{\text{ج}}{\text{أ}}$

- ظل الزاوية أ = ظا أ = $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية أ}}$

أتعلم

- **جيب الزاوية الحادة** هو نسبة ثابتة في المثلث القائم الزاوية، وتُمثل ($\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$) وهي نسبة طول الضلع

المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر، ويُرمز لها بالرمز (جا) وبالإنجليزية (Sine) واختصاراً (sin).

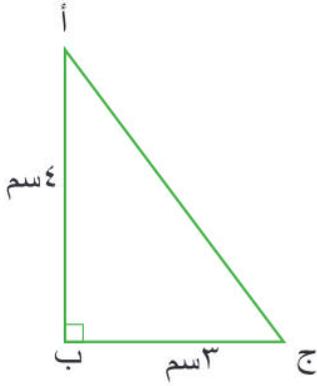
- **جيب تمام الزاوية الحادة** هو نسبة ثابتة في المثلث القائم الزاوية، وتُمثل ($\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$) وهي نسبة طول

الضلع المجاور للزاوية الحادة إلى طول الوتر، ويُرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنجليزية (Cosine) واختصاراً (cos).

- **ظل الزاوية الحادة** هو نسبة ثابتة في المثلث القائم الزاوية، وتُمثل ($\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$) وهي نسبة طول الضلع

المقابل للزاوية الحادة إلى طول الضلع المجاور، ويُرمز لها بالرمز (ظا) وبالإنجليزية (Tangent) واختصاراً (tan).

مثال (١)



الشكل المجاور يُبين المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب،

فيه أ ب = ٤ سم، ب ج = ٣ سم. أجد: جا أ، جتا ج، ظا ج.

الحل: أجد طول الوتر (أ ج) باستعمال نظرية فيثاغورس.

نظرية فيثاغورس.

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$$

تعويض.

$$(\text{أ ج})^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16 = (\text{أ ج})^2$$

$$\therefore \text{أ ج} = \sqrt{25} = 5 \text{ سم}$$

أخذ الجذر التربيعي للطرفين.

نسبة جيب الزاوية، تعويض.

$$\text{جا أ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{3}{5}$$

نسبة جيب الزاوية، تعويض.

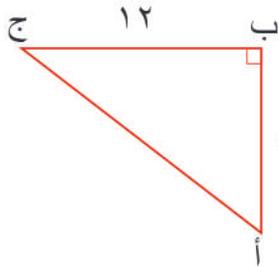
$$\text{جا ج} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ج}}{\text{طول الوتر}} = \frac{4}{5}$$

نسبة جيب تمام الزاوية، تعويض.

$$\text{جتا ج} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ج}}{\text{طول الوتر}} = \frac{3}{5}$$

نسبة ظل الزاوية، تعويض.

$$\text{ظا ج} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ج}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ج}} = \frac{4}{3}$$



بناءً على الشكل المجاور، أجد جا أ، جتا ج، ظا أ

أحاول

أتعلم

أستعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد جيب زاوية معلومة حسب الخطوات الآتية:

أضغط على
المفتاح (sin).



أدخل قياس
الزاوية المطلوبة.



أتأكد أن النظام في الآلة الحاسبة
بالدرجات (Degrees).

تنويه: - في بعض الآلات الحاسبة؛ أحتاج إلى الضغط على مفتاح (sin) أولاً، ثم إدخال قياس الزاوية المطلوبة.

- لإيجاد جيب تمام زاوية معلومة، أستعمل المفتاح (cos).

- لإيجاد ظل زاوية معلومة، أستعمل المفتاح (tan).

مثال (٢)



أستعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد جا 48°

الحل:

(١) أتأكد من ضبط نظام الدرجات (Deg).

(٢) أدخل قياس الزاوية (48°) .

(٣) أضغط على المفتاح (sin).

(٤) الناتج: جا $48^\circ \approx 0,74$

أحاول

أستعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد ما يأتي:

(١) جا 79° (٢) - جا 15° (٣) جتا 65° (٤) ظا 80°

أتعلم

أستعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس الزاوية؛ إذا علمت قيمة الجيب لها حسب الخطوات الآتية:

أدخل قيمة جيب الزاوية. ← أضغط على مفتاح (Inv) أو (shift). ← أضغط على المفتاح (sin).

تنوية

(١) توجد آلات حاسبة فيها مفتاح (\sin^{-1}) ، وبهذه الحالة أضغط على المفتاح (\sin^{-1}) ، ثم أدخل قيمة الجيب لأحصل على الزاوية المطلوبة.

(٢) توجد آلات حاسبة أخرى أضغط بها على مفتاح (Inv) ثم (sin) أو (\sin^{-1}) ، وبعدها أدخل قيمة النسبة المثلثية للزاوية المطلوبة ثم (=) أو (enter).

مثال (٣)

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قياس الزاوية س؛ حيث جا س = $0,7$



الحل:

(١) أتأكد من ضبط الآلة على نظام الدرجات.

(٢) أدخل قيمة جيب الزاوية $0,7$

(٣) أضغط على المفتاح (Inv) ثم (sin).

(٤) الناتج: قيمة الزاوية س $\approx 44,4^\circ$

أحاول

أستعمل الآلة الحاسبة؛ لإيجاد قياس الزاوية س في كل مما يأتي:

(١) جا س = $0,65$ (٢) جتا س = $0,37$ (٣) ظا س = $0,58$

أختبرُ تعلّمي



١) المثلثُ أ ب ج قائمُ الزاويةِ في ب، فيه أ ب = ١٢ سم، أ ج = ٢٠ سم. أجدُ كلاً ممّا يأتي:

أ) ب ج

ب) ج أ

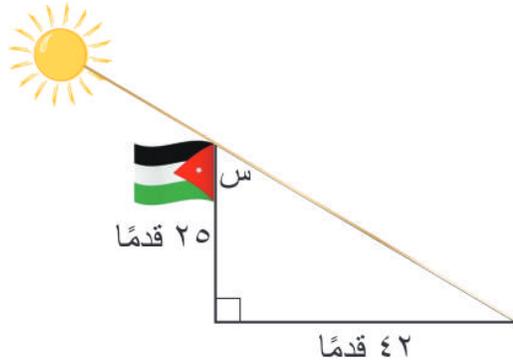
ج) جتا ج

د) ظ أ

هـ) قياسُ الزاويةِ (أ) باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ (إلى أقربِ عددٍ صحيحٍ).

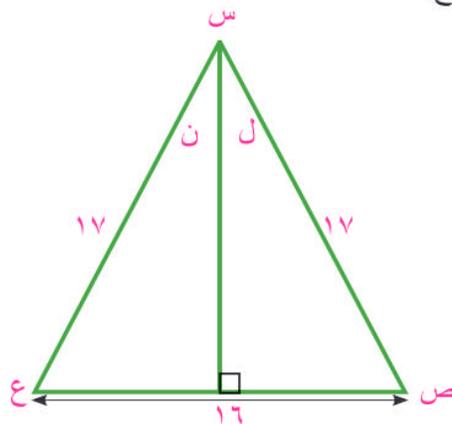
و) قياسُ الزاويةِ (ج).

٢) ساريةُ علمٍ بطولِ ٢٥ قدماً تُلقِي بظلً طوله ٤٢ قدماً. ما قياسُ الزاويةِ س التي تضربُ فيها الشمسُ قَمَّةَ ساريةِ العلمِ؟

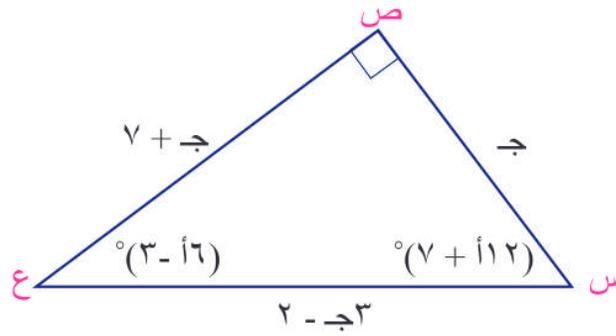


٣) أتأملُ الشكلَ المجاورَ، ثمَّ أجدُ ج ا ن، ج ا ص،

وقياسَ كلِّ منَ الزوايا س، ص، ع.



٤) المثلث س ص ع قائم الزاوية في ص، كما يوضح الشكل المجاور، أجد قيمة كل من: أ، ج، جناس، ظا ع.



٥) أقرأ البطاقات الآتية، ثم أختار البطاقة (البطاقات) الصحيحة منها. أبرر إجابتي:

كلما زاد قياس الزاوية الحادة زادت قيمته ظلها.

إذا كانت (س) زاوية حادة، بحيث $جا س = جناس$ ؛ فإن $س = ٤٥°$

إذا كانت: $٤٥° < ه < ٩٠°$ فإن $ظا ه < ١$

إذا كانت ه زاوية حادة؛ فإن $جا ه < ١$

كلما زاد قياس الزاوية الحادة، زادت قيمته جيب تمامها.

إذا كانت ه زاوية حادة؛ فإن $ظا ه \geq ١$

إذا كانت ه زاوية حادة؛ فإن $جتا ه > ١$

إذا كانت (س) زاوية حادة، بحيث $ظا س = ١$ فإن $س = ٤٥°$

أبحث



- عن أكبر قيمة لجيب الزاوية وأقل قيمة له.
- عن سبب تسمية جيب الزاوية هذا الاسم.
- للعرب والمسلمين إنجازات مهمة في علم حساب المثلثات، أبحث عن العالم المسلم الذي يُعد أول من استعمل مصطلحي جيب الزاوية وجيب التمام، وأكتب عنه وعن إنجازاته.



- أمسح رمز الاستجابة السريعة المجاور؛ لأخذ لمحة عن أهمية علم حساب المثلثات.